אספקטים קוגניטיביים בהוראה ובלמידה של גאומטריה

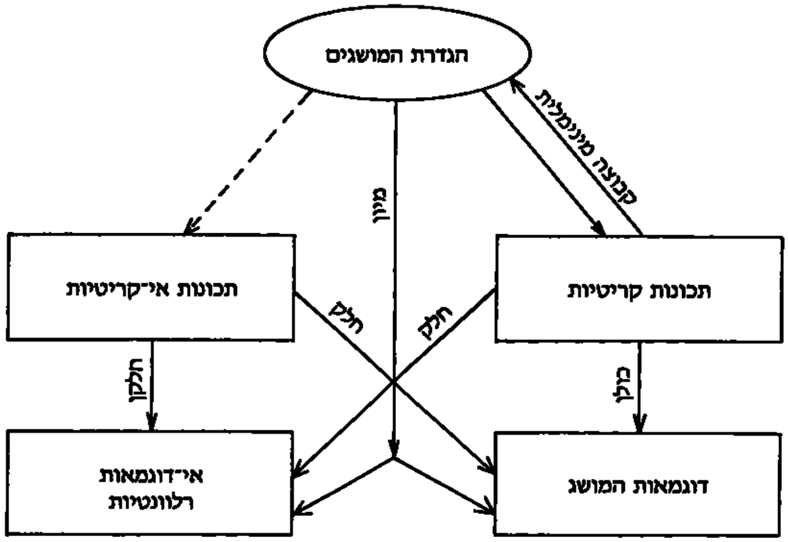
חלק ב'

מאת **רנה הרשקוביץ,**
מכון ויצמן למדע

בחלקו הראשון של מאמר זה (עלייה 9) סקרה המחברת מספר תאוריות המספקות מסגרת לחקר למידת הגאומטריה (בעיקר פיאזיה וואן הילי) ודנה בתפקיד שממלאה ויזואליזציה ברכישת המושגים הגאומטריים בחלק זה מסוכמים הממצאים האמפיריים שנאספו בשורת מחקרים המוקדשים לגאומטריה בסעיף 3 נידונות למידת מושגים בסיסיים, ואילו בסעיף 4 מתרכזת המחברת ברמות גבוהות יותר של חשיבה הגאומטרית — ניסוח השערות ובניית הוכחות

3. מושגים גאומטריים בסיסיים

במושגים גאומטריים עוסקים בכל שנות הלימוד בגן ובביה"ס היסודי נגסה לעשות ניתוח לוגי־מתמטי של "מושגי" מדובר במושגים גאומטריים בסיסיים שהם בעלי אלמנטים חזותיים חזקים מאוד נדבר על המבנה המתמטי, הדיסציפליני, של המושג

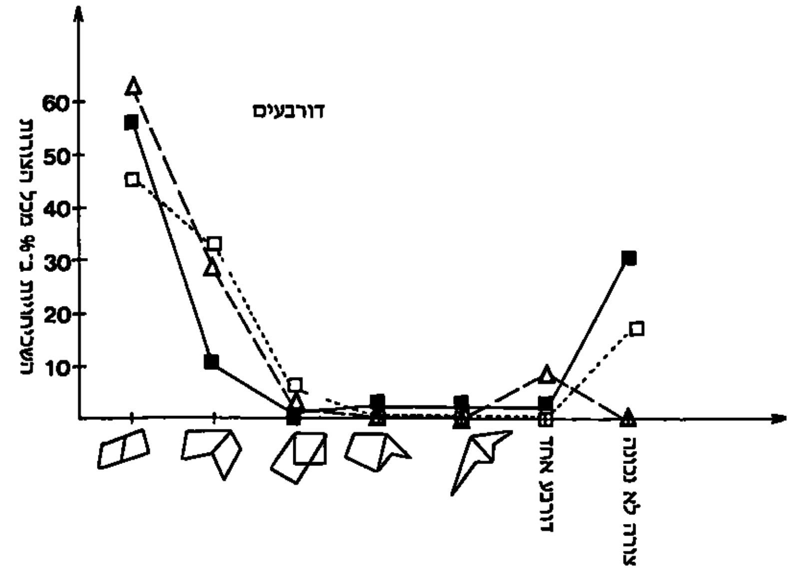


איור 5

נתבונן באיור 5 המושג נגזר מהגדרתו המתמטית. את תכונותיו ניתן לחלק לתכונות רלוונטיות (קריטיות) — אותן תכונות החייבות להמצא בכל דוגמה של המושג — ותכונות אי־קריטיות — אלו הנמצאות רק בחלק מדוגמאות המושג ההגדרה המילולית עצמה בנויה על תת־קבוצה מינימלית של תכונות רלוונטיות המספיקות להגדרת המושג ההגדרה מספקת איפוא קריטריון להבחנה בין דוגמאות המושג ואי־דוגמאות (דוגמאות שליליות) שלו הדוגמאות השליליות שהן רלוונטיות למחקר ולהוראה הן אלו שיש להן חלק מהתכונות הקריטיות אך לא כולן לצערי לא עושים שימוש רב בדוגמאות שליליות בהוראה

