ספרים

בין אינטואיציה למתמטיקה

מאת **עופר ליבה**, ביה"ס התיכון אורט רמות ע"ש גדיש, ירושלים

ספרו של פרופסור אפרים פישביין מאוניברסיטת תל־אביב Intuition in Science and Mathematics[1] מהווה מזיגה נדירה בין ראיה תיאורטית של התופעה הנקראת אינטואיציה, אירגון הממצאים המחקריים, והשלכות מעשיות למישור החינוכי־דידאקטי

המושג **אינטואיציה** מובן לרובנו (בדרך כלל הוא מובן אינטואיטיבית!) ונסיון "לפרק אותו לגורמים" ולהגדירו בצורה מדוייקת ובהירה אינו דבר קל **אינטואיציה מבטאת צורך עמוק של התנהגותנו השכלית.** בכל תהליך חשיבה מורכב, בין שיהיה שיטתי ובין שיהיה רצוף ניחושים ותיקונים, אנו מסתמכים על רעיונות "בטוחים" כלשהם (הרי איננו יכולים להטיל ספק **בכל דבר**), ואלה מהווים "דבק" בשרשרת החשיבה הגיע הזמן שנתייחס לאינטואיציה כאל מרכיב מרכזי בהווייתנו הקוגניטיבית

הכמיהה לוודאות

לא נוכל להצביע על משמעות אחידה למושג בהקשרים מסויימים אינטואיציה מהווה מקור, מעיין (ממשי או מדומה) לידע כך רואים זאת דקארט (R Descartes) ושפינוזה (B Spinoza) עבורם התופעות הנצפות בעולמנו הן אוסף של אשליות לדעת אחרים כמו ברגסון (H. Bergson) מדובר בשיטה, באיסטרטגיה שכלית, המביאה אותנו למהות, לשכבת הבסיס של החיים ושל התופעות עבור פיאז'ה (J Piaget), אינטואיציה היא סוג של קוגניציה ראשונית שאינה דורשת הסברים, כגון תפיסת המרחב והזמן בין כל הפרשנויות מקשר הצורך הנצחי של האדם לוודאות, החיפוש אחר האמת המוחלטת, הרצון **לראות עם שכלנו** כמו שאנו רואים עם עינינו

אף אם נשמע הדבר פרדוקסאלי, דווקא המירוץ אחר הפורמליזציה של המדע בכלל ושל המתמטיקה בפרט הביא להבנתם ולשכלולם של המנגנונים האינטואיטיביים בתהליכי ההבנה, התרת בעיות, היצירה והגילוי וכמו שהאינטואיציה עזרה וקידמה, היא גם הפריעה לא מעט הגילויים על הגיאומטריות הלא־אוקלידיות, על האינסופים "בפועל" (actual infinities) ורעיונות דומים הצביעו על־כך שהמובן מאליו אינו מושג נרדף לוודאות. איך יתכן שפונקציה תהיה רציפה בכל נקודה ואי־גזירה באף נקודה? איך ניתן להבין **אינטואיטיבית** את השקילות בין קבוצת המספרים הטבעיים לבין קבוצת המספרים הזוגיים, או גרוע מכך, לקבוצת המספרים הרציונליים? הרי עד קאנטור (G Cantor) היה מובן מאליו שהשלם גדול מכל אחד מחלקיו ואיך ניתן להבין (שוב, אינטואיטיבית) $a^0 = 1$? אם כן, עם כל הברכה והתועלת שהאינטואיציה מספקת לנו, היא יכולה גם להטעות, ולכן צריך גם להזהר ממנה

העולם המתמטי

המתמטיקה עוסקת במושאים אידיאליים (במובן מן השכל), ובפעולות אידיאליות, אשר מובנן נקבע באופן מדוייק על־ידי הגדרות וכללים פורמליים במלים אחרות, **עצם קיומם** של "הדברים" המתמטיים נקבע על־ידי אקסיומות, הגדרות, כללים לוגיים וכיוצא באלה התוצרת המתמטית היא פרי הפיתוחים הדדוקטיביים וההוכחות הפורמאליות זהו עולם מיוחד, שונה לחלוטין מזה של העצמים והמאורעות הממשיים, עולם שכולו תוצרות מנטליות, אשר כפופות לחוקי תורת ההגיון

