מבחני בגרות

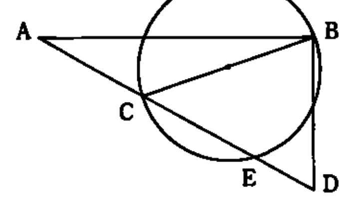
קובץ פתרונות[1]
קיץ תש"ן (4 ו־5 יח')
קיץ תשנ"א (4 יח')

מאת **אורי רימון**

1 (תש"ן, 5 יח', 1)

ABD משולש ישר־זווית ($\measuredangle ABD = 90°$) דרך הקודקוד B מעבירים מעגל החותך את היתר בנקודות C ו־E, כך ש־BC הוא קוטר במעגל (ראה ציור)

נתון $BD = a$ ס"מ, $AB = d$ ס"מ הבע את אורך הקטע ED באמצעות a ו־d



פתרון

$\measuredangle AEB = 90°$ (זווית היקפית הנשענת על קוטר) ולכן BE גובה ליתר במשולש ABD

על סמך המשפט הניצב במשולש ישר זווית הוא ממוצע הנדסי של היתר היטלו של אותו ניצב על היתר מתקבל

$$a^2 = AD \cdot ED$$

(ההוכחה נובעת מיד מדמיון המשולשים ABD ו־BED)

מכאן

$$ED = \frac{a^2}{AD} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + d^2}}$$

2 (תש"ן, 5 יח', 2)

נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ 5x - 7y + (k^2+3)z &= k^2 + 1 \\ 3x - y + (k+3)z &= 3 \end{aligned}$$

1) בתחילת כל שאלה רשומים הפרטים שנת הבחינה, מספר יחידות הלימוד ומספר השאלה בטופס המבחן

א עבור אילו ערכים של k יש למערכת המשוואות

(1) אינסוף פתרונות?

(2) אף לא פתרון אחד?

(3) פתרון יחיד?

ב עבור איזה ערך של k יהיה (0, 0, 1) הפתרון היחיד של המערכת?

פתרון

נתיר את המערכת בשיטת גאוס

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2+3 & k^2+1 \\ 3 & -1 & k+3 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} S_2 - 5S_1 \\ \Leftrightarrow \\ S_3 - 3S_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & k^2-2 & k^2-4 \\ 0 & 2 & k & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} S_2 + S_3 \\ \Leftrightarrow \\ \ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k^2+k-2 & k^2-4 \\ 0 & 2 & k & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & (k+2)(k-1) & (k-2)(k+2) \\ 0 & 2 & k & 0 \end{pmatrix}$$

א. 1. אם $k = -2$ השורה השנייה מתאפסת, ולכן יש אינסוף פתרונות (המשמעות הגיאומטרית היא שאם המשוואות מייצגות מישורים אזי המישורים נחתכים בישר)

2. אם $k = 1$ השורה השנייה מיצגת את המשוואה

$$0x + 0y + 0z = -3$$

וקבוצת האמת ריקה (המשמעות הגיאומטרית כל שני מישורים נחתכים בישר, אך לשלושת המישורים אין נקודה משותפת)

3 אם $k \neq 1, -2$ ניתן לסיים את ליכסון המטריצה ולוודא שהפתרון יחיד

ב. תנאי הכרחי ש־(1,0,0) יהיה פתרון הוא $(k-2)(k+2) = 0$ מכיוון ש־$k \neq -2$ האפשרות היחידה היא $k = 2$ בדיקה פשוטה מראה כי במקרה זה (1,0,0) הוא פתרון, ולכן יחיד.

