

רמזים לפתרונות של האולימפיאדה המתמטית לנוער 1992

1. לפי משפט הממוצעים

$$\frac{19x + 92y}{111} \geq (x^{19} y^{92})^{1/111}$$

2. אילו היה פולינום כזה, אזי היו כל פיאוריות בהכרח משולשים, ומכאן ניתן להסיק את המסקנה.

3. יהיה $P = x_1, x_2, \dots, x_n$
 א. עבור $n = 2m$ יהיה

$$P = x_1 x_2 \cdot x_3 x_4 \cdot \dots \cdot x_{2m-1} x_{2m} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m-1)$$

כאשר מאיך

$$P = x_{2m} x_1 \cdot x_2 x_3 \cdot \dots \cdot x_{2m-2} x_{2m-1} = 2m \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2m) = 2^m m!$$

ב. עבור $n = 2m + 1$ נקבל

$$P = x_1 x_2 \cdot x_3 x_4 \cdot \dots \cdot x_{2m} x_{2m+1} = [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m-1)] \cdot x_{2m+1}$$

מאיך

$$P = x_1 \cdot x_2 x_3 \cdot x_4 x_5 \cdot \dots \cdot x_{2m} x_{2m+1} = x_1 [2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2m]$$

ולכן

$$\frac{x_1}{x_{2m+1}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2m}$$

מאחר ש $x_1 x_{2m+1} = 2m + 1$ נוכל לחשב את x_1 ומכאן גם $x_2, x_3, \dots, x_{2m+1}$.

4. נוכל להקפיד את כל הקבוצה במעגל ולמצוא לו משיק שאיננו מקביל לאף אחד מהקטעים המתברים וזוגות של הנקודות (מאחר שמספר החיבורים האלה סופי). אם נזיז עכשיו את המשיק תוך שמירה על כיוונו נוכל להפריד בין נקודות הקבוצה בדרוש.

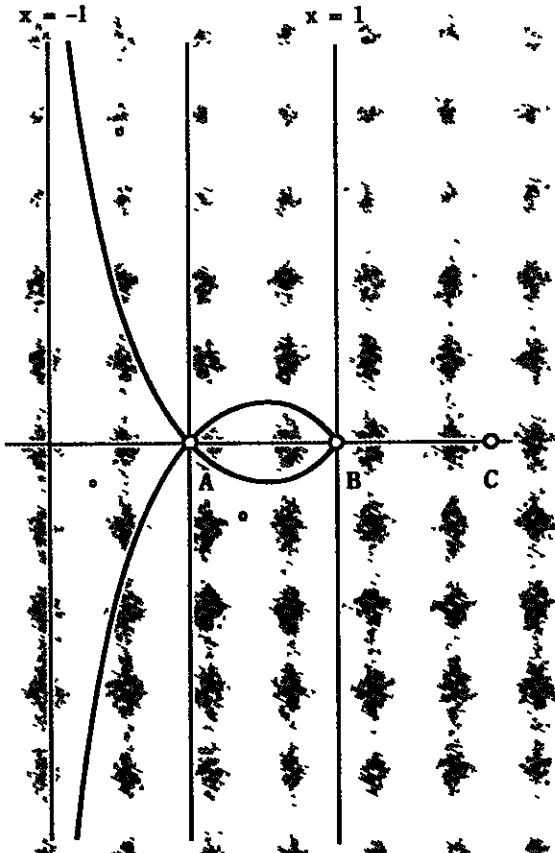
5. בדרך השלילה. נכתוב $P = xyz$ הוא, אם אין המשפט נכון יהיה $P \geq 1$ ומאיך גם $x > P^{1/3}$ ולכן $x > P^{1/3}$ כמו כן $y > P^{1/3}$ ו- $z > P^{1/3}$ ולכן

$$P = xyz > P^{1/3 + 1/3 + 1/3} = P$$

קצת כי $P^{13/60} > 1$ ולכן $P > 1$ סתירה.

6. יהיו (x, y) השיתורים של P אזי

$$\tan(2 \cdot \angle PAC) = \frac{2xy}{x^2 - y^2} \text{ ולכן } \tan(\angle PAC) = \frac{y}{x}$$



מאיך $\tan(\angle PAC) = \frac{y}{x-1}$ ולכן

$$\frac{x^2 - y^2}{2xy} + \frac{y}{x-1} = 0$$

$$y = \pm x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

כלומר

מכאן ש y יהיה ממשי אך ורק עבור $-1 < x \leq 1$ וכי העקומה נחיה סימטרית ביחס ציר ה- x . האסימפטוטה היחידה היא $x = -1$.

7. נניח כי שתיהן סדרות עולות (אחרת נוכל להסתכל בהן בכיוון הפוך). החפשים $a_1 - a_2, a_3 - a_4, \dots$ הם כולם שווים בערך שהחפשים $b_1 - b_2, b_3 - b_4, \dots$ גדלים עם r . מזה נובע שהנקודות (r, a_n) נמצאות כולן על קו ישר בעד שקו שעליו הנקודות (r, b_n) נמצא למטה מקו ישר זה ופגוש אותו רק בקצוות.