האם ניתן להסיק שהמתמטיקה היא אוטונומית לחלוטין, בתור עולם של מהויות פורמליות? התשובה היא שלילית בשני מובנים: במובן אחד, פורמאלי דווקא, כתוצאה ממשפט אי־השלמות של גדל (K Godel) במובן השני, הפסיכולוגי, אשר יותר מעניין אותנו כאן יש כיום ראיות מצטברות למכביר, **ששום יצירה מתמטית אינה אפשרית תוך שימוש באמצעים פורמליים בלבד.** כדי לפתור בעיה וליצור משפטים, יש צורך ביותר מאשר ידע פורמלי (הגדרות, משפטים וכו') על הנושא אפילו הילברט (D Hilbert), אבי הפורמליזם והשיטה האקסיומטית התבטא פעם באלה המלים "מי לא מדמיין, יחד עם אי־השוויון $a < b < c$, שלוש נקודות על אותו ישר הממחישות היטב את הבין לבין?"

[1] Fischbein, Efraim **Intuition in Science and Mathematics.** Reidel, 1987

אינטואיציה ישנה ואינטואיציה חדשה

מבין הפרשיות המתמטיות המפורסמות אשר הביאו לקונפליקט קשה בין אינטואיציות סותרות ואף ל"מהומות" בקהילה המתמטית, בולטת תגליתו של קאנטור (G. Cantor) על העוצמות האינסופיות במכתבים שכתב לידידו דדקינד (R. Dedekind) מתבטא קאנטור בדרמטיות ואף בפתטיות לגבי הספקות שלו עצמו והנסיונות המכאיבים שלו ליישב בין האינטואיציות לבין ההשלכות הלוגיות של ממצאיו. דוגמא בולטת היא השקילות בין קבוצת המספרים הממשיים (הישר) לבין קבוצת הזוגות של המספרים (המישור) הרי "ברור אינטואיטיבית" שזה לא יתכן, ובכל זאת "אני רואה זאת, אך אינני מאמין" כותב קאנטור לדדקינד.

קנטור נלכד בין שתי אינטואיציות שאינן מתיישבות אחת עם השנייה, והדבר לא נתן לו מנוח. הוא ממשיך וכותב לידידו "לא אוכל למצוא את שלוות נפשי עד אשר אקבל ממך אישור באשר לנכונות ממצאיי"

מול מבוכת התלמיד

בתהליך החינוכי־לימודי, על המורה להעמיד מחדש המשגות מוטעות של התלמיד ובמתמטיקה אין זה קל. הרי אין מדובר בתיקון עובדות, כגון "לימה אינה בירתה של קולומביה אלא של פרו". אנו דנים כאן בהריסה ובבנייה מחדש של מבנים קוגניטיביים מגובשים ומושרשים. מה קורה כשהתלמיד נדרש להתרגל לכך שכפל יכול גם "להקטין", או שהוא חי על כדור ענק שמסתובב מהר מאוד! עליו לוותר על מספר רב של אמונות בסיסיות שיש לו על המציאות, אותן עובדות שהיה משוכנע באמיתותן, אינן עובדות כלל. זהו עול אינטלקטואלי ורגשי לא קטן עבור התלמיד, והתוצאה עלולה אף להיות שיבוש תהליכי החשיבה שלו, מאחר שלא יוכל להסתמך יותר על אינטואיציות "בריאות".

כדי לפתור חלקית את מבוכת התלמיד, פישביין ממליץ למחנך להציג בפניו את הדוגמאות מההיסטוריה של המתמטיקה וכן להדגיש ולשוב ולהדגיש **שמדובר בהתנהגות שכלית נורמלית לחלוטין**, ושתמיד כדאי **להשאיר צוהר קטן לספק**, אפילו אם אנו משוכנעים במאת האחוזים שאנו צודקים.

