סיפורם של המספרים המרוכבים[1]

מאת **ישראל קליינר**, אוניברסיטת יורק, קנדה
מאנגלית עטרה שריקי ונצה מובשוביץ־הדר

בהגדרה המקובלת של מספרים מרוכבים — כזוג סדור (a,b) של מספרים ממשיים או כ"מספרים" בעלי הצורה $a + bi$ — אין רמז להתפתחות הממושכת ורבת התלאות של המספרים המרוכבים במהלכן של כשלוש מאות שנים ברצוני לתאר התפתחות זו בקצרה שכן, לדעתי, אפשר ללמוד מספר לקחים מסיפור זה, כפי שניתן ללמוד מתוך סיפורים דומים על התפתחותם של מושגים, ושל תוצאות או תיאוריות לקחים אלו נוגעים להשפעה שיש להסטוריה של המתמטיקה על ההבנה של המתמטיקה ועל דרך הוראתה

לידה

סיפורנו מתחיל בשנת 1545 את הידוע בנושא זה עד אז אפשר לסכם בקצרה על־ידי דבריו של בסקרה (Bhaskara), מתמטיקאי הודי בן המאה ה־12 (Dantzig, 1967)

> הריבוע של מספר חיובי, וכן של מספר שלילי, הינו חיובי השורש הריבועי של מספר חיובי הוא חיובי או שלילי לא קיים שורש ריבועי של מספר שלילי, היות שמספר שלילי איננו ריבוע של מספר

בשנת 1545 פרסם המתימטיקאי האיטלקי ג'רום קרדן (Jerome Cardan), שהיה גם רופא, מהמר ופילוסוף, ספר בשם Ars Magna (האומנות הגדולה), ובו תאר שיטה אלגברית לפתרון משוואות ממעלה שלישית ורביעית ספר זה היה לאירוע גדול בעולם המתמטי, שכן הוא היה ההישג הגדול הראשון באלגברה מאז שהבבלים הראו, 3000 שנה קודם לכן, כיצד פותרים משוואה ריבועית גם קרדן טיפל בספרו בתבניות ריבועיות הנה אחת הבעיות שהציג (Struik, 1969)

> אם מישהו אומר לך "חלק את 10 לשני חלקים, כך שמכפלת החלקים תתן 40", ברור שהמקרה — (השאלה) הוא בלתי אפשרי למרות זאת, נפתור את הבעיה כדלקמן

קרדן יישם האלגוריתם שלו (שהוא בעיקרו השלמה לריבוע), למערכת המשוואות $x + y = 10$, $xy = 40$, וקבל את שני המספרים — $5 + \sqrt{-15}$ ואת $5 - \sqrt{-15}$ למרות "העינוי הנפשי הכרוך בכך" (Burton, 1985) כפל קרדן זה בזה, באופן פורמלי, את שני המספרים וקבל 40 הוא לא המשיך בחקירת הנושא ורק הסיק שהתוצאה היא "שנונה אך בו זמנית חסרת תועלת" (NCTM 1969) למרות שמספרים אלה נדחו על־ידי המתמטיקאים, היה זה ללא ספק מאורע היסטורי, הואיל ולראשונה נרשם באופן מפורש שורש ריבועי של מספר שלילי דנציג (Dantzig, 1985) העיר על כך במלים אלה עצם הכתיבה של הבלתי אפשרי, נתנה לזה קיום סימבולי

גם בפתרון משוואות ממעלה שלישית היה צורך להעזר בשורשים ריבועיים של מספרים שליליים הפתרון של המשוואה $x^3 = ax + b$ על־פי קרדן הוא

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

פתרון זה נקרא **נוסחת קרדן**
כאשר מיישמים פתרון זה לדוגמה ההיסטורית $x^3 = 15x + 4$, מקבלים

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

למרות טענתו של קרדן כי הנוסחה הכללית שלו לפתרון משוואה ממעלה שלישית איננה ישימה במקרה זה (בשל ההופעה של $\sqrt{-121}$), לא ניתן היה עוד לבטל בהינף יד את הנושא של שורשים ריבועיים של מספרים שליליים בעוד שבמקרה של המשוואה הריבועית ($x^2+1=0$, למשל) ניתן היה לטעון שלא קיים פתרון, הרי שלמשוואה ממעלה שלישית $x^3=15x+4$ קיים פתרון ממשי

---

1) Israel Kleiner (1988), Thinking The Unthinkable The Story of Complex Numbers (With a Moral), **Mathematics Teacher, Oct.,** Pp 538-592

המאמר מתפרסם באדיבותם של עורכי העתון והמחבר

גלוי $x = 4$ ולמעשה שני הפתרונות האחרים $-2 \pm \sqrt{3}$ אף הם ממשיים נותר, אם כן, צורך ליישב את הפתרון הפורמלי ו"חסר המשמעות" של $x^3 = 15x + 4$, המתקבל על־ידי נוסחת קרדן, עם הפתרון $x = 4$ המתקבל על־ידי התבוננות