אפיון נוסף של המבנה הלוגי המקשר בין המושגים הוא קיומם של **יחסי ההכלה ההפוכים** שבין קבוצות הדוגמאות של המושגים מצד אחד, ובין התכונות של הקבוצות האלה מצד שני (Hershkowitz, 1987 , p. 240). למשל, קבוצת הריבועים מוכלת בקבוצת המקביליות, המוכלת בקבוצת המרובעים במילים אחרות, כל ריבוע הוא מקבילית וכל מקבילית היא מרובע וכד' לעומת זאת בין קבוצות התכונות הקריטיות של כל אחת מהקבוצות האלו קיים יחס הכלה בכיוון ההפוך תכונות המרובע הכללי הן קבוצה חלקית של תכונות המקביליות, ותכונות המקבילית כלולות בתכונות הריבוע וכו' יחס דו־כיווני זה אינו קל

שני המאפיינים שעליהם דיברנו — יחס ההכלה הדו־כיווני מצד אחד, והיחס בין התכונות הקריטיות והאי־קריטיות מצד שני, יעזרו לנו להבין את הקשיים שיש לתלמידים בלימוד מושגים גאומטריים בסיסיים. נתאר בקצרה קשיים אלו



איור 6 השכיחויות של צורות הדושלשים והדורבעים שצוירו (באחוזים מכלל הצורות שצוירו) אצל תלמידים, פרחי הוראה ומורים

א. תופעת אב־טיפוס (פרוטוטיפ)
נמצא, כי לכל מושג יש לפחות דוגמה פרוטוטיפית אחת. דוגמה זו היא הנרכשת ראשונה בלימוד המושג ולכן קיימת בדימוי המושג של רוב הנחקרים (תלמידים בכיתות ה׳ עד ח׳, פרחי הוראה ומורים בבית־הספר היסודי) הדוגמאות הפרוטוטיפיות הן בדרך כלל תת־קבוצה בקבוצת הדוגמאות של המושג, ותת־קבוצה זו מכילה את הדוגמאות שיש להן ״הרשימה הארוכה״ ביותר של תכונות — כל התכונות הקריטיות של המושג וכן תכונות מיוחדות (תכונות אי־קריטיות) לקבוצת הדוגמאות הפרוטוטיפיות. לתכונות מיוחדות אלה יש בדרך כלל מאפיינים ויזואליים חזקים. כזה הוא, למשל, שוויון הצלעות והזוויות בריבוע, שהוא הדוגמה הפרוטוטיפית בקבוצת דוגמאות המרובעים. דוגמה אחרת היא ״הפנימיות״ של הגובה במשולש (זוהי הדוגמה הפרוטוטיפית בין דוגמאות הגבהים במשולש) ושל האלכסון במצולע

התופעה של האב־טיפוס (פרוטוטיפ) משותפת לכולנו, ילדים ומבוגרים. נותנים, למשל, לאוכלוסיה של תלמידים בכיתות ה׳–ח׳, למורים ולפרחי הוראה, הגדרה של מושג ״מומצא״, דו־רבע

דו־רבע הוא שני מרובעים בעלי צלע משותפת

אנו משתמשים בהגדרה כמכשיר לבנית דוגמאות שונות של המושג (Hershkowitz & Vinner, 1984), כלומר מבקשים מכל אחד לצייר שתי דוגמאות שונות של המושג המוגדר. מסתבר שבשלוש האוכלוסיות יש שני ״סוגים״ דוגמאות שנבנות על ידי אחוז גבוה של נשאלים, (דוגמאות פרוטוטיפיות), ואילו ״סוגים״ אחרים של דוגמאות לא נבנים כמעט כלל (ראה איור 6)

אב־טיפוס הינו הבסיס לשיפוט פרוטוטיפי. בכל מושג משתמשים הנחקרים בדוגמה הפרוטוטיפית כמסגרת התייחסות לשיפוט הדוגמאות האחרות, במקום להשתמש בהגדרת המושג, כלומר בתכונותיו (Vinner & Hershkowitz, 1983)

