על התפתחות תורת ההסתברות

מאת **אביבה אלחנן וניצה מובשוביץ־הדר**

רקע היסטורי כללי

הגורם העיקרי המדרבן את התפתחותן של תורות מתמטיות חדשות הוא בעיות, אשר השיטות המתמטיות הקיימות אינן מספיקות לפתרונן זה היה הרקע גם להתפתחותה של תורת ההסתברות

רק אירועים ספורים בחיי האדם ידועים מראש באורח ודאי אנו יודעים, למשל, שבאחד הימים יגיעו חיינו לקצם ברור לנו שעד אז לא נוכל מן הסתם להתחמק מדאגה למקורות קיום אך להוציא מספר קטן של עניינים מסוג זה, אין כמעט דבר בחיינו שהתרחשותו איננה קשורה במידה מסוימת של מקריות מבנה גופנו נקבע על־ידי צירוף של גנים שקשה לחזותו מראש בחירה של בן או בת זוג בחיינו, או של מקום עבודה, עשויים להיות תוצאה של מקרה תקלה מקרית עלולה להביאנו לבית חולים ניחוש נכון של תוצאות משחקי הכדורגל יכול לשנות את מעמדנו הכלכלי מאחר שאין בידינו אפשרות לשלוט במקריות, נותר לנו רק לנסות ולחשב את מספר האפשרויות שמקרה מסוים אכן יקרה, ולבסס על חישוב זה את ההשערות והעמדות בנוגע אליו

הצורך לאמוד את מספר האפשרויות הטריד את המוח האנושי כבר בתקופות קדומות ביותר, אך רק ממחצית המאה ה־17 ואילך הוכנסו בעיות מסוג זה למסגרת עסוקו של המתמטיקאי המחקרים שהתבצעו בנושא מאז ועד היום הביאו לעיצובו של ענף מתמטי חדש — ההסתברות המתמטית. ענף זה עוסק בחישובם של סיכויים באופן שיטתי מובן מאליו שיש לכך עדיפות על פני שיטת הניחוש האקראי

היסודות הלוגיים־מתמטיים של תורת ההסתברות הונחו רק בשנת 1654, במהלך התכתבות בין שני מתמטיקאים דגולים באסיל פסקאל (Basıl Pascal) ופייר דה־פרמה (Pierre De Fermat), עם זאת, חישובי ההסתברות הם מעשיים ושימושיים מאוד בחיי יום יום (למשל, לצורך היסק סטטיסטי או במשחקי מזל) ולכן היו נהוגים למעשה מאז ומעולם מפקד בני ישראל שיצאו ממצרים, ספרי החשבונות של האימפריה הרומית מתקופת הקיסר אוגוסטוס (31 לפנה"ס–14 אחה"ס), רשימות מלאי הרכוש של ויליאם הכובש (1066–1087 אחה"ס) וספרי מפקד המתים של לונדון, הם דוגמאות אחדות לרשימות נתונים שאפשר לבסס עליהן מחקרים הסתברותיים

גם משחקי המזל ליוו כנראה את האדם משחר ההיסטוריה בחפירות ארכיאולוגיות **במערות האדם הקדמון** גילו את האסטרגלים האסטרגלים הם עצמות הברך של חיות־בית כמו כבשים או עזים, אשר שימשו ומשמשות עד היום כאבני משחק האסטרגל הוא עצם לבנה, רכה ומוארכת הנופלת תמיד על אחד מארבעת צדיה צורת העצם מאפשרת להבדיל באופן ברור בין הצדדים, לכן האסטרגלים הראשונים לא היו מסומנים כלל **במצרים** העתיקה, ב־3500 לפנה"ס לערך, רווח משחק לוח בשם "כלבים ושועלים", שאת מהלכיו הכתיבה זריקת האסטרגלים גם אצל **היוונים** היו משחקי המזל פופולריים ביותר באחד המשחקים נהגו לזרוק ארבעה אסטרגלים וספרו כמה נקודות צבר כל שחקן בזריקה אחת הניקוד נקבע לפי הציורים שהיו על צדיהם השונים של כל אחד מהאסטרגלים במספר מירבי של נקודות היה מזכה ציור פניה של האלה ונוס ציור פניו של כלב נתן מספר מועט ביותר של נקודות (זהו אולי מקור הביטוי "מזל של כלב"..)

