שיטת הקירוב הלינארי: לא עוד חשבון דיפרנציאלי כגזירה משמים

מאת **אנה ספרד***, האוניברסיטה העברית

לבאים במגע עם הקירוב הלינארי קשה להשאר אדישים המושג מוצע למורים המלמדים אנליסה ברמה של 4 או 5 יחידות כרעיון מרכזי שסביבו יבנה, בסופו של דבר, כל החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי מאז יצאה תוכנית המתמטיקה החדשה לדרכה נמשך הוויכוח על יתרונותיה וחסרונותיה של השיטה יש המתפעלים מן הרעיון ויש המטילים ספק ביכולתו לחולל ניסים רק מעטים מצליחים לשמור על שוויון נפש ואין פלא בין כל החידושים שמביאה עמה התוכנית החדשה, רעיון הקירוב הלינארי הוא, במובן מסויים, הבעייתי ביותר זאת משום שהאתגר שמציבה בפני המורה **גישה חדשה לנושא ישן** עשוי להיות קשה אף מזה שמתעורר כשמלמדים נושא חדש לגמרי הלא רכישת הרגל חדש היא לעיתים משימה קלה יותר מאשר גמילה מהרגל ישן

מאמר זה, הנכתב על־ידי חברה בצוות מחברי ספרי הלימוד החדשים באנליסה, מוקדש לדיון באותם הבטים של גישת הקירוב הלינארי (גישת הק״ל, בקיצור) שחיבבו את הרעיון על ליבם של מפתחי התוכנית החדשה בהמשך תתוארנה גם הסכנות והמלכודות שהמורה חייב להיות מודע לקיומן במהלך ההוראה

במסגרת הביקורת על תוכניות לימודים מסורתיות במתמטיקה, שנמתחה פעמים רבות הן על־ידי מורים והן על־ידי חוקרים נאמר, כי תוכניות אלה, רובן ככולן, הדגישו שליטה בפרוצדורות חישוביות ושילמו מס שפתיים לביסוסן התיאורטי אחת המטרות שהציבו לעצמם מציעי התוכנית החדשה הוא, ללא ספק, יעד שלא קל להשיגו להפוך את למידת המתמטיקה למשמעותית יותר — לעזור לתלמיד להגיע להבנה של המושגים המתמטיים המסתתרים מאחורי האלגוריתמים

כדי למנוע אי־הבנות חשוב לציין, כי לכותבי הספרים היתה דעה מפוקחת על תרומתה האפשרית של תוכנית לימודים למימושה של המטרה שקבעו לעצמם בבואם להציע דרכי גישה חדשות לנושאים מסורתיים הם לא התיימרו לתת תרופת פלא לחוליים ישנים איש מהם לא סבר, כי הבעיות שאיתן התמודדו דורות של מורים ושל תלמידים תפתרנה כבמטה־קסמים בזכות ההצגה החדשה של נושא לימוד קשה מטיבעו אף על פי שעשו כמיטב יכולתם כדי שהתאורים בספרי הלימוד יהיו משכנעים וברורים, לא חשבו כי חומרים אלה כשלעצמם יחוללו מהפכה בכיתה יהיה הסבר הניתן על־ידי המורה או בספר בהיר ככול שיהיה, הוא לא ישכנע תלמיד שאינו מקשיב ושאינו מוכן להשקיע מאמץ אמיתי בבניית הידע עם זאת סברו הכותבים, כי דרך ההצגה המיוחדת המוצעת על־ידם פותחת אפשרויות שלא היו קיימות בתוכנית הלימודים המסורתית לתלמיד המוכן למלא תפקיד פעיל בחיפוש אחר המשמעות מגישים ספרי הלימוד החדשים מפת דרכים ומקל הליכה המפתחים היו מודעים כמובן לכך, כי לא רבים הם התלמידים שיקחו ביוזמתם את אשר מוצע להם על־כן, למורה יהיה בעיניהם תפקיד חשוב ביותר במימוש הפוטנציאל הטמון בשיטה היה ברור מלכתחילה שתנאי הכרחי להצלחת ההצעות החדשניות הוא יכולתו של המורה ליצור אצל התלמידים מוטיבציה לימודית גבוהה ולהפוך אותם למשתתפים פעילים בתהליך בניית הידע

1. גישת הקירוב הלינארי — מהי?