שני סוגים של שיפוט פרוטוטיפי נמצאו במחקר על מושגים בסיסיים בגאומטריה

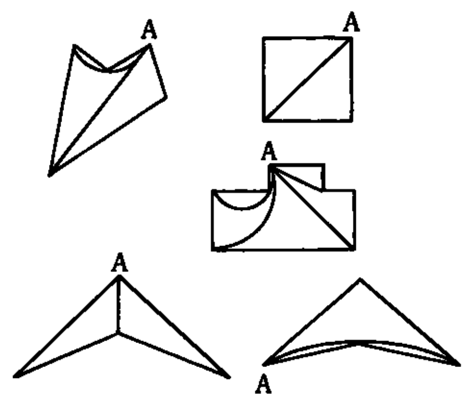
סוג ראשון: הנבדק משתמש בשיפוט ויזואלי בהבחנה בין דוגמאות לבין אי־דוגמאות של המושג, כאשר הדוגמה הפרוטוטיפית משמשת לו כמסגרת התייחסות (הרמה הראשונה של ואן־הילי) למשל, בבנית הגובה במשולש,

הנבדק אינו מסוגל לבנות דוגמאות של גובה הסותרות את דימוי המושג הפרוטוטיפי שלו של גובה **בתוך** המשולש, ומצייר קטעים פנימיים שאינם גובה

סוג שני: גם כאן הדוגמה הפרוטוטיפית משמשת כמסגרת התייחסות, אך הנבדק מבסס את שיפוטו על התכונות המיוחדות לאב־טיפוס ומנסה לאכוף אותן על יותר דוגמאות המושג כאשר הוא אינו מצליח בכך בדוגמה מסוימת, אין הוא כולל אותה כדוגמה של המושג נתבונן, למשל, בטיעון "כל הצורות, פרט לריבוע, אינן מרובעים אף אם יש להן צלעות שוות, זאת משום שאין להן זוויות שוות" אפשר לומר כי שיפוט שגוי מסוג זה נעשה ברמה השניה של ואן הילי, כיוון שהנבדק מתבסס בשיפוטו על תכונות ולא על מראה כללי של הצורה

בהתבוננות על ההתפתחות לפי הגיל מוצאים שהשיפוט הפרוטוטיפי מסוג ראשון מופיע בכל הכיתות ברמה נמוכה (כ־10%) ואילו השיפוט הפרוטוטיפי מסוג שני מופיע בכיתה ה' ברמה גבוהה מאוד, אך הולך ויורד בצורה דרמטית עד לכתה ח'

תופעת האב־טיפוס והשיפוט הפרוטוטיפי הינם בעיקרם תוצר של תהליכים ויזואליים לתכונות המיוחדות לדוגמה הפרוטוטיפית, שאינן תכונות קריטיות, יש מאפיינים ויזואליים חזקים בגלל מאפיינים אלה נרכש הפרוטוטיפ ראשון, ואילו שאר הדוגמאות נדחות בשל העדרן של התכונות המיוחדות לאב־טיפוס נתבונן לדוגמה באיור 7.



איור 7

בשרטוט מובאת תגובתו של תלמיד שנתבקש לשרטט במצולעים שבשרטוט את **כל האלכסונים מהקודקוד A** אין ספק שהוא יודע במפורש מה זה אלכסון במצולע, ומצליח לשרטט אותו כאשר האלכסון עובר **בתוך** המצולע אבל הפרוטוטיפ של אלכסון שעובר תמיד **בתוך** המצולע הוא חזק מאוד אצלו ולכן הוא מאלץ את האלכסונים "החיצוניים" או "החיצוניים בחלקם" להתנהג כמו הפרוטוטיפ הוא מעקם אותם כך שיעברו בתוך המצולע