למשימה זו נרתם מהנדס המים רפאל בומבלי (Rafael Bombelli), כשלושים שנה לאחר פירסום עבודתו של קרדן
לבומבלי היה "רעיון פרוע" מכיוון שהביטויים $2+\sqrt{-121}$, ו־$2-\sqrt{-121}$ נבדלים זה מזה רק בסימן שלפני השורשים, יתכן שגם לשורש השלישי שלהם תהיה תכונה זו לפיכך, הוא רשם,

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = a+\sqrt{-b}$$
$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = a-\sqrt{-b}$$

ופתר משוואות אלה עבור הנעלמים a ו־b פתרון המשוואות נעשה בעזרת פעולות אלגבריות מותרות, בהתאם לחוקים הקיימים למשתנים ממשיים בצורה זה בומבלי הסיק כי $a = 2$ ו־$b = 1$, והראה (Burton, 1985) כי אכן

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = (2+\sqrt{-1})+(2-\sqrt{-1}) = 4$$

במילים אחרות, בומבלי נתן משמעות ל"חסר המשמעותי" מאורע זה ציין את הולדתם של המספרים המרוכבים, ובמילותיו שלו (Leapfrogs, 1980)

> היתה זו מחשבה פרועה בעיניהם של רבים, ואף אני הייתי זמן רב בדעה זו כל העניין נראה כנשען יותר על פלפול מאשר על האמת יחד עם זאת, חפשתי במשך זמן רב, עד אשר הוכחתי שזהו אכן המקרה

חשוב להבין שזהו האופן בו מושגות לרוב פריצות דרך הן מתרחשות כאשר מעלים על הדעת את אשר נראה כבלתי מתקבל על הדעת, ואף מעזים להציג זאת ברבים

המשוואה $x^3 = 15x + 4$ מייצגת את המקרה של משוואה בלתי פריקה ממעלה שלישית, שבה כל שלושת הפתרונות הם ממשיים, אך יחד עם זאת מבוטאים (באמצעות נוסחת קרדן) בעזרת מספרים מרוכבים כדי להתיר את הפרדוקס של משוואות ממעלה שלישית מסוג זה, פיתח בומבלי מערכת חוקים של פעולות חשבון במספרים מרוכבים החוקים שניסח, כשהם מנוסחים בעזרת הסימונים המקובלים כיום, נראים כך

$$(\pm 1)i = \pm i \quad , \quad (+i)(+i) = -1$$
$$(\pm 1)(-i) = \mp i \quad , \quad (-i)(+i) = +1$$
$$(-i)(-i) = -1 \quad , \quad (+i)(-i) = +1$$

בנוסף לכך הוא הביא דוגמאות שכללו חיבור וכפל של מספרים מרוכבים, כגון $8i + (-5i) = 3i$, וכן

$$(\sqrt[3]{4+\sqrt{2}i})(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}i}) = \sqrt[3]{8+11\sqrt{2}i}$$

בכך הניח בומבלי למעשה את אבן הפינה לתורת המספרים המרוכבים

ספרי לימוד רבים, גם ברמה אוניברסיטאית, מציגים את ראשיתם של המספרים המרוכבים בפתרון משוואות ריבועיות, ובפרט במשוואה $x^2 + 1 = 0$ אולם, כפי שצוין קודם לכן, היתה זו דווקא המשוואה ממעלה שלישית ולא הריבועית אשר הביאה להופעתם של המספרים המרוכבים

התפתחות

עבודתו של בומבלי היתה רק ראשית עלילותיהם של המספרים המרוכבים למרות שסיפרו L'Algebra היה נפוץ מאוד, נותרו המספרים המרוכבים אפופים במסתורין, זכו להבנה מועטה, ולעיתים קרובות המתמטיקאים התעלמו מהם באופן מוחלט מעידה על כך הערתו של סטבין (Simon Stevin) משנת 1585 (Crossley, 1980) יש מספיק עניינים לגיטימיים, אפילו רבים לאין ספור, לעסוק בהם מבלי להפסיד זמן בעניינים חסרי ודאות ספקות דומים בנוגע ללגיטימציה ולמשמעות של המספרים המרוכבים נמשכו כ־250 שנים יחד עם זאת, במשך כל אותה תקופה המשיכו להשתמש במספרים מרוכבים, ומספר רב של עבודות תאורטיות נכתבו אודותם נדגים זאת בדוגמאות אחדות