3 (תשנ"א, 4 יח', 2)

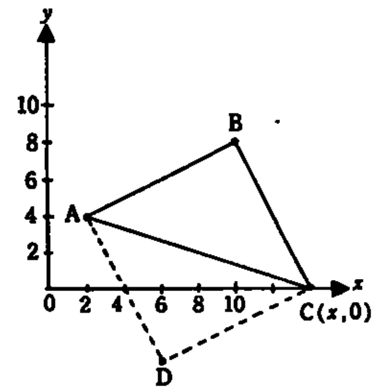
משולש ABC הוא משולש ישר־זווית, $\sphericalangle ABC = 90^\circ$

נתון $A(2,4)$, $B(10,8)$ והקדקוד C נמצא על ציר ה־x

א הראה כי המשולש ABC הוא משולש שווה־שוקיים

ב מצא נקודה D, כך שהמרובע ABCD יהיה ריבוע

פתרון



א נמצא את C

$$a_{AB} = \frac{8-4}{10-2} = \frac{1}{2}$$

ולכן $a_{BC} = -\frac{1}{2}$

משוואת BC

$$y - 8 = -2(x - 10)$$
$$y = -2x + 28$$

ולכן $C = (14,0)$

הערה אפשר למצוא את C גם באמצעות וקטורים

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

כלומר, $(8,4) \cdot (x_c - 10, -8) = 0$

$$8(x_c - 10) - 32 = 0 \Rightarrow x_c = 14$$

$$AB^2 = (10-2)^2 + (8 \cdot 4)^2 = 80$$
$$BC^2 = (10-14)^2 + 8^2 = 80$$

ולכן $AB = BC$

ב משוואת הישר AD

$$y - 4 = -2(x - 2)$$
$$y = -2x + 8$$

משוואת הישר DC

$$y = \frac{1}{2}(x - 14)$$

והפתרון $D = (6,-4)$

ובוקטורים $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

אם $D = (d_1, d_2)$

$$(-8,-4) = (d_1 - 14, d_2)$$

כלומר, $d_1 - 14 = -8\ ,\ d_2 = -4$

ולכן $D = (6,-4)$

4 (תש"ן, 5 יח', 5)

סדרה מוגדרת לכל n טבעי על־ידי הכלל

$$a_n = 2n - 4 + b_n$$

כאשר $b_n = 3n + (3n+2) + (3n+4) + \quad + 5n$

א הצג סדרה זו על־ידי תבנית לפי מקום (כלומר, מצא נוסחה ל־a_n כפונקציה של n בלבד)

ב מצא כלל נסיגה לסדרה זו

ג חשב את ההפרש

$$(a_2 + a_4 + a_6 + \quad + a_{100}) - (a_1 + a_3 + a_5 + \,..\, + a_{99})$$

פתרון

א b_n הוא טור הנוצר על־ידי סדרה חשבונית שהפרשה 2 נסמן ב־N את מספר אברי הטור

$$5n = 3n + (N-1)2$$
$$N = n + 1$$
$$b_n = \frac{(3n+5n)N}{2} = \frac{8n(n+1)}{2} = 4n(n+1)$$

ולכן

$$a_n = 2n - 4 + 4n(n+1) = 4n^2 + 6n - 4$$

ב $a_1 = 6$

$$a_{n+1} = 4(n+1)^2 + 6(n+1) + 4 = a_n + 8n + 10$$

ג

$$D = (a_2 + a_4 + a_6 + \,.\, + a_{100}) - (a_1 + a_3 + a_5 + \,.\, + a_{99}) =$$
$$= (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \ldots + (a_{100} - a_{99})$$

נסמן $c_n = a_{n+1} - a_n$ מתקיים $c_n = 8n + 10$

ולכן c_n סידרה חשבונית שבשבילה $c_1 = 18$ ו־$c_{99} = 802$

D נוצר על־ידי סכום האברים העומדים במקומות האי־זוגיים כלומר,

$$D = c_1 + c_3 + c_5 + \quad + c_{99} = \frac{(c_1 + c_{99}) \cdot 50}{2}$$
$$= (18 + 802) \cdot 25 = 20500$$

5 (תשנ"א, 4 יח', 3)

נתון הטור

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^4 +$$

א. הבע את האיבר הכללי של הטור באמצעות n (מקום האיבר בטור)

ב הוכח באינדוקציה, או בדרך אחרת, כי לכל n טבעי סכום n האיברים הראשונים הוא

$$(n-1)2^n + 1$$

פתרון

א $a_n = n \cdot 2^{n-1}$

ב תהי K קבוצת כל האינדקסים שבשבילם הטענה נכונה

$a_1 = 1$ כי $1 \in K$ לכן $s_1 = (1-1)2^1 + 1 = 1$

נניח כי $k \in K$ כלומר, $s_k = (k-1)2^k + 1$

ונוכיח כי $k+1 \in K$.