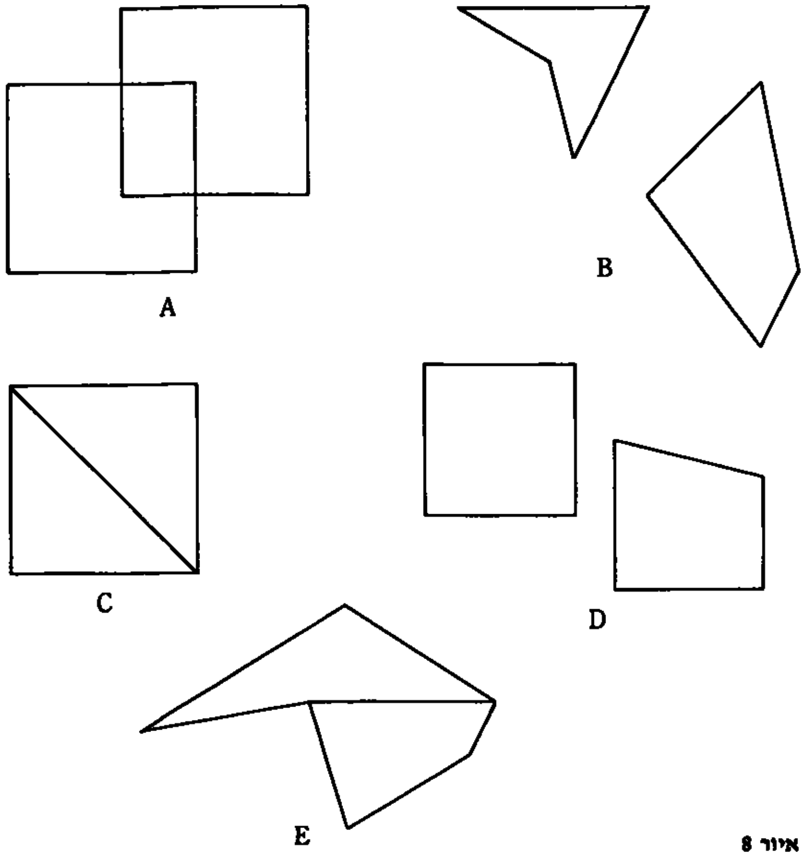
ב. מאפיינים אנליטיים בתהליכי רכישת מושגים

יש עדויות לכך כי רכישת מושגים גאומטריים היא, לפחות בחלקה, תוצאה של תהליכים לוגיים אנליטיים להלן מספר דוגמאות (Hershkowitz, 1989)

דוגמה ראשונה — שיפוט אנליטי
(שיפוט מסוג שלישי)
בנוסף לשני הסוגים של שיפוט פרוטוטיפי שהוזכרו לעיל, נמצא גם שיפוט נכון המתבסס על התכונות הקריטיות של המושג כך למשל ההסבר "הצורה (צורה פתוחה) אינה מרובע כיוון שהיא אינה סגורה, ולכן אינה מצולע, והרי כל מרובע הוא מצולע" השכיחות של סוג שיפוט זה, המראה גם הבנה של יחס ההכלה בין קבוצות של מושגים, הוא נמוך מאוד בכיתה ה', אך הולך ועולה מכיתה ה' לכיתה ז'

דוגמה שניה
למספר התכונות הקריטיות של המושג יש השפעה משמעותית על ביצוע מטלות הקשורות במושגים גאומטריים למשל, נתבונן איך תלמידים שונים בונים דוגמאות של דו־רבעים (ראה הגדרת הדו־רבע לעיל), אחרי שקיבלו את ההגדרה המלולית לדו־רבע (ראה איור 8)

אנו רואים, כי התלמידים B ו D ציירו כל אחד **שני מרובעים**, אך לא התחשבו בכך כי יש להם משהו **משותף** וכי המשותף הוא **צלע** התלמיד A צייר משהו משותף, אך לא צלע התלמיד C צייר **צלע משותפת**, אך המצולעים **אינם מרובעים** ורק התלמיד E



איור 8

התחשב בכל שלוש התכונות הכלולות בהגדרת דורבע שניתנה לו

דוגמה שלישית

לפחות מכיתה ה׳ והלאה יכולים תלמידים לבנות דימויי מושג ״עשירים״ ונכונים בעזרת אסטרטגיות למידה אנליטיות כך קורה, למשל, כאשר ניתנת הגדרה מילולית של מושג ״חדש״, כמו בדוגמת הדו־רבעים, והתלמידים נדרשים להשתמש בה כדי לזהות או לבנות דוגמאות של המושג, או כאשר דימוי המושג החדש נוצר בעזרת סדרה של דוגמאות חיוביות ושליליות, והלמידה המתחילה כניסוי וטעיה הופכת על ידי היזון חוזר מיידי לבדיקת השערות וגילוי התכונות הקריטיות של המושג (ראה ״תרגיל בדו־רבעים״, Hershkowitz, Vinner & Bruckheimer, 1987)

נוכל לסכם ולומר כי יש עדויות לכך שבניית דימויי המושגים הגאומטריים היא מזיגה של תהליכים ויזואליים ואנליטיים בנוסף לכך נמצא, כי ההתנהגות הגאומטרית של הנבדקים משתנה ממושג אחד למשנהו למשל, תלמידים ומורים רבים המראים התנהגות אנליטית (שיפוט מסוג שלישי) לגבי זיהוי מרובעים, מתקשים לזהות דוגמאות של משולשים ישרי זווית כאשר הנצבים לא מקבילים לשולי הדף (שיפוט פרוטוטיפי מסוג ראשון)