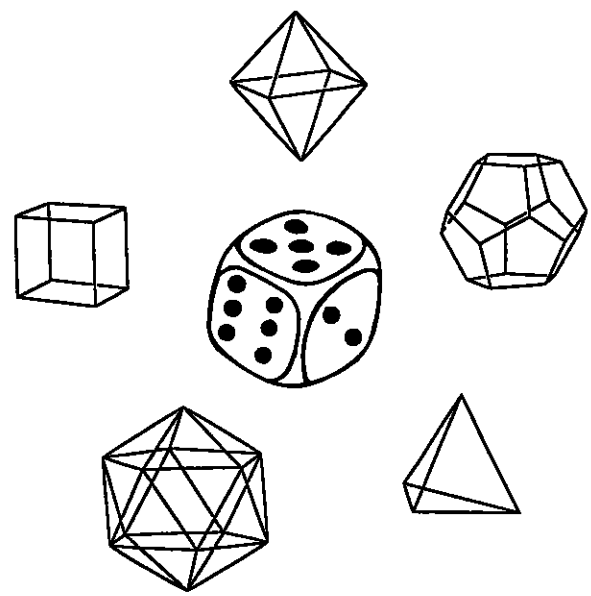
אצל **הבבלים**, ב־1500 לפנה"ס לערך, מוצאים בפעם הראשונה את הקוביה הקוביה היתה עשויה חומר ועל צדדיה היו חרוטות קבוצות של נקודות מ־1 ועד 6 יש להניח שהדבר נעשה מחוסר סימנים מוסכמים למספרים הקוביה הראשונה נוצרה כנראה כתוצאה משיוף שני צדיו הלא שטוחים של אסטרגל משחקי מזל בכלל ומשחקי קוביה בפרט, היו **בתקופת הרומאים** דבר של יום יום לא רק בין העשירים, אלא גם בקרב שכבות אחרות באוכלוסיה מספרים שהקיסר קלאודיוס (10 לפנה"ס–54 אחה"ס) היה מכור למשחק עד כדי כך שהתקין שולחן מיוחד במרכבתו כדי שיוכל לשחק במהלך הנסיעה. יש אומרים שהוא כתב ספר בשם "איך לנצח במשחקי קוביה" אבל הספר לא נשתמר

גם אם משחקי המזל היו מקובלים על הרומאים והיוונים, אצל היהודים הם נאסרו כליל הרבנים השוו אותם לגזילה — שהרי השחקן רוצה לזכות במשהו מתוך שום דבר בשנת 1190, כאשר התחזקה הכנסיה הנוצרית, אסרה גם היא את משחקי הקוביה

מסגרת 1

למה קוביה

שאלה מעניינת היא, למה נבחרה דווקא הקוביה כמכשיר למשחקי־מזל התשובה לכך נעוצה כנראה בצורתה הגיאומטרית המיוחדת של הקוביה הואיל ובדרך־כלל רוצים שהגוף המוטל ייתן סיכויים שווים לכל תוצאה, חייב גוף זה להיות משוכלל גוף משוכלל הוא רב־פאון שכל פאותיו חופפות וכל אחת מהן היא מצולע שווה־צלעות כבר בתקופות קדומות הכירו בקיומם של חמשה גופים משוכללים הארבעון (tetrahedron), העשוי מארבעה משולשים שווי־צלעות, הקוביה (hexahedron) העשויה משש פאות רבועיות, התמנון (octahedron) העשוי משמונה משולשים שווי צלעות, התריסרון (dodecahedron) העשוי משתים־עשרה פאות בצורת מחומש משוכלל, והעשרימון (icosohedron) העשוי מעשרים פאות בצורת משולש שווה־צלעות בהמשך הוכיחו שלא קיימים גופים משוכללים נוספים (Dorrie 1965)



אם מתבוננים בצורתם הגיאומטרית של גופים אלה, ברור שהארבעון והתמנון נופלים כך שקשה לקבוע באופן חד־משמעי איזה מצדיהם הוא העליון משום כך אין הם נוחים למשחקי מזל התריסרון והעשרימון קרובים כל כך לכדור שבכל הטלה יתגלגלו הרחק מעיני השחקנים ולכן גם הם אינם נוחים למשחק נשארת רק הקוביה — הגוף המשוכלל היחיד שצורתו מתאימה למשחקי המזל מחד, אין היא מתגלגלת בקלות, מאידך, עם הטלתה, היא מיוצבת כך שפניה העליונים מוגדרים חד־משמעית

התפתחותן של בעיות בהסתברות עד 1654

אפשר היה להניח שבכל מאות השנים של משחקי הקוביה והמזל תתפתח איזו שהיא תאוריה מתמטית בדבר סבירות הופעתם של מצבים מסוימים, אולם למרבה הפלא, עד תקופה מאוחרת מאוד לא הבחין אף אחד בחוקיות כלשהי במשחקי הקוביה לעובדה זאת מספר הסברים יש הסבורים שהדבר נעוץ באמונת המשחקים שתוצאות המשחק נתונות להחלטת הגורל או האלים, ועל־כן אין טעם לחפש חוקיות במשחק זה אחרים טוענים שחישוב וחיזוי של תוצאות הטלת הקוביה וסבירותן יכולים היו להתפתח רק לאחר שהצליחו לייצר קוביות מאוזנות לחלוטין דיון ראשון בנושא הקוביה מוצאים בספר Liber de Ludo Aleae של G Cardan, בשנת 1550 בערך קרדן נותן הגדרה כללית להסתברות הופעתה של תוצאה אחת מבין תוצאות שונות בעלות סיכויים שווים