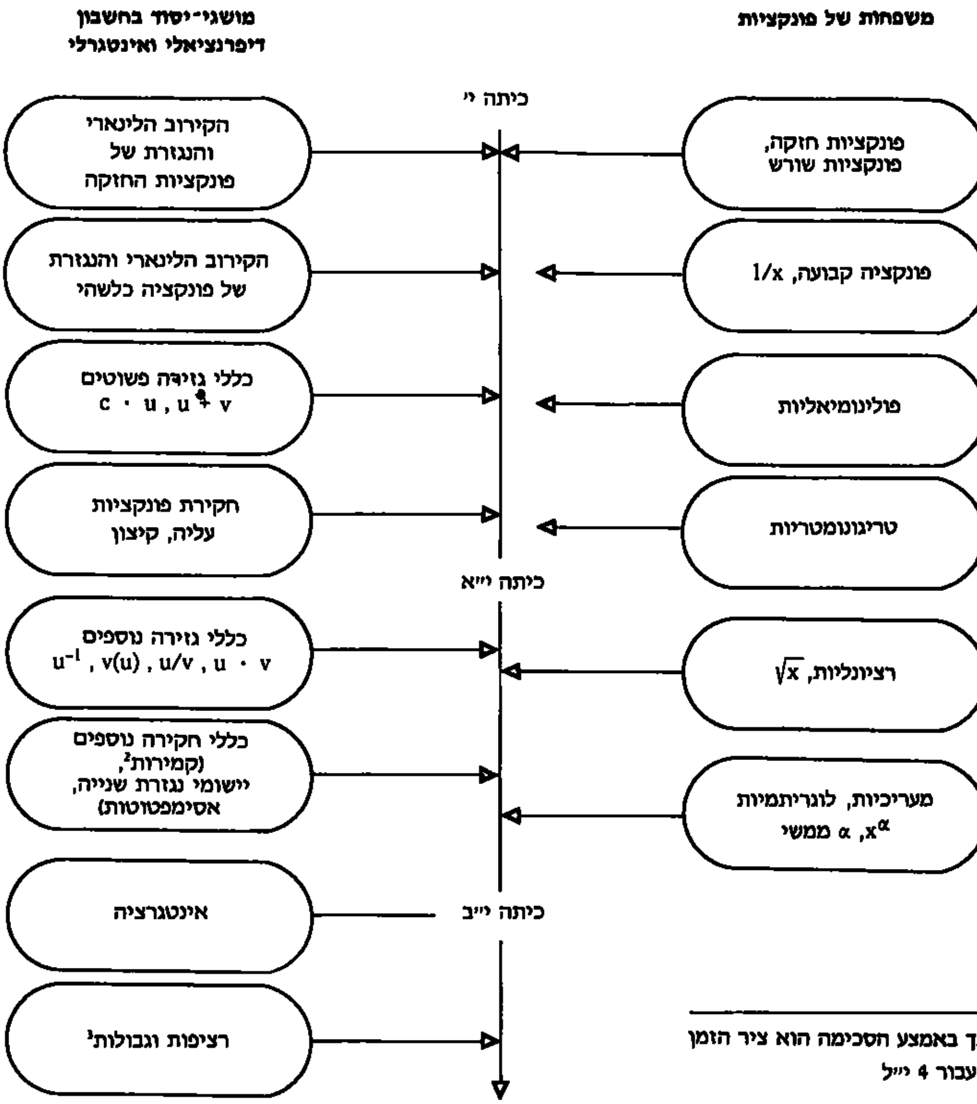
הרעיון הדידקטי המרכזי של התוכנית החדשה, לפחות ברמות של 4 ושל 5 יחידות לימוד, הוא לפתח את ההבנה על־ידי שיתופו של התלמיד בתהליך בניית המושגים הבסיסיים גישת הקירוב הלינארי נמצאה מתאימה יותר למטרה זו מאשר השיטה המסורתית הרעיון אינו מתוצרת בית — במספר מקומות בעולם (בצרפת, למשל) השתמשו בו עוד לפנינו בחיפוש אחר המקורות הראשוניים של מושג הקירוב הלינארי מגיעים אל איזיק ניוטון — אחד האבות המייסדים של אנליסה מתמטית בעבודותיו החלוציות עבר ניוטון דרך דומה לזו המוצעת היום לתלמידינו