ב־1620 טען אלברט גיררד (Albert Girard), כי למשוואה ממעלה n יכולים להיות n שורשים ניסוחים כאלה של המשפט היסודי של האלגברה היו מעורפלים ובלתי ברורים רנה דקרט (Rene Descartes), אשר טבע את המונח האומלל "מספרים מדומים" כשם למספרים החדשים, טען כי למרות שאנו יכולים אולי לדמיין לעצמנו שמספר השורשים של כל משוואה הוא כמעלת המשוואה, לכמה מהשורשים הדימיוניים שהעלנו בדעתנו לא מתאים שום מספר (ממשי)

אופייני לאותה תקופה הציטוט, שנלקח מתוך מכתב משנת 1673 המכתב נשלח על־ידי הויגנס (Christian Huygens) ללייבניץ (Gottfried von Leibniz), בתגובה למכתבו של זה האחרון, ובו הזהות

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$$

> הערתך בנוגע לכמויות המדומות, שכאשר מחברים אותן מתקבלת בכל זאת כמות ממשית הינה מפתיעה וחדשנית קשה להאמין שהסכום $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}$ הוא 6 יש כאן משהו נסתר, הנשגב מבינתי

לייבניץ (1646–1716), אשר השקיע מאמצים רבים בנסיון לפתור את בעית המשמעות של המספרים המרוכבים, ובניתוח האפשרות של גזירת תוצאות מהימנות על־ידי יישום של חוקי האלגברה המקובלים למספרים אלה, ראה במספרים מרוכבים "מקלט נהדר של הרוח האלוהית — משהו אמפיבי כמעט בין קיום לחוסר קיום" (Leapfrogs, 1980)

במהלך המאה ה־18 היו המספרים המרוכבים בשימוש נרחב לייבניץ וג'ון ברנולי (John Bernoulli) השתמשו במספרים המדומים לביצוע אינטגרציה למשל,

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \int \frac{1}{(x+ai)(x-ai)}dx$$
$$= -\frac{1}{2ai}\int\left(\frac{1}{x+ai} - \frac{1}{x-ai}\right)dx$$
$$= -\frac{1}{2ai}[\log(x+ai) - \log(x-ai)]$$

שימוש זה העלה את בעית המשמעות של לוגריתם של מספר מרוכב ולוגריתם של מספר שלילי מחלוקת גדולה התפתחה בין לייבניץ לבין ברנולי לייבניץ טען, למשל, כי $\log i = 0$, משום ש $\log(-1)^2 = \log 1^2$ לפיכך $2\log(-1) = 2\log 1 = 0$ לכן, $\log(-1) = 0$, ומכאן נובע כי $0 = \log(-1) = \log i^2 = 2\log i$ כלומר, $\log i = 0$
ברנולי טען לעומתו כי $\log i = (\pi i)/2$, וזאת מתוך הזהות של אוילר — $e^{\pi i} = -1$ שממנה מקבלים $\log(-1) = \pi i$, ולכן $\log i = \frac{1}{2}\log(-1) = (\pi i)/2$ המחלוקת הוכרעה לבסוף על־ידי אוילר (Leapfrogs, 1978, Leonhard Euler)

לאמבר (Johann Lambert) נעזר במספרים המרוכבים בשירטוט מפות, דלאמבר (Jean D'Alembert) בהידרודינמיקה כמו כן דלאמבר, אוילר ולגרנז' (Joseph-Louis La-Grange) השתמשו במספרים אלה בהוכחות, (לא נכונות), של המשפט היסודי של האלגברה (Euler, אגב, היה הראשון אשר סימן את $\sqrt{-1}$ על־ידי i)

אוילר, אשר קישר בעזרת המספרים המרוכבים בין הפונקציות המעריכיות לפונקציות הטריגונומטריות על־ידי הנוסחה $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ התבטא לגביהם כך (Kline, 1972)

היות שכל המספרים העולים על הדעת הם גדולים מאפס, קטנים מאפס או שווים לאפס, הרי ברור ששורש של מספרים שליליים אינו יכול להיות כלול בין המספרים האפשריים ונסיבות אלו מובילות אותנו לרעיון של מספרים אלו, אשר מטבעם הם בלתי אפשריים, ונקראים בדרך כלל דימיוניים או מדומים, היות שהם קיימים בדמיון בלבד

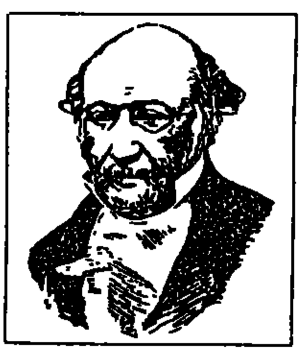
אפילו גאוס הגדול (Carl Friedrich Gauss), אשר בעבודת הדוקטורט שלו מ־1797 הביא את ההוכחה הנכונה הראשונה של המשפט היסודי של האלגברה, טען ב־1825 כי "המטאפיסיקה האמיתית של $\sqrt{-1}$ היא חמקמקה" (Kline, 1972)

