קוראים כותבים

מבט על הוראת המתמטיקה

הנחות יסוד

- א1 המתמטיקה היא יצירה המשתנה בהתמדה
- א2 הטקסטים המתמטיים הטובים נכתבים כשהתוצאה ידועה מראש או לפחות משוערת
- א3 רוב האנשים אינם מוכשרים למתמטיקה ואינם אוהבים אותה

מהנחות אלו עולות המסקנות הבאות:

- ב1 תהליך לימוד המתמטיקה צריך להתבסס על יצירתיות
- ב2 רצוי שהתלמיד ידע מראש או ישער את התוצאה שהוא אמור להגיע אליה
- ב3 צריך לאפשר קיומם של פערים גדולים מאוד בין התלמידים השונים מבלי לתסכל אותם

כדי לממש מסקנות אלו אפשר לדאוג שיתקיימו התנאים האלה, למשל:

- ג1 רוב התרגילים בספר הלימוד יוגשו עם פתרונם המלא אחרי שהתלמיד יקרא תרגילים פתורים רבים הוא יחבר לו תרגילים נוספים ויפתור אותם
- ג2 לתרגילים הלא פתורים שיקבל התלמיד תצורף בדרך כלל התוצאה הסופית (גם במבחנים)

  סוג נוסף של תרגילים יכלול תוצאה סופית שתהיה נכונה או שגויה והתלמיד יצטרך להכריע ולנמק
- ג3 ליכולת של התלמיד לחבר שאלות ולהתמודד איתן יהיה משקל עיקרי בהערכתו

עמוס גואטה
בי"ס פתוח "אבשלום"
ובי"ס איינשטיין, בן־שמן

הוכחת התחלקות באמצעות אינדוקציה

הרשימה הקצרה שלהלן, מתארת שיטה פשוטה להוכחת התחלקות על־ידי אינדוקציה

בספר אלגברה, 4, 5 יחידות לימוד, כרך שני, בעמ' 142, מודגמת ההוכחה לבעיה

הוכח כי $a^n - b^n$ מתחלק ב־$(a - b)$

בהוכחה מתשמשים בתחבולה

$a^{k+1} - b^{k+1} = a \cdot a^k - ab^k + ab^k - bb^k$

כלומר, מחסירים ומוסיפים את האיבר ab^k

מהיכן הרעיון? איך ידע תלמיד בתרגיל אחר איזה איבר לחסיר ולהוסיף?

על חסרון זה, ניתן להתגבר בשיטה הבאה

הוכחה:

1) עבור $n = 1$

$a^1 - b^1 = a - b$

וזה אכן מתחלק ב־$(a - b)$ כנדרש

2) נניח שהטענה נכונה בשביל k ונוכיח את נכונותה בשביל $k + 1$

נניח כי בשביל k טבעי $a^k - b^k$ מתחלק ב־$(a - b)$

צריך להוכיח כי $a^{k+1} - b^{k+1}$ מתחלק ב־$(a - b)$

לב השיטה

נוכיח טענה זו בשיטה הדומה לפתרון 2 משוואות ב־2 נעלמים, על־ידי השוואת מקדמים

נרשום

$\mathrm{I} \quad a^k - b^k$

$\mathrm{II} \quad a^{k+1} - b^{k+1}$

נכפיל את I בגורם כלשהו כך שההפחתה מ־II תבטל איבר אחד

נכפול את I, ב־a, כדי לבטל את האיבר הראשון.

$\mathrm{I} \quad a^k \cdot a - ab^k / \cdot a$

$\mathrm{II} \quad a^k \quad a - b^{(k+1)}$

נתבונן ב־$\mathrm{II} - \mathrm{I}$

$$a \cdot b^k - b^{(k+1)} = b^k \cdot (a - b)$$

וברור, כי הפרש זה מתחלק ב־ $(a - b)$

מכיוון ש־$\mathrm{II} - \mathrm{I}$ מתחלק ב $(a - b)$ ולפי הנחת האינדוקציה I מתחלק ב־ $(a - b)$ הרי מזה נובע שגם II מתחלק ב־ $(a - b)$ כנדרש! הקורא ישים לב שרק I הוכפל בעוד II נשאר ללא כל שינוי — כי II הוא זה שצריך להוכיחו ולכן **אסור לגעת בו** בעוד שבטוי I, על־פי הנחת האינדוקציה מתחלק ב־ $(a - b)$ ולכן אפשר להכפילו בכל גורם שהוא