אפתח בהצגה קצרה של רעיון הקירוב הלינארי ושל מקומו בתוכנית הלימודים. הסקירה תהיה מהירה והיא נעשית כאן למען אלה שטרם באו במגע קרוב עם תוכנית המתמטיקה החדשה תאור מפורט של הנושא נמצא ב־[1]

---

*תודתי נתונה לפרופסור שמשון עמיצור ולפרופסור עוזיאל לוי על הערותיהם המועילות הרעיונות המוצגים במאמר זה הם תוצר של עבודה רבת שנים של צוות בראשותם של פרופ׳ ש עמיצור ושל פרופ׳ מ משלר

מסגרת 1: לימודי אנליזה בחטיבה העליונה, ברמה של 4 ו־5 יחידות.
סדר הצגת המושגים[1]



1 הציר המאונך באמצע הסכימה הוא ציר הזמן
2 חומר רשות עבור 4 י״ל
3 חומר רשות

לפי התוכנית החדשה, יסודות האנליסה המתמטית נלמדים בחטיבה העליונה החל מכיתה י׳ המושג המרכזי, שסביבו מאורגן כל הנושא, הוא מושג **הפונקציה** האנליסה מוצגת לתלמיד כמקצוע שבמסגרתו עורכים הכרות עם סוגים שונים של פונקציות ממשיות, עם תכונותיהן של פונקציות אלה, עם דרכי הצגתן ועם יישומיהן התלמידים לומדים בזו אחר זו משפחות של פונקציות אלמנטריות — פונקציות חזקה, פולינומיאליות, רציונליות, טריגונומטריות, מעריכיות ולוגריתמיות הלומד דן בתכונותיהן, משרטט את הגרפים שלהן ומשתמש בהן כבמודלים מתמטיים לתופעות מציאותיות

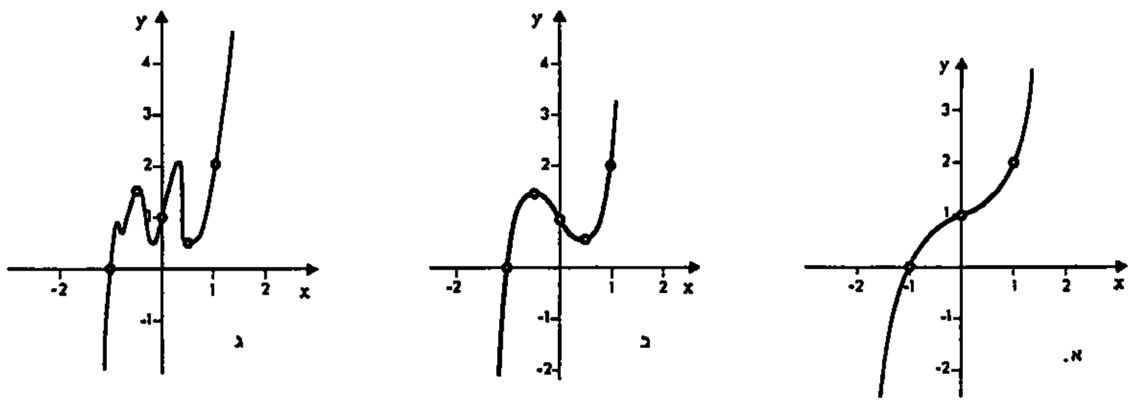
המושגים הבסיסיים של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי מתפתחים בהדרגה ובהתאם לצרכים (ראה מסגרת 1) הצרכים נקבעים על־ידי הפונקציות שעוסקים בהן ברגע זה כל עוד מדובר בפונקציות פשוטות — הכלים האנליטיים הם פשוטים כשנעשות הפונקציות מורכבות יותר, עולה התיחכום של המכשירים לחקירתן

העיסוק בנושא מתחיל כבר בחטיבת הביניים, שם לומדים הילדים לשרטט גרפים של פונקציות לינאריות וריבועיות השיטה שבה עובדים בשלב זה היא פשוטה בוחרים מספר נקודות על ציר x, בונים טבלת ערכי הפונקציה בנקודות אלה, מציינים את הנקודות שחושבו בתוך מערכת צירים, ולבסוף מחברים את הנקודות "ביד חופשית ובקו חלק ככול האפשר" ואת תכונות הפונקציה "קוראים" מתוך הגרף שהתקבל בדרך זו בתחילת כיתה י' חוזרים אל "שיטת הטבלה" כאשר בודקים את תכונותיהן של פונקציות החזקה ושל פונקציות השורש הקירוב הלינארי, ויחד עמו הנגזרת, באים בעיקבות ניתוח מדוקדק של מספר דוגמאות (כגון זו שבמסגרת 2) המעוררות ספק באשר ליעילות ולאמינות של שיטה זו