מספר האפשרויות לקבלת תוצאה הרצויה
מספר האפשרויות לקבלת תוצאות בכלל

הוא מביא כדוגמה את הקוביה וכותב (בתרגום חופשי)

"מספר האפשרויות השונות לנפילת הקוביה הוא 6 ההנחה היא שהקוביה מאוזנת, ושיש סבירות שווה לנפילתה על כל אחד מהערכים 5, 4, 3, 2, 1 או 6, שאותם ניתן לקבל בדרך אחת בלבד משום כך ההסתברות לקבל כל מספר בזריקה אחת היא 1/6"

אחד הנסיונות הראשונים להתייחס לבעיה הסתברותית כאל נושא מתמטי נעשה בשנת 1494 על־ידי המתמטיקאי Luca Pucioli, בספרו Summa de Aritmetica, Geometrica, Proportioni et Proportionalita הבעיה המתוארת בספר היא זו

שתי קבוצות משחקות האחת נגד השניה כדי לנצח במשחק צריכה כל קבוצה לצבור לפחות 60 נקודות ההימור במשחק הוא על 22 דוקאט אם מסיבה כלשהי הופסק המשחק במצב שבו לצד א 50 נקודות ולצד ב' 30 נקודות, איזה חלק מסכום ההתערבות מגיע לכל צדי

בעיה זו נקראת **בעית הניקוד**

המחבר פתר את השאלה לפי מספר הנקודות שכבר הושגו — כלומר, במקרה שבדוגמה, ביחס של 3 5 פתרון זה איננו צודק לדוגמא, אם ייפסק המשחק במצב שבו לקבוצה א' שתי נקודות ולקבוצה ב' נקודה, תקבל קבוצה א' כפליים מקבוצה ב' — גם אם סיכוייה לנצח אינם שונים בהרבה מסיכויי הקבוצה השנייה

אצל הבבלים מוצעים קוביות ראשונות

מבעית הניקוד אל יסודות ההסתברות המתמטית

בעית הניקוד נשארה פתוחה עד 1654 בשנה זו פתרו אותה תוך כדי ההתכתבות ביניהם פסקאל ופרמה, והניחו בכך את היסוד לתורת ההסתברות בת־זמננו

בעית הניקוד הוצגה לפני פסקאל ב־1654 על־ידי אציל צרפתי בשם Antoine Gombaud, Chevalier De Méré (1607–1684) הלה היה מהמר מקצועי, ורצה לחשב את סיכויי הניצחון במשחק הקוביה דה־מר לא היה מתמטיקאי, אך הבין שבתנאי־פתיחה למשחקי מזל רצוי סיכוי של 50% לפחות לזכייה הוא התקשה בחישוב הסיכויים, אשר לא תאמו את נסיונו המעשי כמהמר ננסה להבין את הבעיה

כשיש לשחקן סיכוי של 100% לניצחון, **ההסתברות** שינצח היא 1 לפיכך, כשהסיכוי לנצח הוא 50%, ההסתברות היא 1/2 נחשוב לדוגמה, על משחק הטלת מטבע כיון שקיימות רק שתי אפשרויות — "עץ" או "פלי" — ואפשר לקבל כל אחת מהן רק בדרך אחת, אזי ההסתברות לכל אפשרות היא 1/2 (אגב, הביטוי "עץ או פלי" נוצר כנראה בימי המנדט הבריטי, אז נשאו המטבעות מצד אחד ציור של עץ ומן הצד השני את השם "פלשתיין")

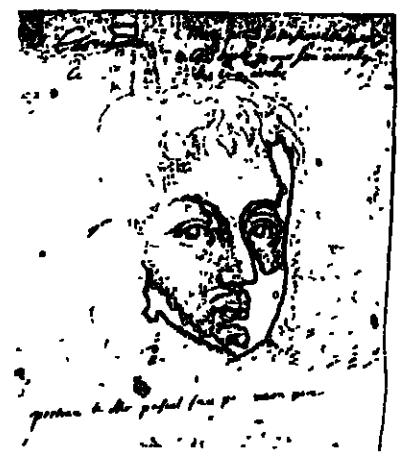
דה־מר עובר למשחק הקוביה ואומר

א לדברי קרדן, ההסתברות לקבל 6 בכל הטלה של קוביה אחת היא 1/6, מכאן שההסתברות לא לקבל 6 היא 5/6 = 1/6 1, כלומר, ההסתברות להפסיד היא 5/6 ואילו ההסתברות לנצח היא 1/6 = 5/6 1 .