צ"ל $s_{k+1} = k \cdot 2^{k+1} + 1$

הוכחה

$$s_{k+1} = s_k + a_{k+1} = (k-1)2^k + 1 + (k+1)2^k =$$
$$= (k-1+k+1)2^k + 1 = 2k \cdot 2^k + 1 = k \cdot 2^{k+1} + 1$$

לכן $k+1 \in K$ והטענה נכונה לכל n טבעי

6 (תשנ"א, 4 יח', 6)

א (1) הוכח, כי הפונקציה $f(x) = x^3 + 2x + 3$ מונוטונית עולה

(2) חשב את $f(1)$

(3) על־פי הסעיפים (1) ו־(2) מצא, עבור אילו ערכי x הפונקציה $f(x)$ חיובית, ועבור אילו ערכי x היא שלילית

ב נתונה הפונקציה

$$g(x) = \frac{x^4}{4} + x^2 - 3x + 1$$

(1) מצא, בעזרת סעיף א, את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבע אם היא מינימום או מקסימום

(2) הסבר מדוע אין לפונקציה $g(x)$ נקודות קיצון נוספות

פתרון

א. (1) $f'(x) = 3x^2 + 2$

לכל x, $f'(x) > 0$, ולכן $f(x)$ מונוטונית עולה

(2) $f(1) = 0$

(3) לכל $x > 1$ $f(x) > 0$.

לכל $x < 1$ $f(x) < 0$.

ב (1) $g'(x) = f(x)$ לכן נקודות הקיצון של $g(x)$ יתקבלו כאשר $f(x) = 0$ על סמך חלק א' בגלל המונוטוניות, $f(x) = 0$ רק כאשר $x = 1$.

על סמך (3) כאשר $x = 1$ יש לפונקציה $g(x)$ מינימום

נקודת המינימום היא $\left(1, -\frac{3}{4}\right)$

(2) כאמור לעיל $g'(x)$ מתאפסת רק ב־$x = 1$

7 (תשי"ן, 5 יח', 6)

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1}$ בתחום $x \ge 0$

א מצא את נקודת הקיצון של $f(x)$ בתחום הנתון

ב עבור אילו ערכי m אין פתרון למשוואה $f(x) = m$?

פתרון

א

$$f'(x) = \frac{\frac{x\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - 3\sqrt{x}\sqrt{x}}{(x\sqrt{x}+1)^2} = \frac{1 - 2x\sqrt{x}}{(x\sqrt{x}+1)^2\sqrt{x}}$$

נפתור $f'(x) = 0$

$$1 = 2x\sqrt{x} \longrightarrow x^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \longrightarrow x = 2^{-\frac{2}{3}}$$

כדי לקבוע את סוג נקודת הקיצון מספיק לגזור את המונה של $f'(x)$

$$(1 - 2x\sqrt{x})' = -3\sqrt{x}$$

ולכן $f''\left(2^{-\frac{2}{3}}\right) < 0$

מקבלים כי $x = 2^{-\frac{2}{3}}$ היא נקודת מקסימום של $f(x)$

אפשר גם על־ידי הבדיקה $f(1) = 1$, $f(0) = 0$

$$f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right) = \frac{2 \cdot \left(2^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} + 1} = \frac{2 \cdot 2^{-\frac{1}{3}}}{2^{-1} + 1} =$$

$$\frac{4}{3\sqrt[3]{2}} = 1.058$$

ב מכיוון שנקודת המקסימום המקומי יחידה, היא נקודת מקסימום מוחלט מאידך ציר ה־x הוא אסימפטוטה לפונקציה כי

