



הנושא: **תסריט גילוי משפט מעניין מן ההשערה להוכחה**

הוכן ע"י: אבי סיגלר.

תקציר: המחבר מספר את סיפורו של גילוי משפט מעניין, הקשור למשפט 'תלמי', עבור דרך העלאת השערה, בחינת מקרים פרטיים, ניסוח השערה מכלילה ועד להוכחתה.

מילות מפתח: חקירה מתמטית, גיאומטריה, הנדסה, גיאומטריה המישור, הנדסת המישור, משפט, השערה, הוכחה, מרובע חסום במעגל, מרובע בר-חסימה, משפט תלמי, משולש, שטח, מעגל חסום, שטח, יחס, משולש היטלים.

החומר פורסם במסגרת: עלייה 38, תשס"ז 2007, עמודים 37-40.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 4 עמודים.

תסריט גילוי משפט מעניין מן ההשערה להוכחה

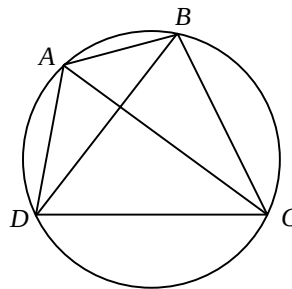
אבי סיגלר
ביה"ס הטכני של חיל-האוויר, חיפה

מבוא

לפני שנים רבות, כשהייתי תלמיד בכיתה י, המורה שלי למתמטיקה ניסח והוכיח משפט מפורסם של תלמי:
"אם ABCD מרובע חסום במעגל, אזי קיים:
" $AB \cdot DC + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ "

ההוכחה היתה מסובכת וכללה בניית עזר לא שגרתיות ומניפולציות אלגבריות בביטויים גיאומטריים.

הוקסמתי מיופיו של המשפט ומשיטת ההוכחה, אך הטרידה אותי שאלה מסקרנות: "איך תלמי מצא את המשפט?"

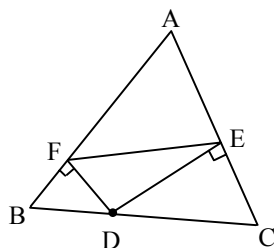


קשה מאוד לענות על שאלה כזאת, קשה לעבור בשבילי מוחו של היוצר המתמטי.

אפשר לדמיין שמשפט זה נולד כהכללה של משפט פיתגורס או אולי מהוכחת מקרה פרטי לגבי טרפז שווה-שוקיים או ממקרה פרטי של דלתון חסום במעגל. לכן אפשר לדמיין תסריטי גילוי שונים, אך רק תלמי יָדע את התשובה ולא גילה לנו אותה.

במאמר זה אתאר גילוי של משפט על-ידי, מן ההשערה, דרך הוכחת ההשערה עבור מקרים פרטיים נבחרים, ועד להוכחתו. איני מתיימר לטעון שגיליתי ראשון את המשפט, אך לא מצאתי אותו בספרים.

התצורה שהובילה להשערה



נתון משולש ABC. D נקודה על BC והיטליה על AC ו-AB בהתאמה הם E ו-F. מטרת המקורית היתה לבדוק מהי הנקודה D, עבורה שטח המשולש DEF מקסימלי. פתרון השאלה לא מסובך:

$$S_{\triangle DEF} = \frac{DF \cdot DE \cdot \sin \angle FDE}{2}$$

$$= \frac{BD \sin \angle B \cdot DC \cdot \sin \angle C \cdot \sin \angle A}{2}$$

לכן S_{DEF} מקסימלי כאשר $BD \cdot DC$ מקסימלי וזה קורה כאשר D אמצע BC. (קל להוכיח זאת כי $BD + DC$ קבוע) (משפט הממוצעים).

הסתכלות על הנוסחה:

$$S_{DEF} = \frac{BD \cdot DC \sin \angle A \sin \angle B \sin \angle C}{2}$$

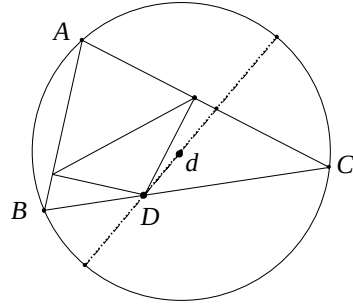
הזכירה לי את הנוסחה:

$$S_{ABC} = 2R^2 \sin \angle A \cdot \sin \angle B \cdot \sin \angle C$$

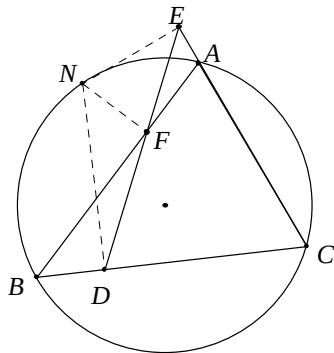
(R מחוג המעגל החוסם)

הצלעות לכן ברור ש: $\frac{1}{4} S_{ABC} = S_{DEF}$. כלומר במקרה זה ההשערה נכונה.