המספרים הלא־אינטואיטיביים

במשך מאות בשנים היו המספרים השליליים מוקצים מחמת מיאוס. לכאורה, המושג של מספר שלילי נוגד את מושג המספר עצמו. ישנם שני מחסומים אינטואיטיביים בנוגע להבנת המספרים השליליים:

א מספר מייצג עבורנו כמות, "יותר מכלום". משום כך, למספר שלילי אין שום משמעות מעשית. יותר מזה **אין שום צורך מעשי במספרים שליליים**. אנו יכולים לתאר כל תופעה באמצעות המספרים הלא־מכוונים. אומנם אנו אומרים לפעמים "יש לי ‎-2000 ש"ח בבנק" אך ניתן גם לאמר: "אני בחוב של 2000 ש"ח". המספרים השליליים הם המצאה מתמטית הנובעת מאילוצים פנימיים, משיקולי הרחבה ועקביות, ואינם מייצגים תופעות קיימות. יש לשים לב שלמספרים השליליים ניתנה "לגיטימציה" רק במאה ה־19, לאחר מאות שנים של ויכוחים.

ב. הרחבת הפעולות למספרים השליליים מעלה קושי נוסף לדוגמא, כל עוד אנו מכפילים מספר חיובי בשלילי, נוכל להתייחס לכפל כאל פעולת חיבור חוזרת:

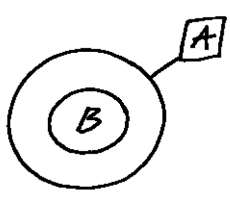
$$(-2) \cdot (+3) = (-2) + (-2) + (-2) = (-6)$$

אך כפל מספר שלילי במספר שלילי אינו יכול לקבל את המובן הזה. יש צורך לקבוע הסכמים חדשים וכל העניין נעשה קשה מאוד לעיכול אינטואיטיבי

לאור זאת טוען פרוידנטל (H. Freudenthal) שצריך להציג את המספרים השליליים בפני התלמיד באופן פורמאלי מן ההתחלה, כי זאת ההזדמנות הראשונה עבור הלומד לעשות היכרות עם מושגים מתמטיים מנקודת ראות פורמאלית־דדוקטיבית.

דיאגרמה ואינטואיציה

דיאגרמה היא מודל גראפי מקובל מאוד להמחשת מושגים ויחסים, והיא בדרך כלל כלי טוב בשירות האינטואיציה. נתייחס לדוגמא לדיאגרמות ון ולאופן השימוש בהן. יחסים כמו הכלה ושוויון, פעולות כמו איחוד וחיתוך, והתכונות שלהן מומחשות ויזואלית על־ידי הדיאגרמה



אך זהירות! ניקח לדוגמא את יחס ההכלה. מגדירים $B \subset A$ אם כל איבר של B הוא גם איבר של A זה איננו משתמע בהכרח מהדיאגרמה (נשוב לכך בהמשך). מה שההגדרה אומרת הוא שלכל איברי B ישנה התכונה של איברי A (ואולי עוד תכונות). כל הריבועים הם מלבנים אך לא ההיפך כמו־כן, לפי ההגדרה, יתכן מצב של שוויון: $A = B$. הדיאגרמה אינה מראה זאת הדיאגרמה נראית יותר כמו (לדוגמא) ביצה, אשר מורכבת משני חלקים זרים אז מה יהיה עם פעולות איחוד, ויתודי הדיאגרמה לא תשקף את מה שהיא צריכה לשקף, לגבי פעולות אלה במלים אחרות, חוסר הכנה מספקת לשימוש בדיאגרמות ון עלול יותר לסבך את ההבנה של המושגים והיחסים בתורת הקבוצות מאשר להאיר אותם אינטואיטיבית