מתוך הדיון עולים לא רק הצורך במכשיר אמין לחקירת פונקציות, אלא גם רעיונות מקוריים באשר לשיטת בנייתו מתברר, שכאשר מנסים לראות גרף של פונקציה בצורה ברורה ככול האפשר וכשעל־כן מתמקדים בנקודה אחת ומסתכלים על סביבה קטנה שלה "מבעד למקרוסקופ", עשוי הקטע המתאים של הגרף להתיישר ו"להעמיד פנים" של קו ישר (מסגרת 3) התופעה נראית מבטיחה אם נדע תמיד למצוא את הישרים המתקבלים בתמונות מיקרוסקופיות של הגרף, כי אז נוכל להסיק מתכונותיהם של ישרים אלה את תכונותיו של גרף הפונקציה עצמה עד כה שורטט הגרף על־פי נקודות בדידות, מעתה נוכל להסתמך גם על המידע הטמון בישרים המקרבים אותו

מסגרת 2: אין לסמוך על "שיטת הטבלה"

גרף הפונקציה $f(x) = 2x^5 - x + 1$ בתחום $(-2,2)$ מקבל צורות שונות כשהוא משורטט על־פי טבלאות שונות



טבלה ראשונה

x	2	1	0	1	2
f(x)	61	0	1	2	63

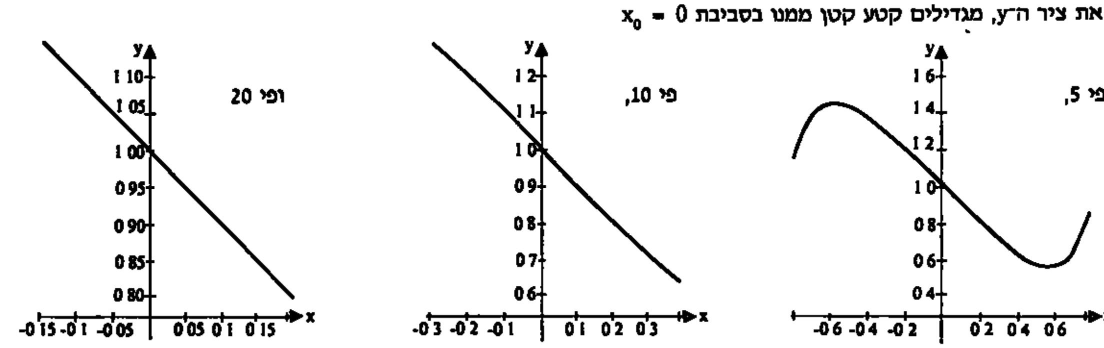
טבלה שנייה, "צפופה" יותר

x	2	1	1/2	0	1/2	1	2
f(x)	61	0	1 43	1	0 56	2	63

וכעת, מי יבטיח שהגרף אינו נראה כמו בציור זה

מסגרת 3: גרף מבעד למיקרוסקופ

כדי לקבוע את צורתו האמיתי של גרף הפונקציה $f(x) = 2x^5 - x + 1$ (ראה מסגרת 2) בקירבת הנקודה שבה הוא חותך את ציר ה־y, מגדילים קטע קטן ממנו בסביבת $x_0 = 0$



בהגדלה פי 20 התקבל, למעשה, קו ישר

נשאלת על כן השאלה, כיצד נגלה את "הישרים הקרובים" לקטעים השונים של הגרף במקרה של פונקציות החזקה התשובה אינה מסובכת מסתכלים בערכים של הפונקציה בנקודות $x = x_0 + h$ הקרובות לנקודה נתונה x_0, $f(x_0 + h) = (x_0 + h)^n$, פותחים את הסוגריים ובוחרים את המחוברים הלינאריים ב־h בלבד (כאלה שבהם החזקה של h אינה עולה על 1) $x_0^n + nx_0^{n-1}h$ מחוברים אלה תורמים את התרומה העיקרית לשינוי ערכה של f בקירבת x_0, תרומתו של המחובר שזנחנו, h^2, קטנה מאד **יחסית** לזו של $nx_0^{n-1}h$ כאשר h קרוב לאפס (ראה חישובים שממחישים זאת ב [1], כרך א', עמ' 45) ברור, על כן, כי הישר המוגדר על־ידם אכן כמעט מתלכד עם הגרף של f בסביבה קטנה של x_0 מציבים $x - x_0$ במקום h ומקבלים פונקציה לינארית ב־x קרובה מאד בערכיה לפונקציה f בסביבה קטנה של הנקודה x_0