$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{BD \cdot DC}{4R^2} \quad \text{לכן:}$$



מקרה II
זהו מקרה מאוד מעניין כי הוא קשור למשפט מפורסם של סימסון. הנקודות המקיימות תנאי זה הם קדקודי המשולש ABC וכל הנקודות על היקף המעגל החוסם. (לאו דווקא פנימיות למשולש). משפטו של סימסון טוען שאם נקודה N נקודה על המעגל החוסם את המשולש ABC ו-F, E, D היטליה על צלעות המשולש, אז $S_{EFD} = 0$ במילים אחרות F, E, D לוינארות.



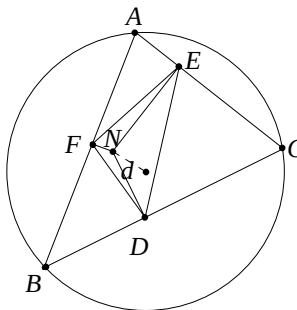
אבל אם נסמן ב-d את המרחק בין מרכז המעגל החוסם את ABC לבין הנקודה D, ברור ש:
 $(R+d) \cdot (R-d) = BD \cdot DC$

לכן:

$$(1) \quad \frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{R^2 - d^2}{4R^2}$$

משמעות (1) היא שאם D נמצאת על אחת מצלעות המשולש E, F, הן היטליה על שתי הצלעות האחרות יחס השטחים בין DEF לבין ABC תלוי רק במרחק הנקודה D ממרכז המעגל החוסם.

וי"מה אם D פנימית למשולש? (שאלת What if not החלטתי לבדוק את ההשערה הבאה:



אם N נקודה פנימית למשולש ABC שמרחקה ממרכז המעגל החוסם d ו-F, E, D היטליה על צלעות המשולש. אזי:

$$(2) \quad \frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{R^2 - d^2}{4R^2}$$

כלומר: (1) מתקיים גם אם המשולש DEF נוצר מנקודה פנימית. (משולשים כ-DEF נקראים משולשים פודליים).

בדיקת מקרים פרטיים

מקרה I

O ו-N מלכדים. במקרה זה $d = 0$, והיחס באגף ימין שווה $\frac{1}{4}$. במקרה זה F, E, D שהן היטלי O הן אמצעי

אם $R = d$, $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{R^2 - d^2}{4R^2} = 0$, מתאים להשערה.

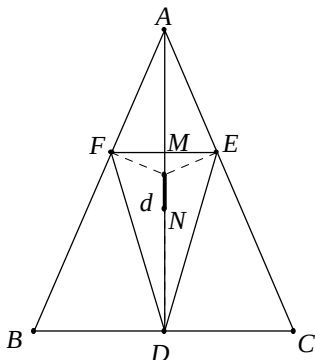
העובדה ש-N חיצונית למעגל, מרמזת על השערה חזקה יותר:

$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{R^2 - d^2}{4R^2}$$

ללא הגבלה אם N פנימית או חיצונית ל-ABC.

מקרה III

ABC משולש שווה שוקיים – הנקודה N על הגובה לבסיס. (קרובה ל-A כמתואר בציור)



ארבעת המקרים הפרטיים שהוכחו, מחזקים מאוד את התחושה שההשערה נכונה.

הוכחת המשפט

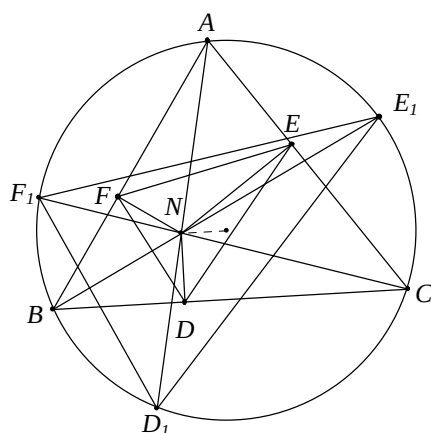
כיוון שהמשפט טוען ש:

$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{R^2 - d^2}{4R^2}$$

טבעית בנית העזר הבאה: נמשיך את AN , BN ו- CN עד שיפגשו את המעגל בנקודות E_1, D_1 ו- F_1 בהתאמה.