חשוב לציין, כי השאיפה למצוא הסבר לוגי מניח את הדעת למספרים המרוכבים, התגברה מאד לקראת סוף המאה ה־18, וזאת בשל סיבות פילוסופיות, ולא רק מטעמים מעשיים בתקופה זו ראו במתמטיקה מודל שיש ללכת בעקבותיו לא רק במדעי הטבע, אלא גם בחשיבה הפילוסופית, ואפילו בחשיבה הפוליטית והחברתית לכן, העדרו של הסבר רציונלי מספק למספרים המרוכבים הטריד רבים

בתחילתה של המאה ה־19, הפכה הבעיה של מתן צידוק לוגי לחוקי הפעולות על מספרים שליליים ומרוכבים גם לבעיה פדגוגית מעיקה במקומות רבים, בין היתר באוניברסיטת קמברידג' הואיל ומוסדות החינוך ראו במתמטיקה פרדיגמה של חשיבה רציונלית, חוסר שביעות הרצון הבולט מהצדקת הפעולות במספרים שליליים ומרוכבים על בסיס לוגי הפך לקשה מנשוא שאלות כגון "מדוע $2 \cdot i = i \cdot 2$" ו "האם $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ מתקיים גם עבור מספרים שליליים a ו־b" לא זכו למענה הולם למעשה, אוילר, בכתביו מ־1760, טען כי $\sqrt{-1}\sqrt{-4} = \sqrt{4} = +2$ הינה תוצאה אפשרית

בשנת 1802 הביע וודהאוס (Robert Woodhouse) את הדעה, שהואיל והמספרים המדומים מובילים למסקנות נכונות, מוכרח להיות בהם הגיון בסביבות 1830, הציבו לעצמם מתמטיקאים מאוניברסיטת קמברידג' וביניהם פיקוק (George Peacock) מטרה להראות את ההגיון במספרים המרוכבים על־ידי קביעת חוקי הפעולות בהם למרות שמאמציהם לא פתרו בצורה מספקת את בעית המספרים המרוכבים, היתה זו אולי הדוגמה הראשונה של "מערכת אקסיומטית" באלגברה

בשנת 1831 הצליח גאוס להתגבר על היסוסיו בקשר למספרים המרוכבים כחלק מעבודתו על תורת המספרים פירסם את תוצאותיו על היצוג הגיאומטרי של מספרים מרוכבים כנקודות במישור ייצוגים דומים שניתנו עוד קודם לכן על־ידי הנורבגי ווסל (Caspar Wessel) ב־1797, ועל־ידי השוויצרי ארגנד (Jean-Robert Argand) ב־1806, לא זכו לתשומת־לב הייצוג הגיאומטרי שקיבל את אישורו של גאוס הסיר את רוב מעטה המיסתורין אשר אפף את המספרים המרוכבים במשך שני העשורים העוקבים התרחשו התפתחויות נוספות בשנת 1833, ניסח המילטון (William Rowan Hamilton) הגדרה אלגברית מדויקת של המספרים המרוכבים, כזוגות של מספרים ממשיים ב־1847 הביא קושי (Augustin Louis Cauchy), הגדרה שלמה, קפדנית ומושלמת למספרים המרוכבים, במונחים של מחלקות שקילות של פולינומים ממשיים מודולו x^2+1 (Kline, 1972)



וויליאם רואן המילטון
(1805-1865)

בגרות

לקראת סוף המאה ה־19, ניתן היה לומר כי הוסרו לחלוטין השרידים האחרונים של המיסתורין וחוסר האמון שאפפו את המספרים המרוכבים. למרות זאת, מוצאים בספרי הלימוד עוד הרבה אחרי תחילת המאה העשרים הבעת ספקות ביחס למספרים אלו. ההגדרות של המספרים המרוכבים שהיו מקובלות בתקופה זו הן

1 נקודות או וקטורים במישור,
2 זוגות סדורים של מספרים ממשיים,
3 אופרטורים (למשל, סיבוב של וקטורים במישור),
4 מספרים מהצורה $a + bi$, בהם a ו־b מספרים ממשיים,
5 פולינומים עם מקדמים ממשיים, מודולו $x^2 + 1$,
6 מטריצות מהצורה
$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$
a,b מספרים ממשיים,
7 שדה שלם סגור אלגברית (השקפה זו שייכת לתחילת המאה ה־20)

למרות שתפיסת המספרים המרוכבים בצורות שונות עלולה להיראות "מבלבלת" יותר מאשר מאירה, מן המקובלות הוא שבמתמטיקה הסתכלות על מושגים ועל ממצאים תאורטיים בהקשרים שונים ומנקודות מבט רבות ככל האפשר תורמת רבות להבנתם