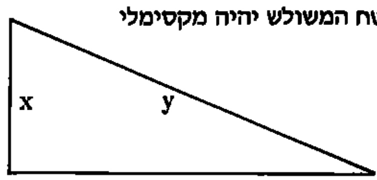
$$\lim_{x \to \infty} \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{x + \frac{1}{\sqrt{x}}} = 0$$

גרף הפונקציה הוא

ולכן אין פתרון למשוואה, $f(x) = m$ לכל $m > \frac{4}{3\sqrt[3]{2}}$ או $m < 0$

8 (תשי"ן, 5 יח', 7)

במשולש ישר־זווית הסכום של אורך אחד הניצבים ואורך היתר הוא k (גודל קבוע) מצא מה צריך להיות היחס שבין הניצב ליתר, כדי ששטח המשולש יהיה מקסימלי



פתרון

נתון $x + y = k$

$$s = \frac{1}{2}x\sqrt{y^2 - x^2} = \frac{1}{2}x\sqrt{k(y-x)}$$

$$s^2 = \frac{1}{4}kx^2(y-x) = \frac{1}{4}kx^2(k-2x) = \frac{1}{4}k(kx^2-2x^3)$$

ולכן תחום ההגדרה של s (ושל s^2) הוא: $0 < x < \frac{k}{2}$

$$(s^2)'(x) = \frac{1}{4}k(2kx - 6x^2)$$

$2kx - 6x^2 = 0$ כאשר $x = 0$ או $x = \frac{k}{3}$

$$(s^2)'' = \frac{1}{4}k(2k - 12x)$$

$$(s^2)''\left(\frac{k}{3}\right) = \frac{1}{4}k(-2k) < 0$$

ולכן כאשר $x = \frac{k}{3}$ נקודת הקיצון של $s^2(x)$ ושל $s(x)$ היא מקסימום מקומי, ומוחלט. במקרה זה $y = \frac{2}{3}k$

והיחס בין הניצב ליתר הוא $\frac{x}{y} = \frac{\frac{k}{3}}{\frac{2}{3}k} = \frac{1}{2}$

9 (תשי"ן, 5 יח', 9)

נתונה הפונקציה $f(x) = a\sin^2 x - bx$

המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = \frac{\pi}{12}$ מקביל לציר ה־x

א הוכח $a = 2b$

ב אם ידוע ש־$a > 0$, מצא את נקודות הקיצון ואת תחומי העליה והירידה של הפונקציה בקטע $[0,2\pi]$

ג בעזרת הסעיפים הקודמים, או בדרך אחרת, הוכח כי $2\sin^2 x > x$ לכל x הנמצא בתחום $\frac{\pi}{5} \le x \le \frac{7\pi}{12}$

פתרון

א. $f'(x) = a\sin 2x - b$

על פי הנתון

$$f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{a}{2} - b = 0$$

לכן $a = 2b$.

ב. על סמך א'.

$f(x) = 2b\sin^2 x - bx$ ו $b > 0$.

לכן $f'(x) = 2b\sin 2x - b = b(2\sin 2x - 1)$

מציאת נקודות קיצון:

$$\sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \pi K$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + \pi K$$

k שלם.

בתחום $[0,2\pi]$ **"הנקודות החשודות" הן**

$$x_1 = \frac{\pi}{12}, \quad x_2 = \frac{5}{12}\pi, \quad x_3 = \frac{13}{12}\pi, \quad x_4 = \frac{17}{12}\pi$$

$$f''(x) = 4b\cos 2x$$

בדיקה פשוטה מראה כי ב־x_1 ו־x_3 מתקבל מינימום וב־x_2 ו־x_4 מקסימום.