ואז:

$$R^2 - d^2 = AN \cdot ND_1 = BN \cdot NE_1 = CN \cdot NF_1$$



תקציר ההוכחה (כדי לקבל תמונה כוללת לגבי

הרעיונות – פירוט יבוא בהמשך).

א. נמצא נוסחה ל: $\frac{F_1 E_1}{BC}$ נקבל

$$(7) \quad \frac{F_1 E_1}{BC} = \frac{R^2 - d^2}{BN \cdot NC}$$

ב. נמצא נוסחה ל: $\frac{S_{D_1 E_1 F_1}}{S_{ABC}}$ ונקבל

$$(8) \quad \frac{S_{D_1 E_1 F_1}}{S_{ABC}} = \frac{(R^2 - d^2)^3}{(AN \cdot BN \cdot CN)^2}$$

ג. נוכיח ש: $\triangle DEF \sim \triangle D_1 E_1 F_1$

ד. נוכיח שיחס הדמיון:

$$(9) \quad \frac{AN \cdot BN \cdot CN}{2R(R^2 - d^2)} = \frac{EF}{E_1 F_1}$$

לכן יחס השטחים בין $\triangle DEF$ ל- $\triangle D_1 E_1 F_1$

$$(10) \quad \frac{S_{DEF}}{S_{D_1 E_1 F_1}} = \frac{(AN \cdot BN \cdot CN)^2}{4R^2(R^2 - d^2)^2}$$

נסמן ב- M את מפגש FE עם AD . אם O מרכז המעגל החוסם אז $AN = R - d$. לכן $EF = (R - d) \sin \angle A$

(כי המרובע $AFNE$ בר חסימה במעגל שקוטרו AN):

$$\begin{aligned} \frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} &= \frac{EF \cdot MD}{BC \cdot AD} \\ &= \frac{EF}{BC} \cdot \frac{AD - AM}{AD} = \frac{EF}{BC} \left(1 - \frac{AM}{AD}\right) \\ &= \frac{EF}{BC} \left(1 - \frac{EF}{BC}\right) \end{aligned}$$

אבל: $BC = 2R \sin \angle A$. לכן: $\frac{EF}{BC} = \frac{R - d}{2R}$ (לפי משפט תלס)

$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{R - d}{2R} \left(1 - \frac{R - d}{2R}\right) = \frac{R^2 - d^2}{4R^2}$$

לכן:

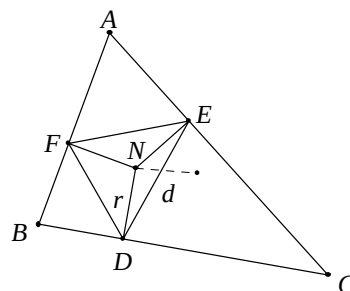
ושוב גם במקרה זה ההשערה נכונה.

מקרה IV

אווילר הוכיח משפט מעניין על המרחק d בין מרכז המעגל החוסם למרכז המעגל החסום במשולש. המשפט הוא:

$$(4) \quad d^2 = R(R - 2r)$$

כאשר R מחוג המעגל החוסם ו- r מחוג המעגל החסום.



נחשב את: $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}}$ במקרה זה.

$$\begin{aligned} S_{DEF} &= S_{NEF} + S_{NED} + S_{NFD} \\ &= \frac{r^2 \cdot \sin \angle A + r^2 \sin \angle B + r^2 \sin \angle C}{2} \\ &= r^2 \frac{(\sin \angle A + \sin \angle B + \sin \angle C)}{2} = \frac{r^2(a + b + c)}{4R} \\ &= \frac{r(a + b + c)}{2} \cdot \frac{r}{2R} = S_{ABC} \cdot \frac{r}{2R} \end{aligned}$$

$$(5) \quad \frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{r}{2R} \quad \text{כלומר}$$

נחשב לפי נוסחה (4) $\frac{R^2 - d^2}{4R^2}$

$$= \frac{R^2 - (R^2 - 2Rr)}{4R^2} = \frac{r}{2R}$$

לכן: גם במקרה זה. $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{R^2 - d^2}{4R^2}$

ה. אם נכפול את: (8) ו- (10) אגף אגף נקבל:

$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{R^2 - d^2}{4R^2}$$

וסיימו.