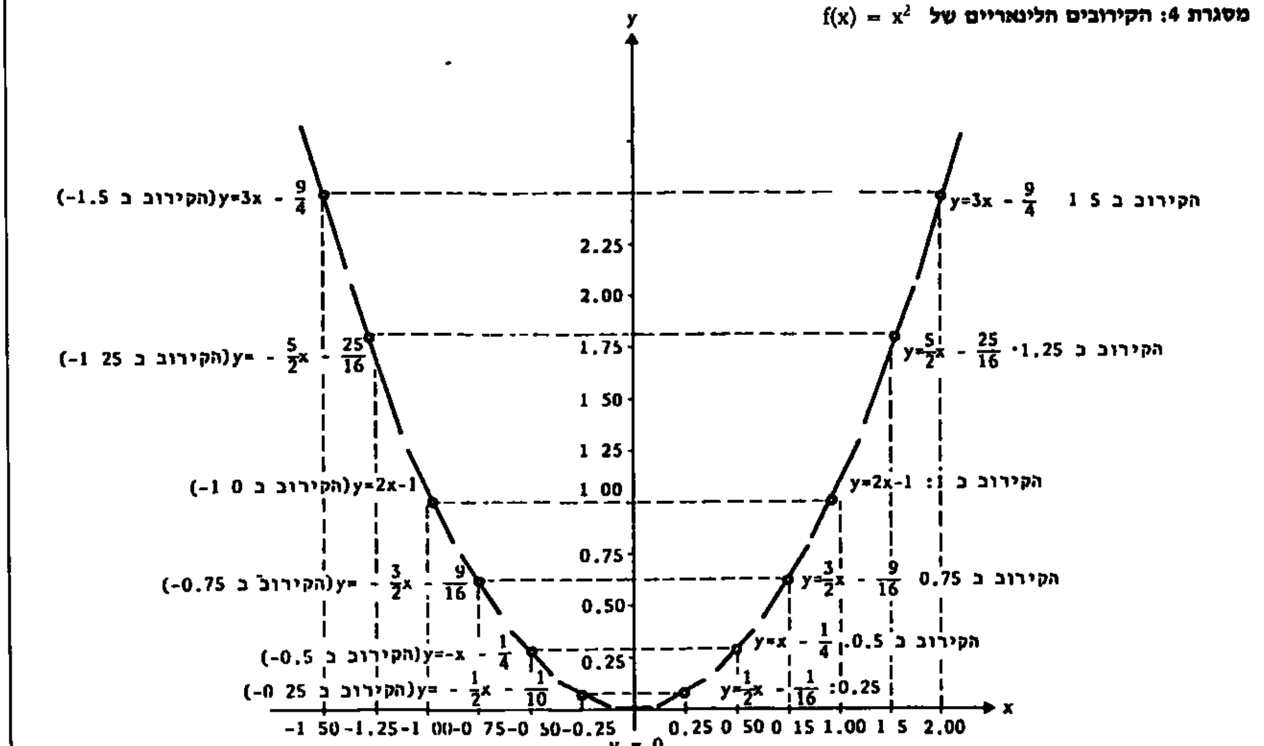
$$y = x_0^n + nx_0^{n-1}(x - x_0)$$

בדרך זו מגדירים בבת אחת משפחה שלמה של פונקציות לינאריות (לכל x_0 מתקבלת משוואה שונה) פונקציות אלה, הנקראות מעתה **הקירובים הלינאריים של f**, מאפשרות לנו ללמוד על התנהגותה של f בכל חלקי תחומה כל קירוב לינארי הוא כמעט כמו הפונקציה עצמה בסביבה קטנה של נקודה מסוימת ואמנם,