ג. יישומים להוראה

תלמידים פוגשים מושגים גאומטריים בסיסיים בדרך מובנית בשנים הראשונות של לימודיהם בגן ובבית־הספר, או בדרך שאינה מובנית מסביבתם, מהורים, ממשחקים ועוד פעמים רבות המאפיינים העיקריים של ״דרכי ההוראה״ בשני המקרים הם כדלקמן

א חוסר שלמות רק חלק מהדוגמאות מוצגות ורק חלק מהתכונות,

ב חוסר ידע וחוסר מודעות הן מצד הסביבה הלא פורמלית, והן מצד חלק מהמורים

וחלק מספרי הלימוד (בעיקר אלה האופיניים לשנות השישים והשבעים), כי התמונה אכן אינה שלמה ויש אלמנטים נוספים שאינם מופיעים,

ג. חוסר מודעות לקשיים של התלמידים ברכישת מושגים גאומטריים פשוטים ולדימויים המוטעים של המושגים הנוצרים תוך כדי למידה,

ד דרכי לימוד שאין בהן פעילות של השערת השערות ועשיית הכללות — הכללות לגבי תכונות המושגים (הגדרות) ניתנות (אם בכלל) על ידי המורה או ספר הלימוד, כאשר הלומד הינו בבחינת מקבל פסיבי

כיצד אפשר לשפר את ההוראה של מושגים גאומטריים בסיסיים? רצוי מאוד, כמובן, כי התלמידים יפתחו יכולת אנליטית ויבססו את שיפוטם על התכונות הקריטיות של המושג כך יוכלו להתגבר על חוסר השלמות ועל המושגים המוטעים שהינם תוצאה של חשיבה ויזואלית בלבד אסטרטגיות אנליטיות כמו אלו המוזכרות לעיל יכולות להאיץ את התפתחותה של החשיבה האנליטית — ואסור לנו לזלזל ביכולות האנליטיות של תלמידים באסטרטגיות אלה נעשה שימוש מגוון בתכונות הקריטיות של המושג, ובדוגמאות חיוביות ושליליות שלו, כאשר שגיאות אופיניות של תלמידים יכולות להוות מקור לדוגמאות שליליות רלוונטיות אסטרטגיות כאלה הן שימושיות ביותר בהכשרת מורים (Hershkowitz et al, 1987) יש להזהר ולא להשתמש באסטרטגיות אלה מוקדם מדי, כי יתכן שילדים בשלבים מוקדמים יכולים ליצור להם את דימויי המושגים הגאומטריים בעיקר באמצעים ויזואליים

כיצד אפשר, איפוא, למנוע יצירת דימויי מושגים המוגבלים ויזואלית, בשלב המוקדם — הויזואלי — של יצירת המושגים? התשובות לשאלה זו משתרעות על טווח שלם שבין שתי נקודות ראות קיצוניות נקודת ראות קיצונית אחת הבאה לידי ביטוי במחקרים הרוסיים (למשל Zykova, 1969), נוטה להטיל את האשמה על **הסביבה הלימודית הויזואלית המוגבלת** שאנו מציעים לתלמידינו דרך שיטות וחומרי ההוראה התהנחה היא שנסיון ויזואלי עשיר, המציג את כל דוגמאות המושג האפשריות, ימנע כליל את המוגבלות הויזואלית שבדימויי המושג נקודת הראות הקיצונית השניה מטילה את האשמה על **מוגבלות התפיסה** (perception), כלומר אנשים בונים דימויי מושגים המוגבלים ויזואלית, בלי קשר לעושר הדוגמאות של המושגים איתם נפגשו

לדעתי, התשובה נמצאת בין שתי נקודות הראות הקיצוניות הללו מכל מקום, אין ספק כי עלינו לספק סביבה עשירה ככל האפשר, המכילה את העושר הרב ביותר האפשרי של דוגמאות ושל תהליכי למידה

נעבור עתה למטרה השניה בהוראת גאומטריה

4. רמות גבוהות יותר של חשיבה בגאומטריה — השערות והוכחות

למרות שגאומטריה כמערכת דדוקטיבית היא אחד מהנושאים הנלמדים ביותר במתמטיקה, רבים בו הכשלונות. את הסיבות לכשלונות תולים בשני גורמים שונים

1 התהליך האינדוקטיבי של **גילוי הכלל** (המשפט) הוזנח בהוראה הקלאסית של גאומטריה דדוקטיבית, התכונות הכלליות (משפטים) אינן "מומצאות מחדש" על ידי התלמידים אלא נכפות עליהם, ההתמודדות של התלמיד הינה עם תהליכי ההוכחה בלבד,

2 ללומד אין "**בגרות לוגית**" הדרושה להוכחה פורמלית, או להרגשת הצורך בהוכחה פורמלית

בהמשך הדברים נתרכז בשתי נקודות אלו

4.1 התהליך האינדוקטיבי בהוראת גאומטריה

לאחרונה, מתחזקת הדעה כי תהליך זה הינו חשוב, וזאת מן הסיבות האלה.