ב כדי לנצח צריכים לקבל 6 לפחות פעם אחת ההסתברות **לא** לקבל 6 בהטלה הראשונה היא 5/6 ההסתברות לא לקבל 6 בהטלה שניה היא שוב 5/6, וכך הלאה כלומר, עבור כל אחת מ־5 האפשרויות להפסיד בהטלה הראשונה, יש עוד 5 מתוך 6 אפשרויות הפסד בהטלה השניה לכן ההסתברות להפסיד היא $(5/6)^2 = 5/6 \quad 5/6$ כיוון שההסתברות לנצח היא ההפרש בין ההסתברות לניצחון ודאי — 1, לבין ההסתברות להפסיד, הרי במקרה זה ההסתברות לנצח היא $1 - (5/6)^2$

ג כמה הטלות קוביה נדרשות כדי שההסתברות לנצח תהיה לפחות 1/2 או, בשפה מתמטית, עבור איזה n ההסתברות

מסגרת 2: באסיל פסקאל



באסיל פסקאל (Basil Pascal) נולד בשנת 1623 בצרפת הוא היה אדם חולני מאוד, ומת צעיר יחסית, בגיל 39 למרות זאת, השאיר אחריו עבודות מבריקות רבות בתחומים שונים בגיל 16 כתב פסקאל את משפט המשושה והוכיח אותו באופן כללי כך התקבל לקבוצת האקדמיה של האב M Mersenn

בשנים 1639–1641 עבד על בניית מכשיר מכני לביצוע פעולות חיבור וכפל, ככלי־עזר לאביו שעבד כמנהל חשבונות בשנים 1651–1654 עיין בתאוריה פיזיקלית של לחץ גזים ונוזלים באותן שנים עבד גם על פיתוח תכונותיו של משולש של מספרים הנקרא היום על שמו על סמך העקרונות של משולש פסקאל פתר את בעיית הניקוד, ובכך הניח את אבן־הפינה להתפתחות תורת ההסתברות באותה עת שפטה הכנסיה אחד מחבריו באשמת היותו אתאיסט בעקבות זאת כתב פסקאל ופירסם שמונה־עשר מאמרים סאטיריים על הכנסיה הקתולית (1655–1658) אלה נקראים "Provincial Letters", היות שחוברו כמכתבים לחבר החי בפרובינציה מאמרים אלה נחשבים עד היום לקלסיקה בספרות הצרפתית ב־1658, בצעד חסר תקדים, פירסם פסקאל התנצלות לפני הכנסיה והפך דתי אדוק במשך שנותיו האחרונות כתב רק עוד עבודה אחת, הדנה בנושא הציקלואידה הוא נפטר ב־1662

משגרת 3: פייר דה־פרמה

פייר דה פרמה (Piere de Fermat 1601–1665) היה עורך דין במקצועו ובמשך שנים רבות שימש כנציג המלך בפרלמנט של עיר מגוריו, טולוז שבצרפת את זמנו הפנוי הקדיש למתמטיקה, והיה כנראה החובב האחרון בין גדולי המתמטיקאים הוא פרסם מעט מאוד, אך התכתב עם מתמטיקאים שונים ותרומתו להתפתחותה של המתמטיקה זיכתה אותו בכינוי, "גדול הצרפתים במאה ה־17" חישגו הגדול של פרמה היה בתורת המספרים, שאותה העיר מהשיכחה הוא תרם גם להתפתחותן של הגיאומטריה האנליטית, החשבון הדיפרנציאלי וההסתברות פרמה היה מעורב כמעט בכל תחומי המחקר המתמטי של תקופתו

לנצח גדולה או שווה ל־1/2ו ובשפה אלגברית, השאלה היא עבור איזה ערך של n מתקיימת המשוואה

$$1 - (5/6)^n \geq 1/2$$

עבור n = 4, למשל, מתקיים

$$1 - (5/6)^4 = 1 - 625/1296 = 671/1296 > 1/2$$

ד במשחק בקוביה אחת מספר המקרים האפשריים שלהם סיכויי הופעה שווים הוא 6 כאמור, במשחק שבו מספר ההטלות הוא 4, ההסתברות לקבל אחת מהן ולנצח גדולה מ־1/2 היחס בין מספר הנסיונות (4), לבין מספר התוצאות האפשריות (6), הוא 2 3 תוצאות אלו היו הבסיס לחישוב של דה־מר להסתברות במשחק של שתי קוביות

ה במשחק קוביה רגיל מטילים שתי קוביות בו־זמנית ויש חשיבות לסדר התוצאות לדוגמה, התוצאה (1,2) שונה מהתוצאה (2,1), אם כי סכום הנקודות בתוצאות אלה שווה מספר הצירופים האפשריים של תוצאות ההטלה הבו־זמנית הוא 36 דה־מר חישב שכדי לשמור על יחס של 2 3 בין מספר האפשרויות לבין מספר ההטלות שעבורן יש הסתברות של 1/2 לפחות לניצחון, יש צורך ב־24 הטלות, כי 2 3 = 36 24

אולם דה־מר ידע מנסיונו הרב שכדי שהסתברות־הניצחון תהיה גדולה מ־1/2 או שווה 1/2, דרושות לפחות 25 הטלות מכאן הגיע למסקנה מרחיקת לכת ביותר "אין קשר בין ההגיון המתמטי לבין המציאות" עם מסקנה זו פנה דה־מר לפסקאל