התאור לעיל איננו סוף הסיפור. התפתחויות שונות במתמטיקה במאה ה־19 אפשרו ראייה עמוקה יותר של תפקיד המספרים המרוכבים במתמטיקה ובתחומים אחרים. המספרים המרוכבים יוצרים מסגרת מתאימה להתמודדות עם בעיות בתחומים רבים במתמטיקה כגון באלגברה, באנליזה, בגאומטריה ובתורת המספרים. מספרים אלו הם בעלי סימטריה ושלמות החסרה לעיתים קרובות במערכות מתמטיות, כגון אלו של המספרים השלמים והממשיים. אחדים מהמתמטיקאים הגדולים שתרמו תרומה יסודית בשטחים אלה הטיבו לבטא זאת. שלוש הציטטות הבאות הן מדבריהם של גאוס משנת 1801, של רימן (Riemann) משנת 1851, ושל הדמר (Hadamard) משנת 1890, בהתאמה

> האנליזה היתה מאבדת הרבה מיופיה ומאיזונה, והיתה נאלצת להוסיף הגבלות קשות לאמיתות, שאלמלא כן היו תופסות ככלל, אם היה צריך להתעלם מגדלים מדומים

(Birkhoff 1973)

> המקור והמטרה המיידית של הכנסת גדלים מרוכבים למתמטיקה הם החוקים הפשוטים של תלות בין גדלים משתנים המבוטאים על־ידי פעולות על גדלים. אם מרחיבים את תחום היישום של חוקים אלה למשתנים מרוכבים, מופיעות הרמוניה וחוקיות שעד כה נותרו נסתרות לעין

(Ebbinghauts 1983)

> הדרך הקצרה בין שתי אמיתות בתחום הממשי עוברת דרך התחום המרוכב

(Kline 1972)

תאורים של התפתחויות שהתרחשו לאחר ה"לגיטימיזציה" של המספרים המרוכבים הם, מטבעם, טכניים בעיקרם. ניתן להביא רק דוגמאות מצומצמות ביותר

1 **באלגברה.** פתרון משוואות פולינומיאליות היה הגורם המניע להצגתם של המספרים המרוכבים. לכל משוואה עם מקדמים מרוכבים יש שורש מרוכב. זהו המשפט היסודי של האלגברה. מעבר לשימוש במספרים המרוכבים לפתרון משוואות פולינימיאליות אלגבריות, המספרים הללו מהווים דוגמא לשדה אלגברי סגור, שלבעיות רבות באלגברה ליניארית ובתחומים אחרים של האלגברה המופשטת יש בתוכו פתרון "טבעי"

2 **באנליזה.** במאה ה־19 התפתח ענף יפה ובעל עוצמה במתמטיקה — תורת הפונקציות המרוכבות. ראינו כיצד השימוש במספרים מרוכבים הביא לידי העמקת ההבנה בנושא הפונקציות הלוגריתמיות, המעריכיות והטריגונומטריות. יתר על כן, ניתן לחשב אינטגרלים ממשיים באמצעים של תורת הפונקציות המרוכבות. אחת הדוגמאות הממחישות את עוצמתה של תורת הפונקציות המרוכבות היא שאם פונקציה בתחום המרוכב גזירה פעם אחת, היא גזירה אינסוף פעמים. מובן שתוצאה זו איננה נכונה עבור משתנים ממשיים (למשל, $f(x) = x^{4/3}$)

3 המספרים המרוכבים הכניסו סימטריה וכלליות בניסוח ובתאור של ענפים שונים של הגיאומטריה האויקלידית והלא אויקלידית. כדוגמה, נזכיר את גאוס, אשר בעזרת המספרים המרוכבים הראה כי מצולע משוכלל בעל שבע־עשרה צלעות ניתן לבניה בעזרת סרגל ומחוגה

4 בתורת המספרים ניתן לפתור משוואות דיופנטיות מסוימות על־ידי שימוש במספרים מרוכבים. למשל, המשוואה $x^2 + 2 = y^3$, המבוטאת בצורה $(x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i) = y^3$ ניתנת לפתרון בשלמים, כאשר נעזרים בתחום מרוכב המכיל איברים מהצורה $a + b\sqrt{2}i$ עם a, b שלמים

5 אמירתו של הדמר "המסלול הקצר ביותר בין שתי אמיתות בתחום הממשי עובר דרך התחום המרוכב", מודגמת בצורה יפה בהוכחת הטענה שמכפלת הסכומים של שני ריבועים שלמים היא ריבוע שלם

טענה

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = u^2 + v^2$$

u, v שלמים כלשהם

הוכחה

$$\begin{aligned} &(a^2+b^2)(c^2+d^2) = \\ &(a+bi)(a-bi)(c+di)(c-di) = \\ &[(a+bi)(c+di)][(a-bi)(c-di)] = \\ &(u+vi)(u-vi) = u^2+v^2 \end{aligned}$$

נסו להוכיח תוצאה זו מבלי להשתמש במספרים מרוכבים, ומבלי שיהיו נתונים u ו־v במונחים של a, b, c, d