פשרות

נתייחס כעת לאחד המושגים הקשים ביותר להבנה, והוא מושג הגבול נזכיר את ההגדרה של גבול של סדרה סדרה $\{a_n\}$ שואפת לגבול a אם לכל מספר חיובי ε (קטן ככל שיהיה) קיים N טבעי כך שאם $n > N$, אז $|a_n - a| < \varepsilon$ הגדרה זו, בהיותה הגדרה מתמטית, אינה מערבת זמן, תנועה וכיוצא באלה מושגים דינמיים לא מדובר כאן בתהליך יצירה בינלאומי של מספרים אשר בסופו "מגיעים לגבול". איברי הסדרה כולם קיימים ונתונים מלכתחילה, וההגדרה מתארת קשר מסויים ביניהם לבין מספר הנקרא גבול אך המטפורה הדינמית, תלוית־הזמן הזאת, טבועה בנו כל־כך, שאיננו יכולים להפטר ממנה המונח "שאיפה" מבטא פשרה בין ההצגה האינטואיטיבית של תהליך דינמי לבין ההצגה המופשטת של קשר מסויים, הרי במציאות, עצמים אינם "שואפים". הם נשארים במקום או זזים נכון הוא שמושג הגבול היה קשור תחילה לענייני תנועה (זו הייתה המוטיבציה של ניוטון), והמתמטיקאים התחבטו במשך דורות כדי להגיע להגדרה לוגית־מתמטית "טהורה", אשר תבהיר היטב את משמעות המטפורה אחרי כל זה נשארנו עדיין עם המונח "שואף" ועם הסמל של החץ, אשר מזכירים לנו תנועה"

על המתנך להיות מודע לקונפליקט הקיים אצל התלמיד, ולדעת לגשר בזהירות ובתבונה בין האילוצים האינטואיטיביים הטבעיים לבין האילוצים הלוגיים אשר יוצרים את הקונפליקט.

השלכות דידאקטיות

התפתחותו האינטלקטואלית של הילד איננה אפשרית על־ידי קידומו במישור הפורמלי – מושגי בלבד האינטואיציות, הדימויים, האנלוגיות, מהווים מרכיבים בלתי־נפרדים ורבי־עוצמה בכל תהליך שכלי־מחשבתי, ואת עובדה זו צריך לקחת בחשבון בתהליך החינוכי במקום לבטל חלילה מרכיבים אלו, עדיף ורצוי לפתח את יכולת של תלמיד להיות מודע לצרכיו האינטואיטיביים, לדעת להעזר בהם ולפתח אינטואיציות חדשות אשר תעלנה בקנה אחד עם הדרישות הפורמליות של המתמטיקה

יש לעודד את התלמיד להעלות השערות, אפילו אם הן שגויות **זוהי הדרך שבה כל אחד פותר בעיות**, מהטירון ועד למומחה. מצד שני, יש לפתח אצל התלמיד את היכולת לנתח ולבדוק את ממצאיו, את ניחושיו, הן באופן אינטואיטיבי והן באופן פורמאלי פישביין מאמין שניתן בהחלט לפתח את המיומנויות הרצויות האלה באמצעות הוראה נכונה, זו אשר מבטיחה. את האיזון העדין בין האספקטים האינטואיטיביים לאלה הפורמליים, של המתמטיקה.

רשימת ספרות

Bouvier, Alain, (1981). *La Mystification Mathématique* Hermann

Davis, Philip & Hersch, Reuben, (1983): *The Mathematical Experience*. Pelican.

Goldberg, Philip, (1983) *The Intuitive Edge* Tarcher

Halmos, Paul, (1985) *I Want to be a Mathematician*. Springer-Verlag.

Kline, Morris, (1988): *Mathematics, the loss of Certainty* Oxford

Storr, Anthony, (1976): *The Dynamics of Creation*. Pelican.

ליבה, עופר (1990/1) · החוויה המתמטית, עליה 9-8

אדם השומע בקולו של ההיגיון הוא אבוד ההיגיון הופך לעבדים כל אלה שמוחם אינו חזק דיו כדי להתגבר עליו

George Bernard Shaw

אדם החושב בהיגיון מנסה להתאים את עצמו לעולם, אדם שאינו בעל תכונה זו מתעקש להתאים את העולם לעצמו על־כן, כל הקידמה היא בידי אנשים שאינם חושבים בהיגיון

George Bernard Shaw