א הוא מביא את טעם הגילוי,

ב בתהליך זה הלומד מעלה את ההכללה כהשערה עצמית שלו, והדבר מעלה את תחושת הצורך שלו בהוכחה,

ג נסיון אינדוקטיבי הוא הבסיס

האינטואיטיבי שעליו נבנות הן הבנת ההוכחה והן יצירתה

ההוראה בעזרת מחשב מאפשרת נתינת דגש חדש חזק לתהליכים אינדוקטיביים בגאומטריה נזכיר שתי לומדות

1 **המשער הגיאומטרי**, שפותח על־ידי יהודה שוורץ ומיכל ירושלמי, (Schwartz & Yerushalmy, 1987), מאפשר לעשות במהירות בנייות של צורות גאומטריות ולחזור עליהן תוך שינוי הנתונים למשל, כשמתמקדים בשלושת הגבהים במשולש, הילד רואה כי בכל צורה של משולש הגבהים נפגשים בנקודה אחת הוא **משער** כי הכלל נכון תמיד

2. **ב־CABRI, שפותח על־ידי קבוצה** מגרנובל שבצרפת (Laboratoire Structures Discretes et Didactique, 1988) אפשר להזיז קודקוד אחד של המשולש על המסך, ולשנות כך באופן רצוף את המשולש הגבהים זזים עם המשולש ותמיד נפגשים בנקודה אחת

לומדות מסוג זה מאפשרות להכניס למערכת ההוראה של גאומטריה תהליכים אינדוקטיביים של גילוי את התהליכים האלה אפשר לראות לדעתי כחוליות מקשרות בין גאומטריה כמדע המרחב לגאומטריה כמערכת דדוקטיבית, ורצוי לשזור אותם בתוך תהליך ההוראה של הגאומטריה כמערכת דדוקטיבית

4.2 תהליכי הוכחה

יש עדויות לכך כי פעמים רבות למלה **״הוכחה״** יש מובנים שונים אצל התלמיד ואצל המורה על־כן, בחוקרנו תהליכי הוכחה עלינו להתיחס לכל סוגי ההצדקה, אשר לדעת התלמיד מסבירה מדוע כלל גאומטרי מסויים הינו נכון בלשף (Ballachef, 1987) מבדיל בין **״הוכחות היחיד״** — כל האמצעים שבעזרתם משתכנע (משכנע) היחיד שכלל מסוים הוא נכון, ובין **ההוכחה המתמטית פורמלית** — זו המקובלת על קהילית המתמטיקאים

ב״הוכחות היחיד״ מונים חוקרים שונים שלבים כמו

א **הסבר נאיבי** — למשל ההסברים ״אפשר לראות מן הצורה״, ״עובדה שזה קורה כך בדוגמה שבניתי״ וכד׳,

ב **הסבר אינטואיטיבי** — הדוגמה האחת (הצורה) אינה מספקת, אך כל הסבר אחר מתקבל,

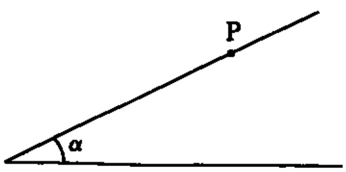
ג **הבנת כל שלב בהוכחה לוגית ללא הבנת כל ההוכחה בשלמותה** — רואים את העצים אך לא את כל היער,

ד **הבנת השלבים היסודיים של ההוכחה המתמטית ללא יכולת לפרט** — רואים את היער אבל לא מסוגלים לראות את העצים בו,

ה **הבנה מלאה של הוכחה פורמלית והיכולת לבנות אותה** — ״הוכחה״ זו, שהיא שילוב של (ג), ושל (ד), היא זו המקובלת על קהילית המתמטקאים

אין ספק, כי אנו המורים ומפתחי תוכניות הלימודים צריכים להיות מאוד מודעים לדרגות ההצדקה השונות בהן אוחזים התלמידים הסיכוי להביא את התלמיד לשלב ההוכחה הפורמלית נעוץ ביכולתנו להתחיל את תהליך ההוראה בהסבריו של התלמיד, תוך כדי הכוונה מדורגת לשלב ההצדקה הרצוי