פסקאל גילה מיד את הטעות בשיקוליו של דה־מר

א יש 36 צירופים אפשריים שונים לתוצאות ההטלה רק תוצאה אחת, (6,6), מאפשרת ניצחון

ב מכאן שמספר האפשרויות להפסיד בהטלה אחת של שתי קוביות הוא 35, וההסתברות להפסד היא 35/36 לכן ההסתברות לניצחון היא 35/36 - 1

ג כדי למצוא את מספר ההטלות n הדרושות להסתברות של 1/2 לפחות לניצחון נחשב $(35/36)^n > 1/2$ 1

עבור $n = 24$ $(35/36)^{24} = 0\ 4914 < 0\ 5$ 1

ואילו עבור $n = 25$ $(35/36)^{25} = 0\ 5055 > 0\ 5$ 1

תוצאות אלה תואמות את התוצאה האמפירית של דה־מר, האומרת שכדי שהסתברות הניצחון במשחק זה תהיה 1/2 לפחות, נדרשות 25 הטלות או יותר

שאלתו של דה־מר הפנתה את תשומת ליבו של פסקאל לבעיית הניקוד הכללית הוא החל לעיין בה והציגה גם לידידו פרמה שני המתמטיקאים התחילו לעבוד על הבעיה כדי להקל על עצמם, טיפלו תחילה במקרה פרטי, שנוסח באופן הבא

משחק מזל בין שני שחקנים A ו־B (בעלי כישורים זהים) הופסק במצב ביניים, שבו צריך A עוד 2 נקודות כדי לנצח, ו־B צריך עוד 3 נקודות לשם כך באיזה יחס יש לחלק ביניהם את סכום הכסף שבקופה?

כל אחד מהם פתר את הבעיה בדרך אחרת, אך שתי הדרכים התבססו למעשה על אותו עיקרון

פתרונו של פרמה

הנה טיעונו של פרמה

1 נניח שהמשחק מורכב מכמה משחקונים בלי אפשרות תיקו כלומר, תיתכן רק אחת משתי האפשרויות A מנצח ומקבל

ספירת בני ישראל שיצאו ממצרים

נקודה או B מנצח ומקבל נקודה במקרה הנדון, שבו זקוק A לעוד 2 נקודות כדי לנצח, ו־B לעוד שלוש, יוכרע המשחק כולו בארבעה משחקונים נוספים **מדוע בארבעה?** ובכן, אם במהלך ארבעה משחקונים נוספים מצליח B לצבור שלושה נצחונות או יותר, אזי A לא יצליח לצבור עוד שני נצחונות ולגבור עליו במצב זה, הניצחון הסופי הוא של B לעומת זאת, אם במהלך משחקונים אלה מצליח A לצבור עוד שני נצחונות או יותר, אזי הוא המנצח במשחק, שכן B לא יוכל לצבור עוד שלושה נצחונות

2 נסמן ב a כל ניצחון של A במשחקון אחד ונסמן ב b כל ניצחון של B במשחקון אחד כיוון שלא יתכן תיקו, בכל משחקון אפשריות רק שתי תוצאות a או b במשחק כולו נותרו לכל היותר ארבעה משחקונים על־כן, מספר התוצאות האפשריות בו יהיה $2^4 = 16$ את כל התוצאות האפשריות בארבעה משחקונים אלה ניתן להציג בטבלה

aaaa	aaab	abba	babb
baaa	baba	abab	bbab
abaa	bbaa	aabb	bbba
aaba	baab	abbb	bbbb

3 B מנצח בחמשת המקרים שבהם מופיע b שלוש פעמים או יותר מתוך ארבע A מנצח באחד־עשר המקרים שבהם מופיע a פעמיים או יותר **יחס הסיכויים לנצח בין A לבין B הוא 11:5.** זה היחס שבו יש לחלק את הקופה אם הופסק המשחק בתנאים האמורים

בהמשך נתן פרמה **אלגוריתם כללי לפתרון בעיית הניקוד.**

הבעיה איך יש לחלק את הקופה במשחק מזל בין שני שחקנים A ו־B (בעלי כישורים זהים), אם הופסק המשחק במצב ביניים שבו A צריך עוד m נקודות כדי לנצח, ו־B צריך לשם כך עוד k נקודותי

והנה פתרונו של פרמה

1 אם המשחק מורכב ממשחקונים, שבכל אחד מהם מנצח אחד המשתתפים וזוכה בנקודה, אז אם A זקוק לעוד m נקודות ו־B לעוד k, יכול המשחק להימשך ללא הכרעה עוד $(m - 1) + (k - 1)$ משחקונים לכל היותר

2 נבנה טבלה של כל התוצאות האפשריות במשחק המורכב מ־ $m + k - 1$ משחקונים הטבלה תכיל, אם כן, 2^{m+k-1} מקרים

3. אחרי שבנינו את הטבלה נספור
   — בכמה מקרים מופיע a לפחות m פעמים, נסמן את המספר ב־α
   — בכמה מקרים מופיע b לפחות k פעמים, נסמן את המספר ב־β

   כיוון שלא יתכן תיקו, מתקיים $2^{m+k-1} = \alpha + \beta$
   יחס החלוקה יהיה α β.