לכן כאשר $0 \le x < x_1$, $x_2 < x < x_3$, $x_4 < x \le 2\pi$ **הפונקציה יורדת, וכאשר** $x_1 < x < x_2$, $x_3 < x < x_4$ **הפונקציה עולה.**

ג. התחום $\frac{\pi}{5} < x \le \frac{7\pi}{12}$ **חלקי לתחום** $x_1 \le x \le x_3$ $\left(\frac{\pi}{12} \le x \le \frac{13}{12}\pi\right)$ **על סמך הסעיף הקודם אין ל־f מינימום מקומי בתוך הקטע** (x_1,x_3) **ולכן בתחום החלקי** $\left[\frac{\pi}{5}, \frac{7\pi}{12}\right]$ **יתקבל המינימום המוחלט בקצוות**

$$f\left(\frac{\pi}{5}\right) = 0.063b > 0$$

$$f\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 0.033b > 0$$

ולכן לכל x בתחום

$$f(x) = b(2\sin^2 x - x) > 0$$

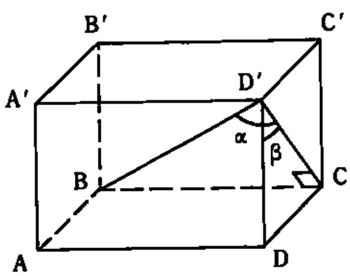
או $2\sin^2 x > x$

10 (תשנ"א, 4 יח', 9)

בתיבה $ABCDA'B'C'D'$

CD', אלכסון הפיאה $DCC'D'$, יוצר זווית α עם אלכסון התיבה BD', ויוצר זווית β עם הפיאה $ADD'A'$ (ראה איור) אורך האלכסון CD' הוא d

הבע את נפח התיבה באמצעות α, β ו־d



פתרון

$$\frac{BC}{CD'} = tg\alpha \longrightarrow BC = d\,tg\alpha$$

$$\frac{DD'}{CD'} = \cos\beta \longrightarrow DD' = d\cos\beta$$

$$\frac{DC}{CD'} = \sin\beta \longrightarrow DC = d\sin\beta$$

ולכן $v = d^3 \sin\beta \cos\beta\, tg\alpha$

11 (תשי"ן, 5 יח', 10)

נתונות ארבע נקודות במרחב

$p = (k,0,0)$, $Q = (0,4,0)$, $R = (0,k,3)$, $S = (1,1,-1)$

א הראה שלא קיים ערך של k עבור הישרים PQ ו־SR מקבילים

ב מצא עבור איזה ערך של k הישרים מאונכים זה לזה, ומצא את המרחק ביניהם במקרה זה

פתרון

א $\vec{SR}=(-1,k-1,4)$, $\vec{PQ}=(-k,4,0)$

הישרים SR ו־PQ מקבילים אם ורק אם $\vec{SR}$ תלוי ב־$\vec{PQ}$

כלומר $\vec{SR}=t\vec{PQ}$

אין סקלר t שבשבילו $4=t\cdot 0$ ולכן $\vec{SR}$ אינו תלוי ב־$\vec{PQ}$.

ב $0=\vec{PQ}\cdot\vec{SR}=k+4(k-1)+0\cdot 4=5k-4$

ולכן $k=\frac{4}{5}$

במקרה זה

$\vec{PQ}=(-0.8,4,0)$

$\vec{SR}=(-1,-0.2,4)$

נמצא מישור דרך PQ המקביל ל־SR

תהי $L=(l_1,l_2,l_3)$ נקודה כך ש $\vec{QL}=\vec{SR}$ כלומר,

$(l_1,l_2-4,l_3)=(-1,-0.2,4)$ ולכן $L=(-1,3.8,4)$

המישור Q,P,L מקביל לישר SR

כדי לקבל את משוואת המישור נציב את שיעורי הנקודות Q,P,L במשוואה $ax+by+cz=d$ ונקבל את המערכת

$$0a+4b+0c=d$$
$$0.8a+0b+0c=d$$
$$-a+3.8b+4c=d$$

פתרון המערכת נותן את משוואת המישור

$$50x+10y+\ +13z=40$$

המרחק מהנקודה S למישור שקיבלנו הוא המרחק בין הישרים PQ ו־SR

$$\left|\frac{50\cdot 1+10\cdot 1+13\cdot(-1)-40}{\sqrt{50^2+10^2+13^2}}\right|$$
$$=\frac{7}{52.62}=0.133$$