שונפלד (Schoenfeld, 1986) העלה שאלה נוספת האם תלמידים שהגיעו לשליטה כלשהי בהוכחות בגאומטריה אכן יודעים להשתמש בהכחותיהם ככלי לפתרון בעיות גאומטריות אחרותי הוא הביא דוגמה, המסבירה את כוונתו תלמידים הוכיחו כי מרכז מעגל החסום בין שוקי זווית נמצא על חוצה הזווית לאחר זמן נתבקשו לבנות בעזרת סרגל ומחוגה מעגל חסום בזווית נתונה α המשיק לנקודה P שעל אחת השוקיים (ראה איור 9) התלמידים, שאת התנהגותם תעד בסרט וידאו, השתמשו באמצעים אמפיריים ואינטואיטיביים בלבד השימוש בסרגל ובמחוגה, במידה שנעשה, הודרך יותר על־ידי מראית העין, מאשר על־ידי אנליסה שיטתית ושימוש בהוכחה שונפלד מסיק כי התלמידים מאמינים שתהליך ההוכחה הנו ״משחק לכיתה״ — פעילות שאין לה ערך מחוץ לסביבת הכיתה לכן, תלמידים לא יעסקו בהוכחות בהקשר שיהיה שונה,



איור 9

ולו במעט, מההקשר שבו מובאות הוכחות גאומטריות בכיתה

שאלה נוספת העוסקת בסטנדרט המתמטי של הוכחה בעיני התלמיד עולה ממחקרים של פישביין וקדם (Fischbein & Kedem, 1982) שני החוקרים שאלו האם תלמיד העוסק בהוכחות מתמטיות אכן מבין שלהוכחה פורמלית של טענה מתמטית יש תוקף אוניברסלי, ולכן אין צורך לערוך שום בדיקות נוספות אחרי שנשלמה כדי לבדוק שאלה זו הם נתנו לתלמידים את בעית ההוכחה הבאה "נתון מרובע ABCD שאמצעי צלעותיו PQRS צריך להוכיח כי PQRS מקבילית" בשלב שני ניתנה ההוכחה של המשפט התלמידים נשאלו האם לדעתם היא נכונה תמיד בשלב שלישי הוצגה לתלמידים השאלה הבאה "' הוא ספקן הוא חושב שצריך עדיין לבדוק 100 מרובעים כדי להיות בטוחים ש-PQRS אכן מקבילית מה דעתך? הסבר את תשובתך" הם מצאו כי רק 10% מהתלמידים היו עקביים לגמרי, ואמרו כי ההוכחה נכונה תמיד וכי אין צורך לבדוק מקרים נוספים תלמידים רבים אשר טענו כי ההוכחה תקפה תמיד אמרו בשלב שני כי כדאי לבדוק עוד דוגמאות בנוסף לזה היו כמובן גם תלמידים רבים שלא היו בטוחים בתוקף הכללי של ההוכחה

רשימת ספרות

Balacheff N. (1987). Towards a problematique for research in mathematics education, Anaheim, C A.

Ben-Chaim, D , Lappan, G , & Houang, R T (1989) Adolescents' ability to communicate spatial information· Analyzing and affecting students' perfomance. *Educational Studies in Mathematics, 20,* 121-146

Burger, W. F., & Shaughnessy, J M (1986) Characterizing the van Hiele levels of development in geometry *Journal for Research in Mathematics Education, 17,* 13-48.

Fischbein, E , & Kedem, I. (1982) Proof and certitude in the development of mathematical thinking. In A. Vermandel (Ed), *Proceedings of the Sixth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 128-131) Antwerp, Belgium Universitaire Instelling Antwerpen.

Hershkowitz, R. (1987) The acquisition of concepts and misconceptions in basic geometry — Or when "a little learning is a dangerous thing " In J. D. Novak (Ed.), *Proceedings of the Second International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics* (Vol 3, pp. 238-251) Ithaca, NY. Cornell University

Hershkowitz, R. (1989) Visualization in geometry Two sides of the coin *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11(1 & 2), 61-75.*

Hershkowitz, R., Vinner, S & Bruckheimer, M (1987). Activities with teachers based on cognitive research In M M. Lindquist & A P Shulte (Eds), *Learning and teaching geometry K-12* (1987 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, pp 222-235) Reston, VA· NCTM

Hershkowitz, R & Vinner, S. (1984) Children's concept in elementary geometry — a reflection of teacher's concepts? in Southwell, B., Eyland, R., Cooper, M , Cornory, Y and Collis, K (Eds) Proceedings of the 8th PME conference (pp. 63-69) Sydney, Australia

Hoffer, A. (1983) Van Hiele based research. In R Lesh & M Landau (Eds), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp 205-227). New York· Academic Press