פתרונו של פסקאל

פסקאל התייחס תחילה לבעיה הכללית, כפי שנוסחה כאן הוא ראה שסכום כל האיברים בשורה n של משולש פסקאל הוא 2^n מספר התוצאות השונות במשחק שהופסק לפני סיומו, אשר בו ינצח A אם יצבור עוד m נקודות ו־B — אם יצבור עוד k נקודות, הוא 2^n, כאשר $n = m + k - 1$ לפיכך מייצגת השורה n במשולש פסקאל את כל האפשרויות במשחק שהופסק.

הדוגמה הפרטית שבה A צריך עוד 2 נקודות כדי לנצח ו־B צריך עוד 3, מיוצגת בשורה הרביעית של משולש פסקאל, שהיא 1,4,6,4,1 איברי הסדרה מבטאים את מספר הסדרות באורך 4 שבהן מופיעה האות a (המסמלת את ניצחונו של A במשחקון בודד) 3,2,1,0 או 4 פעמים בהתאמה

A ינצח ב־11 מתוך 16 המקרים האפשריים, ואילו B ינצח בחמשת המקרים הנותרים, שכן סכום שלושת האיברים הראשונים של שורה 4 במשולש פסקל (6 + 4 + 1) הוא 11, ואילו סכום שני האיברים הנותרים (1 + 4) הוא 5 על־כן יחס סיכויי הניצחון במשחק כולו בין A ל־B יהיה 11 5

משחקי הקלפים הגיעו לאירופה דרך מסעי הצלב

פסקאל הכליל תוצאה זו למצב שבו צריך A עוד m נקודות ו־B — עוד k כדי לנצח.

1 נתבונן בשורה $m + k - 1$ של משולש פסקאל.
מספר התוצאות השונות במשחק שאורכו $m + k - 1$ הוא $2^{m+k-1} = \alpha + \beta$ והוא שווה לסכום כל איברי השורה $m + k - 1$ במשולש פסקאל

2 אם נניח ש־$m > k$, אז סכום $m + 1$ האיברים הראשונים בשורה ייצג את סיכוייו של A לניצחון הכללי (סכום זה יסומן ב־α) וסכום $k - 1$ האיברים האחרונים בשורה ייצג את סיכוייו של B לניצחון (שיסומן ב־β) **יחס הסיכויים לניצחון יהיה** α β

יש לשים לב לכך שהיחס בין סיכויי הניצחון של שני השחקנים A ו־B זהה ליחס שקיבל פרמה בדרכו

המשך ההתפתחות של תורת ההסתברות

המתמטיקאי Cristian Huygins (1629-1695) התוודע בשנת 1655 לעבודותיהם של פסקאל ופרמה לאור העקרונות שפיתחו השניים כתב היגינס את ספרו On Reasoning in Games of Chance (1657) היה זה הספר הראשון על תורת ההסתברות המבוסס על עקרונות מתמטיים

בשנת 1662 כתב איש עסקים לונדוני, John Grant, ספר סטטיסטי, ובו טבלה המסכמת את המידע מתוך רשימת מפקד המתים של לונדון הטבלה מראה באחוזים את מספרם הממוצע של אנשים השורדים בגילים שונים

מספר הנשארים בחיים	גיל
100	0
64	6
40	16
25	26
16	36
10	46
6	56
3	66
1	76

היגינס השתמש בטבלה זו כדי לשרטט את עקומת הסיכויים שלו ושל אחיו לשרוד עד גיל מסוים זה היה הגרף הראשון בתורת ההסתברות

בשנים שלאחר מכן, מתמטיקאים רבים, וביניהם Abraham de Moivre (1667-1754) Daniel Bernoulli (1700-1882), Leonard Euler (1707-1783) Joseph Louis Lagrange (1736-1813) עסקו בפיתוח התורה כל אלה, ואף רבים אחרים, הפכו את ההסתברות לתורה מתמטית עשירה ובעלת יישומים חשובים

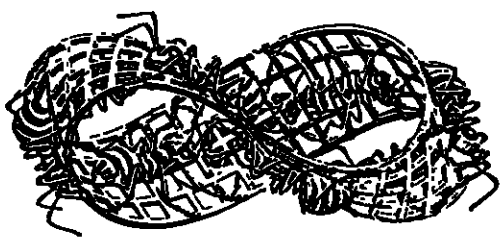
רשימת ספרות

Burton, D M (1985) **The History of Mathematics, an Introduction.** The Development of Probability Theory. Pascal, Bernoulli, and Laplace (Capter 9) Allyn and Bacon