12 (תשי"ן, 5 יח', 11)

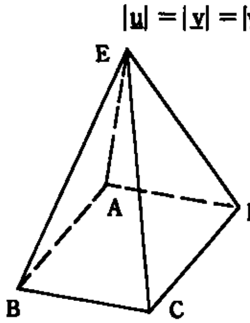
נתונה פירמידה מרובעת ABCDE שבסיסה ריבוע (ראה איור)

נסמן $\vec{AD}=\underline{w}$, $\vec{AB}=\underline{v}$, $\vec{AE}=\underline{u}$

$\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ מאונכים זה לזה, $|\underline{u}|=|\underline{v}|=|\underline{w}|=1$

נקודה M היא אמצע הקטע ED

הנקודה N מקיימת $\vec{BN}=t\vec{BC}$



א הראה שאין t שעבורו $\sphericalangle MAN=45^\circ$

ב מצא את גודל הזווית MAN כאשר הנקודה N מקיימת $\vec{NB}=\vec{BC}$

פתרון

$\vec{AM}=\frac{1}{2}(\underline{u}+\underline{w})$

$AN=\underline{v}+t\underline{w}$

$$\cos\sphericalangle MAN=\frac{\frac{1}{2}(\underline{u}+\underline{w})(\underline{v}+t\underline{w})}{\left|\frac{1}{2}(\underline{u}+\underline{w})\right|\,|\underline{v}+t\underline{w}|}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}t}{\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{1+t^2}}$$

א אם $\sphericalangle MAN=45^\circ$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos 45^\circ=\frac{t}{\sqrt{2}\sqrt{1+t^2}}$$

$t=\sqrt{1+t^2}$

או $t^2=1+t^2$ ולכן אין פתרון

ב $\vec{NB}=\vec{BC}$ ולכן $t=-1$ מכאן

$$\cos\sphericalangle MAN=\frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$$

ולכן $\sphericalangle MAN=120^\circ$

13 (תשי"ן, 5 יח', 12)

א הוכח כי אם M היא נקודת המפגש של שלושת התיכונים במשולש ABC, אזי מתקיים $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}=0$

מותר להשתמש בעובדה שנקודה M מחלקת כל תיכון ביחס (1 2.

ב. ABC ו־A'B'C' הם שני משולשים במרחב, לאו דווקא באותו מישור הוכח שאם הנקודה M היא מפגש התיכונים במשולש ABC, והנקודה M' היא מפגש התיכונים במשולש A'B'C', אזי $\vec{MM'}=\frac{1}{3}(\vec{AA'}+\vec{BB'}+\vec{CC'})$

פתרון

א. דרך (i)

יהי AA' תיכון במשולש

$$\vec{AA'}=\frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{AC})$$

$$\vec{AM}=\frac{2}{3}\vec{AA'}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{AC})=\frac{1}{3}(\vec{AB}+\vec{AC})$$

בצורה דומה

$$\vec{BM}=\frac{1}{3}(\vec{BA}+\vec{BC})$$

$$\vec{CM}=\frac{1}{3}(\vec{CA}+\vec{CB})$$

ולכן

$$\vec{AM}+\vec{BM}+\vec{CM}=$$

$$.=\frac{1}{3}(\vec{AB}+\vec{AC}+\vec{BA}+\vec{BC}+\vec{CA}+\vec{CB})=0$$

וזה שקול לטענה שיש להוכיח (כופלים את שני האגפים ב־1−)

דרך (II)

אם M מרכז הכובד של המשולש ABC אזי לכל נקודה O במרחב מתקיים

$$\vec{OM}=\frac{1}{3}(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC})$$

נבחר $O=M$ ונקבל

$$\underline{0}=\vec{MM}=\frac{1}{3}(\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC})$$