השיטה טובה **לכל** תרגילי ההתחלקות המוכרים ואינה דורשת שום תחבולה נוספת

נתבונן בדוגמא המופיעה בספר וקטורים בגישה גאומטרית
הוכח כי $3 \cdot 9^n + 5$ מתחלק ב־8

הוכחה:
עבור $n = 1$ זה מיידי
נניח כי הטענה נכונה בשביל k ונוכיחה עבור $k + 1$ כלומר, צריך להוכיח ש $3 \cdot 9^{k+1} + 5$ מתחלק ב־8
הוכחה:
נרשום

$$\text{I} \quad 3 \cdot 9^k + 5$$
$$\text{II} \quad 3 \cdot 9^{k+1} + 5$$

כדי להשוות את המקדם של 9^k בשתי המשוואות יש לכפול את I ב־9
מקבלים

$$\text{I}^* \quad 27 \cdot 9^k + 45$$
$$\text{II} \quad - \; 27 \cdot 9^k + 5$$
$$\text{I} - \text{II} = 40$$

40 מתחלק ב־8!

לעומת זאת, נתבונן בהסבר המופיע בספר.
"כדי שנוכל לנצל את אקסיומת האינדוקציה, נהפוך באגף ימין את 9 ל־$(1 + 8)$ "
כאן עומד התלמיד התם וגם זה שאינו יודע לשאול, ומקשה **מדוע** החלטנו להפוך את 9 ל־$(1 + 8)$? מה נעשה בתרגילים אחרים?
או לדוגמא, במקרה של $a^n - b^n$, מדוע החלטנו להחסיר ולהוסיף איבר מסוים? איך ידענו מה להפחית?

לעומת זאת, בשיטת השוואת מקדמים, תמיד יודעים מה לעשות, **ואף פעם לא מנחשים!**

אריה רוקח,
קדומים

טעויות כתיב

שמחתי לקבל את גליון עלי"ה האחרון יש בו חומר מעניין והעריכה מושכת
הערה שולית מקריאה חטופה שמתי לב לכמה טעויות כתיב, בעיקר בהקשר של שמות לועזיים כך
עמ' 30 Blaise Pascal ולא Basil (וכן באסיל בכותרת)
Mersenne ולא Mersenn
עמ' 31 Pierre

פרופ' אברהם מלקמן
המחלקה למתמטיקה ולמדעי המחשב
אוניברסיטת בן־גוריון, באר שבע

זכות ראשונים

זה עתה עברתי על עלי"ה 8 וקראתי את ההערות של המערכת למאמר של עלי עותמאן (עמ' 57–58).
בעמ' 57, במה שמוצג כ"סקירה היסטורית ", מופיעות השורות הבאות "רק באמצע המאה ה־19 פיתח וכו' אין **תבנית כללית** לפתרון "
מספר הערות

1. Galois נהרג ב־1832 בגיל 20 (לא באמצע המאה ה־19)
2. הראשון שהוכיח את המשפט על אי קיום של פתרון של משוואה במעלה 5 (בעזרת **הוצאת שורשים**) היה אבל (Abel), בשנת 1824 את הספור **המדויק** אפשר למצוא בספרו של בויאר (Boyer) שאתם מפנים אליו בעמ' 555–556.
3. גם מר עותמאן וגם העורכים מדברים בצורה כללית על "תבניות" או "נוסחאות כלליות" מבלי לפרט כוונתם לנוסחה אשר בנויה בעזרת פעולות חבור, חסור, כפל וחלוק והוצאת שורש (כלומר פתרון של המשוואה $x^k = a$) למשל אם מקדמי הפולינום הם a ,b ,c ,d ,e אזי דוגמא לתבנית כללית תהיה

$$\sqrt[5]{a} + b - \sqrt{c/d} + e + \sqrt[7]{e} - c$$

בכבוד רב,

פרופ' בניימין ווייס
המחלקה למתמטיקה ולמדעי המחשב
האוניברסיטה העברית בירושלים