בנוסף לשימושיהם של המספרים המרוכבים במתמטיקה, נעשה בהם שימוש גם במדע ובטכנולוגיה (למשל, במכניקת הקוונטים, ובמעגלים חשמליים) ה״בלתי אפשרי״ הפך, אם כן, לא רק לאפשרי, אלא גם לחיוני

מוסר ההשכל

מדוע חשובה ההיסטוריה של המתמטיקה? מדוע כדאי לטרוח לספר סיפורים שכאלו? אדוארדס (Edwards) טוען

> למרות שללימוד ההיסטוריה של המתמטיקה יש יופי פנימי משל עצמו, הצידוק האמיתי לקיומה הוא האור שהיא שופכת על המתמטיקה עצמה

עמיתי שניצר (Abe Shenitzer) מנסח זאת כדלקמן

> ניתן להמציא מתמטיקה מבלי לדעת הרבה על ההיסטוריה של המתמטיקה. אפשר להשתמש במתמטיקה מבלי לדעת הרבה, או בכלל, על ההיסטוריה שלה. אך אי־אפשר להעריך הערכה בוגרת את המתמטיקה בלי ידע בסיסי של ההיסטוריה שלה

חשוב, שהערכה שכזאת תהיה למורים. הדבר יספק להם ראיה עמוקה, מוטיבציה ופרספקטיבה — מרכיבים חיוניים של הוראה טובה

במקרה של הסיפור שסיפרנו זה עתה הקורא הוא זה שיחליט באיזו מידה הוא הצליח להשיג מטרות אלו. יחד עם זאת, מעבר למטרה המיידית של הראיה לעומק, סיפור זה ואחרים כמותו יכולים לתת הבנה טובה יותר של האופי והצורה של התפתחות המתמטיקה. בעקבות התאור ההסטורי עולות סוגיות ושאלות אחדות

1 **משמעותם של המספרים במתמטיקה.** מספרים מרוכבים אינם מתיישבים באופן מיידי עם תפיסתם של התלמידים לגבי מהותו של מספר. מובן כי המשמעות של מספר השתנתה במהלך השנים, וסיפור זה מדגים זאת היטב. כמו כן הוא מוביל לשאלה האם קיימים מספרים מעבר למספרים המרוכבים

2 **התפקיד היחסי של צרכים פיזיים ושל סקרנות אינטלקטואלית כגורמים מניעים להתפתחות המתמטיקה.** בהקשר זה יש להצביע על כך שבעיית הפתרון של משואה ממעלה שלישית, שהיתה המניע להצגתם של המספרים המרוכבים, לא היתה בעיה מעשית. באותה תקופה המתמטיקאים כבר ידעו למצוא שורשים מקורבים למשוואות ממעלה שלישית. המטרה היתה למצוא נוסחה אלגברית תאורטית שתתן את הפתרון ללא כל תוצאות מעשיות. למרות זאת, הפכו המספרים המרוכבים לחיוניים מאד׳ זוהי תופעה חוזרת ונשנית בהתפתחות המתמטיקה

3 **התפקיד היחסי של האינטואיציה ושל ההיגיון בהתפתחות המתמטיקה.** פורמליזציה, דיוק ופיתוח לוגי של מושג או תוצאה באים, בדרך־כלל, עם סיומו של תהליך ההתפתחות המתמטית. גם עבור המספרים המרוכבים תחילה בא היישום (תאורטי יותר מאשר מעשי), לאחר מכן ההבנה האינטואיטיבית, ולבסוף ההצדקה המופשטת

4. **טבען של הוכחות במתמטיקה.** שאלה זו קשורה לסוגיה הקודמת, אך איננה עוסקת כמו 3 בהיבט הנרחב של התפתחות המרוכבים, אלא בשאלות מקומיות של הוכחה ודיוק בביסוס תוצאות שונות בתחום המספרים המרוכבים (למשל, חישוב הערך של log i, כפי שהוצג על־ידי לייבניץ וברנולי). דבר אחד ברור. מה שהיה מקובל כהוכחה במאות ה־17 וה־18, לא התקבל כהוכחה במאות ה־19 וה־20. המשמעות של הוכחה במתמטיקה התפתחה במהלך השנים, כפי שהיא עדיין מתפתחת, ולאו דווקא בכיוון הנוקשה יותר (למשל, ההוכחה לבעית ארבעת הצבעים, אשר התקבלה לאחרונה באמצעות מחשב[1])