פירוט ההוכחה

הוכחת א

לכן, $\Delta F_1 N E_1 \sim \Delta BNC$

$$\begin{aligned} \frac{F_1 E_1}{BC} &= \frac{F_1 N}{BN} = \\ &= \frac{R^2 - d^2}{CN \cdot BN} \quad (\text{לפי 6}) \end{aligned}$$

לכן (7) הוכח. לכן:

$$\frac{F_1 E_1}{BC} = \frac{R^2 - d^2}{CN \cdot BN}, \frac{F_1 D_1}{AC} = \frac{R^2 - d^2}{AN \cdot NC}, \frac{D_1 E_1}{AB} = \frac{R^2 - d^2}{AN \cdot BN}$$

הוכחת ב

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R}, \quad S_{D_1 E_1 F_1} = \frac{E_1 F_1 \cdot F_1 D_1 \cdot E_1 D_1}{4R}$$

לכן

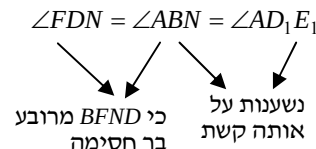
$$(8) \frac{S_{D_1 E_1 F_1}}{S_{ABC}} = \frac{E_1 F_1 \cdot F_1 D_1 \cdot E_1 D_1}{AB \cdot AC \cdot BC} = \frac{(R^2 - d^2)^3}{(AN \cdot BN \cdot CN)^2}$$

לכן (8) הוכח:

הוכחת ג

מספיק להוכיח ש- $\angle D = \angle D_1$.

קיים:



קיים מאותן סיבות:

$$\angle NDE = \angle ACN = \angle AD_1 F_1$$

לכן

$$\begin{aligned} \angle FDN + \angle NDE &= \angle AD_1 E_1 + \angle AD_1 F_1 \\ &\Downarrow \\ \angle D &= \angle D_1 \end{aligned}$$

הוכחת ד

כיוון ש- $AFNE$ מרובע בר חסימה ו- AN קוטר המעגל, קיים לפי משפט הסינוסים:

$$\begin{aligned} EF &= AN \sin \angle A \\ &= \frac{AN \cdot BC}{2R} \end{aligned}$$

אבל לפי (7) קיים:

$$E_1 F_1 = \frac{BC(R^2 - d^2)}{BN \cdot NC}$$

לכן: $\frac{EF}{E_1 F_1} = \frac{AN \cdot BN \cdot NC}{2R(R^2 - d^2)}$ ו- (9) – הוכח!

בגלל ש: $\Delta DEF \sim \Delta D_1 E_1 F_1$ הרי שמתקיים (10), כלומר:

$$(10) \frac{S_{DEF}}{S_{D_1 E_1 F_1}} = \left(\frac{EF}{E_1 F_1} \right)^2 = \frac{(AN \cdot BN \cdot NC)^2}{4R^2(R^2 - d^2)^2}$$

הוכחת ה כאמור, נובעת מהכפלת (8) ב- (10) לכן ההשערה ההוכחה:

$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{R^2 - d^2}{4R^2}$$

הוכחת ההשערה נראית שוטפת, אך החיפוש אחריה נמשך זמן רב מאוד. הפריצה בהוכחה קרתה כאשר בעקבות בניית העזר של יצירת $\Delta E_1 F_1 D_1$ גיליתי פתאום ש: $\Delta DEF \sim \Delta D_1 E_1 F_1$ ואז המשולש $D_1 E_1 F_1$ שימש

"מתווך" בין ΔDEF ל- ΔABC .

בהמשך, בדקתי את המקרה ש- N חיצונית למשולש

$$\text{והוכחתי שההשערה } \frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{|R^2 - d^2|}{4R^2} \text{ נכונה.}$$

לא אביא את ההוכחה במאמר זה, אך היא אינה שונה מהותית מן ההוכחה לגבי N פנימית למשולש.

סיכום

במאמר זה הוכח משפט מעניין הטוען ששטח משולש היטלים (פודלי) מנקודה N על צלעות משולש, תלוי רק במרחק הנקודה N ממרכז המעגל החוסם את המשולש. הנוסחה:

$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{R^2 - d^2}{4R^2}$$

כאשר הנקודה N פנימית למשולש ABC מוכיחה שהשטח המקסימלי של משולש פודלי הוא $\frac{1}{4}$ משטח

ABC . המשפט הוא גם הכללה של משפט מפורסם של סימסון. כיוון שכך ראיתי חשיבות להציג את המשפט ולתאר את ההוכחה. אבל רציני יותר מזה – רציני לתאר את הדרך שהובילה להשערה ואת טכניקת בדיקת ההשערה במספר מקרים פרטיים – רציני לענות על השאלה "איך נולד משפט יפה?"