Dorrie, H (1965)· **100 Great Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solution** Dover Publications, pp. 295-301

Eves, H (1983)· **Great Moments in Mathematics (after 1650)**, Lecture 21· Order Within Disorder. Dolciani Mathematical Exppositions No 7 The. Mathematical Association of America

ד ברגמיני, **הספרייה המדעית של לייף: מתמטיקה.** תרגם לעברית ד"ר עמוס כרמל הוצאת ספריית מעריב וטיים לייף אינטרנשיונל (הולנד) סידרת טיים־לייף בעברית, 1969



חישוב הסתברותי במשנה[1]

מאת **אלכס קליין**, אוניברסיטת בר־אילן

קבלת החלטה במקום ספק

בלי להגיע להגדרות פורמליות — או אפילו למושגים מוגדרים בצורה מתמטית — של תורת ההסתברות המודרנית, השתמשו חז"ל באותם רעיונות הקיימים תחת הלבוש המתמטי לפתרון בעיות שונות כמו כן השתמשו בהן לקבלת החלטות סבירות ומתחייבות על־פי חוקי ההיגיון כך, למשל, במקרה שבו קיים ספק בנוגע למציאות היכולה להיות A או B, כאשר לכל אחת מהאפשרויות הסתברות מסויימת, והפעולה הנדרשת תלויה במציאות של A או של B בכוונתי להציג דוגמא אחת שבה הגיעו חז"ל למסקנה המתחייבת מחישוב הסתברותי פשוט היתרון הבלעדי של תורת ההסתברות הפורמלית נטמן כאן ביכולת התיאורטית לקבוע קריטריון מדויק וחד־משמעי תחת השערות מסויימות

המחלוקת בין ר' טרפון לבין ר' עקיבא בעניין מעילה

בויקרא ה', ט"ו, מובא דינו של מועל "נפש כי תמעל מעל וחטאה בשגגה מקדשי ה' והביא את אשמו לה' איל תמים מן הצאן בערכך כסף שקלים בשקל הקדש לאשם ואת אשר חטא מן הקדש ישלם ואת חמישיתו יוסף עליו ונתן אותו לכהן והכהן יכפר עליו באיל האשם ונסלח לו" זאת אומרת הנהנה מחפץ השייך להקדש חייב להביא קרבן אשם, שהוא איל, ועליו לשלם סכום כסף השווה לערך מעילתו בתוספת של חומש

במקרה של ספק מעילה, זאת אומרת אם יש ספק, באם אמנם מעל אם לאו, אינו חייב אלא להביא קרבן אשם תלוי אבל אם אחר כך התברר בוודאות שהוא אמנם מעל, אזי הוא חוזר

1) מתוך הספר "הגיון" בעריכת עלי מרצבך ומשה קופל, הוצאת אלומה, ירושלים, 1989

לדין הרגיל של מעילה, ועליו להביא קרבן אשם נוסף, בהיותו אשם בוודאות, ולשלם את ערך מעילתו בתוספת של חומש

ונשאלת השאלה למי שספק מעל, מה כדאי לו לעשות מבחינה כלכליתי אם הוא מביא אשם תלוי, ובזה הוא חושב לחסוך את ערך המעילה, קיים החשש שיתברר אח"כ שהוא אמנם מעל בוודאות, ואז יוצא שהוציא אשם תלוי בחינם מאידך, אין בטחון שיתברר שאמנם מעל בוודאות, ואז כדאי לו אולי להסתכן

ובמסכת כריתות (פרק ה' משנה ב') יש מחלוקת בנדון בין ר' עקיבא ור' טרפון ר' טרפון גורס שכדאי, במקרה של ספק, להביא מיד קרבן אשם ולשלם ערך מעילתו, ועל המועל להתנות "אם ספק מעלתי, הקרבן הזה הוא אשם תלוי והמעילה מתנה להקדש, ואם יתברר אח"כ שוודאי מעלתי, הקרבן הוא אשם ודאי, והמעילה מעילה" ובכן, לפי ר' טרפון, הוא חוסך אשם אחד במקרה שיתברר אח"כ שאמנם מעל בוודאות

ר' עקיבא סובר בצדק שלא תמיד כדאי להתנהג בצורה זו "נראים דבריך במעילה מועטת" אם ערך המעילה נמוך ביחס לערך האשם, הדבר כדאי לו — אבל "הרי שבא על ידו ספק מעילה במאה מנה לא יפה לו שיביא אשם בשתי סלעים ואף יביא ספק מעילה במאה מנה" אם ערך המעילה גבוה, כדאי לו יותר להביא אשם תלוי בהתחלה כך קיימת אפשרות שאף פעם לא יתברר הספק, ולא יצטרך בסופו של דבר לשלם את ערך מעילתו המשנה מסכמת "הא מודה ר' עקיבא לר' טרפון במעילה מועטת"