דביס (Philip Davis, 1965) מתקדם צעד נוסף בתאור ההתפתחות של רעיונות מתמטיים

> פרדוקסלי הדבר, שבעוד שלמתמטיקה יש שם של תחום ללא סתירות, הרי שבמציאות יש לה היסטוריה ארוכה של דו־קיום עם סתירות. הדבר בולט במיוחד בהרחבת מושג המספר, כפי שהתפתח במשך כ־2500 שנים. החל מקבוצות מוגבלות של שלמים, לקבוצות אינסופיות של שלמים, לשברים, למספרים שליליים, למספרים אירציונליים, למספרים מרוכבים ולמספרים טרנסנדנטיים. כל הרחבה התגברה, בדרכה שלה, על דרישות סותרות

5 **תפקיד הפרט והסביבה ביצירת המתמטיקה.** מה היה תפקידו של בומבלי, כפרט, ביצירת המספרים המרוכבים? הרי לקרדן היתה ההזדמנות לצעוד צעד נועז ב״חשיבה על הבלתי ניתן לחשיבה״. האם הסביבה באותו זמן לא היתה בשלה דיה לקבל את תוצאותיו, אך היתה בשלה שלושים שנה לאחר מכן לקבל את טענותיו של בומבלי? האם יש אמת בדעה של בוליי (John Bolyai) האומר ״לתגליות מתמטיות, כמו לסיגליות האביב, יש עונת פריחה, ואיש אינו יכול לעכבן או להאיצן״ (Kline, 1972)? מסקנה זו נולדה מתוך דוגמאות רבות של תגליות סימולטניות ובלתי תלויות, כמו הייצוג הגיאומטרי של המספרים המרוכבים על־ידי וסלף, ארגנד וגאוס. המספרים המרוכבים הם הקשר מעניין להעלאת שאלות שכאלה — שאלות שאין לנו עליהן תשובות חותכות

1) ראה המאמר ״בעית ארבעה הצבעים״ בגיליון זה

6 **עיקרון המורשת בחינוך המתמטי.** מהם המקורות של מושג או משפט? מאין באו? מדוע הטריח עצמו מישהו בכדי? אלו הן שאלות מרתקות, ועל המורה להיות מודע לתשובות עליהן. איך וכיצד להשתמש במידע זה בכיתה, זו סוגיה אחרת. פויה (George Polya, 1962) אומר

> בהבננו כיצד הגזע האנושי רכש את הידע על עובדות מסוימות ומושגים שונים, אנו בעמדה טובה יותר מבחינת יכולתנו להבין כיצד על ילדים לרכוש ידע זה

האם לא תהיה לנו הערכה טובה יותר לקשיי התלמידים בלמידת מושג המספרים המרוכבים, אם נהיה מודעים לקשיים בהם נתקלו מתמטיקאים מהשורה הראשונה?

מספר הצעות למורה

אסיים במספר הערות והצעות לגבי השימוש בהיסטוריה של המתמטיקה בהוראת המתמטיקה, במיוחד בהקשר של המספרים המרוכבים. רבות מהנקודות כבר צויינו בסיפור שסופר

1 תחילה אחזור שנית על מה שאני רואה כתרומה עיקרית של סיפור זה למורה. פויה ניסח זאת היטב

> כדי ללמד ביעילות, על המורה לפתח רגישות לנושא. אין הוא יכול להביא את התלמיד לחוש את החיוניות שבו, אם אינו חש אותה בעצמו. אין הוא יכול לחלוק עימם את התלהבותו, אם אין הוא עצמו נלהב. הדרך בה הוא מבהיר את הדברים חשובה כמו הדברים עצמם. הוא מוכרח לחוש באופן אישי את החשיבות

מטרת סיפורי, לפיכך, היא לתת למורה תחושה לגבי המספרים המרוכבים, ולהדביקו במעט התלהבות.

אני מדגיש שהדברים הם בגדר הצעות בלבד. מובן מאליו שהמורה עצמו הוא זה שיכול להיטיב לשפוט מתי, איך, באיזו רמה ובאיזה הקשר להציג ולהתיחס לחומר ההיסטורי. בכל מקרה ברור שהלקח אותו יכול התלמיד ללמוד מתוך ההיסטוריה של המתמטיקה איננו, בדרך כלל, מועבר בתוכנית הלימודים הרגילה

2 מתמטיקה הינה דיסיפלינה מלאת חיים ורחוקה מלהיות סטטית. הדינמיות שלה מלאה בכשלונות כמו גם בהצלחות

3 תצפיות, אנלוגיות, אינדוקציה ואינטואיציה הן לעיתים קרובות הדרך הטבעית יותר לרכישת ידע מתמטי. דיוק והוכחה באים, בדרך כלל, בתום התהליך.