ב צ"ל $\vec{MM'}=\frac{1}{3}(\vec{AA'}+\vec{BB'}+\vec{CC'})$

נקשר כל אחד מהוקטורים AA', BB' ו־CC' עם וקטורים בתוך המשולשים

$$\vec{AA'}=\vec{AM}+\vec{MM'}+\vec{M'A'}$$

$$\vec{BB'}=\vec{BM}+\vec{MM'}+\vec{M'B'}$$

$$\vec{CC'}=\vec{CM}+\vec{MM'}+\vec{C'B'}$$

לפי א אם נחבר את שלושת המשוואות נקבל

$$\vec{AA'}+\vec{BB'}+\vec{CC'}=3\vec{MM'}$$

ומכאן

$$\vec{MM'}=\frac{1}{3}(\vec{AA'}+\vec{BB'}+\vec{CC'})$$

14 (תש"ן, 5 יח', 13)

א נתונה המשוואה $(z-A)(z^2+Bz+C)=0$
B, A ו־C מספרים ממשיים
הוכח שאם $z=a+bi$ $(b\neq 0)$ הוא פתרון של המשוואה,
אז גם $\bar{z}=a-bi$ הוא פתרון של המשוואה

ב z_1, z_2, z_3 הם שורשי המשוואה
$$(z-A)(z^2-6z+C)=0$$
A ו־C הם מספרים ממשיים
נתון כי $z_1+z_2+z_3=0$, וכי $z=3+4i$ הוא אחד הפתרונות של המשוואה מצא את A ואת C

פתרון

א נסתמך על הכללים $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$

$$\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$$

$$0=\bar{0}=\overline{(z-A)(z^2+Bz+C)}=$$

$$\overline{(z-A)}\,\overline{(z^2+Bz+C)}=$$

$$=(\bar{z}-\bar{A})(\bar{z}^2+\bar{B}\cdot\bar{z}+\bar{C})$$

$$=(\bar{z}-A)((\bar{z})^2+B\bar{z}+C)$$

(הצמוד של ממשי הוא המספר עצמו) ולכן $\bar{z}$ גם כן פתרון

ב אחד הפתרונות הוא $z_3=A$
על סמך הנתון זהו פתרון ממשי ולכן, $z_1=3+4i$ הוא פתרון של המשוואה z^2-6z+C גם $z_2=3-4i$ גם הוא פתרון של אותה משוואה ולכן

$$0=A+3+4i+3-4i$$

מכאן מקבלים $A=-6$

על סמך נוסחאות וייטה $z_1\cdot z_2=C$

$$(3-4i)(3+4i)=25$$

ולכן $C=25$

15 (תש"ן, 4 יח', 7)

א פונקציה f, המוגדרת לכל המספרים הממשיים, מקיימת את התנאים הבאים
(1) הפונקציה f אינה הפונקציה הקבועה אפס
(2) $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ לכל x ולכל y
הוכח, בהסתמך על שני התנאים, כי $f(0)=1$

ב נתון $f(x)=2^x$
מצא את כל ערכי x המקיימים את המשוואה
$$5f(4x)-f(8x)=f(2)$$

פתרון

א על סמך (1) יש x_1 כך ש $f(x_1)=c$ ו־ $c\neq 0$

$$c=f(x_1)=f(x_1+0)=f(x_1)\cdot f(0)=c\cdot f(0)$$

ולכן $f(0)=1$

ב. $5\cdot 2^{4x}-2^{8x}=2^2$

או $(2^{4x})^2-5\cdot 2^{4x}+4=0$

מכאן $2^{4x}=4\rightarrow x=\frac{1}{2}$

$$2^{4x}=1\rightarrow x=0$$

16 (תש"ן, 5 יח', 14)

א הפונקציה g מקיימת את השוויון $g(ab)=g(a)+g(b)$ לכל a, b בתחום הגדרתה הפונקציה f היא הפונקציה ההפוכה ל־g
הוכח, על סמך השוויון שמקיימת g, כי f מקיימת $f(r+s)=f(r)f(s)$ לכל r, s בתחום הגדרתה