מושג התוחלת

בתורת ההסתברות, התוחלת של ניסוי מקרי מסוים היא הממוצע שהיה מתקבל לו היו חוזרים על אותו ניסוי מספר גדול מאוד של פעמים למשל, אם היו משחקים את המשחק הבא מטילים קוביה פעם אחת אם מקבלים 6 זוכים בפרס של 60 ש"ח, אחרת גובה הפרס הוא 6 שקלים בלבד כדי לחשב את תוחלת הפרס, מחברים את הערכים השונים של גובה הפרס, כשכל ערך משוקלל ע"י ההסתברות לקבלו ואז נקבל בדוגמא הנ"ל

$$E(X) = 60 \quad 1/6 + 6 \quad 5/6 = 15$$

או, באופן כללי יותר, אם קיימות שתי אפשרויות בלבד X1 ו־X2, כל אחת בהסתברות P1 ו־P2, בהתאמה

$$E(X) = X1 \quad PI + X2 \cdot P2$$

לפי הדוגמא הנ"ל, ברור שהזוכה לעולם לא יקבל חמשה־עשר שקל בדיוק, כאשר התוחלת אינה למעשה אלא גובה ממוצע של כל זכיות המשחקים במשחק זה מאידך, משתמשים בנתון זה כדי לאמוד את "ערך" המשחק, לדעת אם כדאי לשחק בו, או לחשב עד איזה סכום כדאי לשלם כדי להשתתף בו

במקרה שלנו מתאים השימוש בתוחלת קיימות שתי אפשרויות שהספק יהפוך לוודאות או שלא יהפוך לוודאות כל אחד משני המקרים כרוך בהוצאה מסויימת, ובהתאם אפשר לחשב את תוחלת העלות

חישוב תוחלת ההוצאה

נגדיר

a — מחיר האשם p — הסתברות שהספק יהפוך לוודאי

m — ערך המעילה X — סך כל הסכום שעל המועל לשלם

במקרה שהמועל מחליט שלא לשלם על המעילה כל עוד קיים הספק, יהיה X שווה ל־a בהסתברות 1 - p, ול־ 2a+6m/5 בהסתברות p (a לפני שהתברר הספק, ו־ a+6m/5 אחרי) ומכאן נוכל לחשב את התוחלת

$$E(X) = a(1 - p) + (2a + 6m/5)p$$
$$E(X) = a - ap + 2ap + 6mp/5$$
$$E(X) = a + ap + 6mp/5$$

חישוב התנאי על ערך המעילה

לפי רבי טרפון, כדאי לשלם בכל מקרה a+6m/5 מיד, ור' עקיבא מסכים איתו לגבי m שערכו קטן לפי מה שהסברנו, כדאי יהיה לשלם מיד a+6m/5 במקרה שסכום זה נמוך מ־E(X), זאת אומרת, $a + 6m/5 < E(X)$ ואנחנו יכולים כעת לחשב את הערך הגבולי של m (ערך המעילה) שכן כדאי יהיה לשלם מיד

$$a+6m/5 < a + ap + 6m/5$$
$$6m/5 < ap+6mp/5$$
$$6m/5(1 - p) < ap$$
$$m < 5ap/6(1 - p)$$

אפשר להעריך בקלות את a (ערך האשם) ואת m (ערך המעילה) הרבה יותר קשה הוא לאמוד את p (ההסתברות שהספק יהפוך לוודאי) כאשר אין בסיס במציאות לחישובו המדויק המועל עצמו אולי, המכיר היטב את הסיבות למעילתו, יוכל להגיע לערך שאפשר יהיה להסתמך עליו, כך שיוכל לקבל החלטה אופטימלית מבחינה כלכלית

אם נתונים a ו־m נחשב איזה תנאי צריך לקיים p כך שכדאי יהיה לשלם מיד

$$6(1 - p)m < 5ap$$
$$6m - 6pm < 5ap$$
$$6m < p(5a + 6m)$$

ולכן

$$p < 6m/(5a + 6m)$$

לשם המחשת הדבר, אם למשל a=m, אזי כדי שיהיה כדאי לשלם מיד את המעילה במלואה צריך p להיות גדול מ־6/11 אם m גדול יותר, נניח למשל 2a, נוכל להסתפק ב־p השווה ל־12/17

סיכום

חז"ל לא הגיעו לאי־שיוויונים אלה אך הם הגיעו למעשה לאותה תוצאה על סמך היגיון פשוט, ומסקנתם מתאימה למסקנה המתחייבת מחישובים הסתברותיים מכאן שאין שום סתירה בין שני השטחים הנ"ל ולהיפך, התחום ההלכתי יכול להסתמך על התחום המתמטי במסגרת מאמר קצר זה לא דיברנו על תורת הספקות של חז"ל, שהרבה יותר קשה להתאימה לתורת ההסתברות, והיא כנראה מסתמכת על בסיס שונה לחלוטין