4 ברוב המקרים, היישומים המעשיים אינם מטרידים את המתמטיקאי במהלך היצירה. היישום, אם אכן קיים, בא מאוחר יותר, לעיתים אף כמה מאות שנים אחר כך. נקודה זו מתייחסת ל״רלוונטיות מיידית״ אותה מחפש התלמיד בכל נושא המוצג בפניו בכתה

5 אנו מוכרחים, אם כן, לספק לתלמיד את ה״רלוונטיות הפנימית״ כאשר אנו מציגים בפניו מושג או תוצאה. וכאן אנו מגיעים לבעיה החשובה והקשה של מוטיבציה. ישנם תלמידים אשר יוקסמו מיישומו של משפט, ויש אשר יוקסמו מהמבנה הלוגי הפנימי של המשפט. לרוע המזל, נטייתנו כמורים היא לזנוח את סוגית מקורו של המשפט. כיצד צמח? מה הניע את המתמטיקאי להציגו? ביחס למספרים המרוכבים — חשוב להדגיש כי מקורם בפתרון משוואה ממעלה שלישית ולא שניה. אולם, יש להניח לשיקול דעתו של המורה את ההחלטה עד כמה להרחיב בסיפור ההיסטורי

6 רצוי לתת לתלמיד מטלות לחקירה הנגזרות מתוך סיפורם של המספרים המרוכבים. נושאים אפשריים לחקירה הם

א הלוגריתם של מספר שלילי, ושל מספר מרוכב,
ב מהו מספר? — דיון בהתפתחות מערכות מספרים שונות, והתפתחות תפיסתנו לגבי מהו מספר,
ג מספרים היפרמרוכבים (כלומר — קווטרניונים) גילויים מהווה סיפור מרתק בפני עצמו,
ד מחלקות השקילות של השלמים על פי גאוס, ומחלקות השקילות של פולינומים על פי קושי. זה האחרון מוליך להגדרה חדשה של המספרים המרוכבים
ה איפיון אקסיומטי של המספרים המרוכבים. בהקשר זה, יש לדון באיפיון מערכת מתמטית, ולפיכך גם במושג האיזומורפיזם

7 קיימות דוגמאות בסיסיות ומענינות המדגימות את הערתו של הדמר ״המסלול הקצר ביותר בין שתי אמיתות בתחום הממשי עובר בתחום המרוכב״. אנו מתכוונים לתוצאות בסיסיות בענפי המתמטיקה השונים, אשר בניסוחן לא מוזכרים מספרים מרוכבים, אך בהוכחותיהן ה״טובות ביותר״ משתמשים בהם. דוגמא כזאת הוצגה במאמר ודוגמאות נוספות אפשר למצוא ב — Cell (1950), Jones (1954), NCTM (1969), המופיעים ברשימת המקורות

רשימת ספרות

Birkhoff, Garrett, *A Source Book in Classical Analysis* Cambridge, Mass Harvard University Press, 1973

Burton, David M *The History of Mathematics* Boston Allyn & Bacon, 1985

Cell, John W "Imaginary Numbers" *Mathematics Teacher* 43 (December 1950) 394-96

Crossley, John N *The Emergence of Number* Victoria, Australia Upside Down A Book Co 1980

Dantzig, Tobias *Number — The Language of Science* New York The Free Press, 1930, 1967

Davis, Philip J *The Mathematics of Matrices* Waltham, Mass Blaisdell Publishing Co, 1965

Ebbinghause, Heinz Dieter, et al *Zahlen* Heidelberg Springer-Verlag, 1983

Nagel, Ernest, Impossible Numbers A Chapter in the History of Modern Logic *Studies in the History of Ideas* 3 (1935) 429-74

National Council of Teachers of Mathematics *Historical Topics for the Matheamtics Classsroom* Thirty first Yearbook Washington, D C The Council, 1969

Polya, George *Mathematical Discovery* New York John Wiley & Sons, 1962

Sondheimer, Ernest, and Alan Rogerson *Numbers and Infinity — an Historical Account of Mathematical Concepts* New York Cambridge University Press, 1981

Struik, Dirk J *A Source Book in Mathematics 1200-1800* Cambridge Mass Harvard University Press, 1969

Windred, G History of the Theory of Imaginary and Complex Quantities *Mathematical Gazette* 14 (1930?) 533-41

Edwards, Charles H *The Historical Development of the Calculus* New York Springer-Verlag, 1974

Flegg, Graham, *Numbers — Their History and Meaning* London Andre Deutsch, 1983

Jones, Philip S "Complex Numbers An Example of Recurring Themes in the Development of Mathematics — I-III" *Mathematics Teacher* 47 (February, April, May 1954) 106-14, 257-63, 340-45

Kline, Morris *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* New York Oxford University Press, 1972

Leapfrogs Imaginary Logarithms Fordham, Ely, Cambs, England E G M Mann & Son, 1978

Leapfrogs Complex Numbers Fordham, Ely, Cambs, England E G Mann & Son, 1980

McClenon, R B "A Contribution of Leibniz to the History of Complex Numbers" *American Mathematical Monthly* 30 (November 1923) 369-74

התגלה המספר הראשוני הגדול ביותר — בן 227,832 ספרות

מתוך עיתון "הארץ", בתאריך 27 3 92