Laboratoire Structures Discrètes et Didactique (1988). *Cabri Géomètre.* Grenoble, France Institut IMAG

Martin, J L (1976a) An analysis of some Piaget's topological tasks from a mathematical point of view *Journal for Research in Mathematics Education, 7, 8-24*

Martin, J L (1976b) A test with selected topological properties of Piaget's hypothesis concerning the spatial representation of the young child *Journal for Research in Mathematics Education, 7, 26-38*

Mukhopadhyay, S (1987, July) *On the drawing of solid stimuli The scaling of responses of rural Indians from specific occupational backgrounds* Paper presented as a poster at the 11th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Montreal, Canada

Razel, M , & Eylon, B S (1986) Developing visual language skills The Agam program *Journal of Visual Verbal Languaging, 6(1), 49-54*

Schoenfeld, A H (1986) On having and using geometric knowledge In J Hiebert (Ed), *Conceptual and procedural knowledge The case of mathematics* (pp 225-264). Hillsdale, NJ Erlbaum

Schwartz J L , & Yerushalmy, M (1987) The geometric supposer An intellectual prosthesis for making conjectures *College Mathematics Journal, 18, 58-65*

Taloumis, T (1975) The relationship of area conservation to area measurement as affected by sequence of presentation of Piagetian area tasks to boys and girls in grades one to three *Journal for Research in Mathematics Education, 6, 233-242*

Vinner, S , & Hershkowitz, R (1983) On concept formation in geometry *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik, 15, 20 25*

Wirszup, I (1976) Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry In J L Martin (Ed.), *Space and geometry* (pp 75-98) Columbus, OH ERIC/SMEAC

Zykova, V L (1969) Operating with concepts when solving geometry problems In J Kilpatrick & I Wirszup (Eds), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics Vol 1 The learning of mathematical concepts* (pp 93-148) Stanford, CA School Mathematics Study Group

הקטע הבא נלקח מתוך "ילקוט מעם לועז" על ספר דברים בהוצאת אור־חדש על־ידי מוסד עזרה

* (נג) על השאלה למה יש צדיק ורע לו ויש רשע וטוב לו מספרים על האבן עזרא המעשה שני אנשים היו הולכים בדרך וישבו לאכול, והיה לאחד מהם שלש חלות לחם ולחבירו לא היו אלא ב׳ חלות בא אליהם עובר אורח ואמר להם, אחי, רעב אני ואין לי לחם לאכול, אולי תתנו לי לאכול מפתכם ואשלם לכם נתרצו לו, ושיתפו אותו בסעודתם ואכלו השלשה את תמשת החלות והוא נתן להם חמשה זהובים ונתעוררה השאלה כיצד יחלקו ביניהם את חמשת הזהובים בעל ג׳ החלות טען שיתנו לו ג׳ זהובים, שהרי היו לו ג׳ חלות, ובעל ב׳ החלות טען שיחלקו הכסף לחצאים שהרי האורח אכל משניהם בשוה, ולא הקפיד לאכול משלו יותר ובהתעצמותם החליטו להביא הדבר בפני רב העיר ופסק בעל ג׳ החלות יקח ד׳ זהובים, ובעל הב׳ יקח אחד

כששמעו העומדים גזר הדין צחקו, אמרו, הנה הרב פסק לזה יותר ממה שתבע, שהרי בעל ג׳ החלות ביקש רק ג׳ זהובים והוא פסק לו ד׳ זהובים, אין זאת כי משפט מסולף הוציא

כששמע זאת הרב אבן עזרא אמר להם, אם אין אתם יכולים לרדת לסוף דעתו של שופט בשר ודם כיצד אתם רוצים להבין משפטי השי״ת בואו ואסבירכם את גזר הדין כי כל אחד מהשלשתם אכלו שליש הלחם, שהרי כולם אכלו בחבורה באופן שוה וכאשר נחלק כל לחם לג׳ שלישים, הרי ט״ו שלישים וכל אחד אכל חמשה שלישים נמצא שאותו שהיה לו ב׳ חלות אכל ה׳ שלישים, ולא נתן מלחמו לחבירו אלא שליש אחד ומגיע לו זהוב אחד, ואילו בעל ג׳ החלות היה לחמו ט׳ שלישים, הורידו מזה ה׳ שלישים שאכל הוא, נמצא שאכל האורח מפתו ד׳ שלישים, ומגיעים לו ד׳ זהובים וזהו שאומר דוד המלך ע״ה משפטי ה׳ אמת צדקו יחדיו, הן מה שרואים צדיק ורע לו והן זה שרשע וטוב לו, צודקים הם