ב נתון $f(r+s)=f(r$ נתון $f(x)=2^x$
מצא עבור אילו ערכי x מתקיים אי־השוויון
$$2\frac{1}{2}f(4x)-f(8x-1)>f(1)$$

פתרון

א
$$f(r)=a\rightarrow g(a)=r$$
$$f(s)=b\rightarrow g(b)=s$$

$$f(r+s)=f(g(a)+g(b))=f(g(ab))=a\cdot b=f(r)\cdot f(s)$$

ב
$$\frac{5}{2}2^{4x}-2^{8x-1}>2$$
$$\frac{5}{2}2^{4x}-\frac{2^{8x}}{2}>2$$

נציב $2^{4x}=t$ ונקבל את האי־שוויון

$$-t^2+5t-4>0$$

שפתרונו $1<t<4$.

על ידי הצבה של t נקבל $2^0<2^{4x}<2^2$ ופתרון אי־שוויון זה הוא $0<x<\frac{1}{2}$.

17 (תש"ן, 5 יח', 15)

זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי הוא פרק הזמן שבסופו נשארת מחצית מכמותו ההתחלתית

נגדיר "זמן רבע חיים" של חומר רדיואקטיבי כפרק הזמן שבסופו נשארת רבע מכמותו ההתחלתית

זמן רבע החיים של חומר א' שווה לזמן מחצית החיים של חומר ב'

אם מ־100 גרם של חומר א' נשארו 80 גרם כעבור 4 שנים, מאיזו כמות של חומר ב' יישארו 80 גרם כעבור 4 שנים?

פתרון

סימון

$$a_1^t=\frac{1}{4}$$
$$a_2^t=\frac{1}{2}$$
$$a_1^2=\sqrt{0.8}\;—\;80=100a_1^4\,,\quad 80=xa_2^4$$
$$a_1^t=\left(\frac{1}{2}\right)^2=(a_2^t)^2=(a_2^2)^t$$

לכן $a_1=a_2^2$

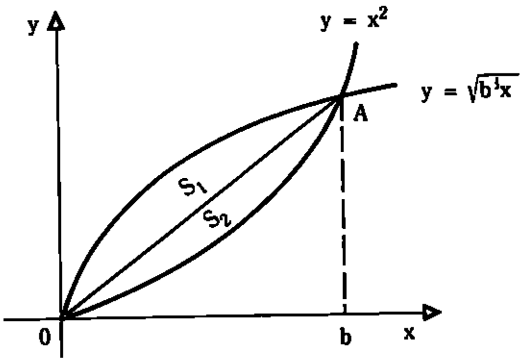
$xa_2^4=100a_1^4$ **לכן,**

$$x=100\frac{a_2^4}{a_1^2}=100\frac{a_1^4}{a_1^2}=100a_1^2=100\sqrt{0.8}=89.44$$

18 (תש"ן, 5 יח', 16)

גרף הפונקציה $y=x^2$ וגרף הפונקציה $y=\sqrt{b^3x}$ (b פרמטר, $b>0$) נחתכים בנקודה A ובראשית הצירים O

הוכח כי הקטע OA מחלק את השטח, הכלוא בין שני הגרפים, לשני חלקים שווי־שטח



פתרון

$$x^2=\sqrt{b^3x}$$
$$x^4=b^3x$$

פתרונות מערכת המשוואות הם $x_1=0$, $x_2=b$.

המשוואה של OA היא $y=bx$.

נסמן s_1 ו־s_2 כמו באיור

$$s_1=\int_0^b(\sqrt{b^3x}-bx)dx=\left[\frac{2b^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{bx^2}{2}\right]_0^b=$$
$$=\frac{2b^3}{3}-\frac{b^3}{2}=\frac{b^3}{6}$$
$$s_2=\int_0^b(bx-x^2)dx=\left[\frac{bx^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]=\frac{b^3}{2}-\frac{b^3}{3}=\frac{b^3}{6}$$