השרטוט במסגרת 4 ממחיש את הדימיון שבין הפונקציה x^2 ובין קו המורכב מקטעים קטנים של קירוביה הלינאריים מכאן לומדים פעם נוספת על כוחו של הקירוב הלינארי כמכשיר לחקירת פונקציה כבר עתה ברור גם שלצורך החקירה נוכל להסתפק בהמשך בידיעת שיפועיהם של הקירובים הלינאריים, שכן די בהם כדי לדעת את תכונותיהם הרלוונטיות של הקווים הישרים המייצגים אותם **שיפוע הקירוב הלינארי של f ב־x_0** אינו, אלא **הנגזרת של f ב־x_0** כבר כעת חשוב לציין, כי הקירוב הלינארי והנגזרת יספקו לנו מידע **מקומי** בלבד על התנהגות הפונקציה אחת המשימות העומדות לפנינו היא, על־כן, תירגום האינפורמציה הלוקלית לגלובלית

בהמשך, כאשר נרצה לדון גם בפונקציות שאינן פולינומיאליות, יהיה עלינו להגדיר את מושג הקירוב הלינארי כך, שההגדרה תתאים גם למקרים בהם $f(x_0 + h)$ אינו מתפרק באופן טבעי לחלק לינארי ולחלק שתרומתו לערכה של f קטן הרבה יותר אנו נעיין אז במבט בוחן בשיקולים שהדריכו אותנו במקרה הפרטי של פונקצית החזקה שיקולים אלה יתנו כעת כיוון לחיפושים אחר ההכללה במסגרת 5 מוצגת ההגדרה הכללית שמגיעים אליה בסופו של דיון ממצה ומפורט

מסגרת 4: הקירובים הלינאריים של $f(x) = x^2$



2. גישת הקירוב הלינארי — למה?

2.1 הנחת היסודות: הקירוב הלינארי לפני הגבול

נעצור כאן לרגע כדי לערוך סיכום ביניים בעיקבות הדיון, שאמור להתנהל בכיתה במשך מספר שבועות, מתקבל מכשיר לחקירת פונקציות החזקה לפי התוכנית נבנה הכלי במספר שלבים, ולא בצעד אחד כמתואר כאן (ראה מסגרת 6)

מסגרת 5: הקירוב הלינארי והנגזרת — הגדרות כלליות

תהי f פונקציה ותהי x_0 נקודה מתחומה אם קיים מספר a כך שלכל h

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + a \cdot h + \alpha(h)$$

כאשר $\alpha(h)$ תבנית זניחה (דהיינו המקיימת: $\frac{\alpha(h)}{h} \to 0$ כאשר $h \to 0$),

אזי אומרים, כי

א. הפונקציה $y = f(x_0) + ah$ (או במשתנה $x = x_0 + h$ ‏.$(y = ax + f(x_0) - ax_0$ היא הקירוב הלינארי של f ב־x_0

ב. המספר a (שיפוע הקירוב הלינארי) הוא הנגזרת של f ב־x_0, כלומר

$f'(x_0) = a$

מסגרת 6: שלבים בפיתוח הרעיון של הקירוב הלינארי

שלב	הפונקציה f	הנקודה x_0	$f(x_0 + h)$	הקירוב הלינארי של f ב־x_0	$f'(x_0)$
1	x^2	3	$(3 + h)^2 = 9 + 6h + h^2$	$y = 9 + 6h$	6
2	x^2	כלשהי	$(x_0 + h)^2 = x_0^2 + 2x_0h + h^2$	$y = x_0^2 + 2x_0h$	$2x_0$
3	x^3	כלשהי	$(x_0 + h)^3 = x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3$	$y = x_0^3 + 3x_0^2h$	$3x_0^2$
4	x^n	כלשהי	$(x_0 + h)^n = x_0^n + nx_0^{n-1}h + \dots$	$y = x_0^n + nx_0^{n-1}h$	nx_0^{n-1}
5	כלשהי	כלשהי	$f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + \alpha(h)$ $\alpha(h)$ זניחה	$y = f(x_0) + ah$	a

מעלתו העיקרית של התהליך ההדרגתי שהוצג לעיל היא בכך, שבמהלכו הגדרנו את הנגזרת בלי להשתמש במושג הגבול הדבר מפתיע לכאורה, שכן קשה לדמיין את המושג הראשון ללא השני למעשה, ההגדרה שהתקבלה היא מדוייקת לגמרי, שכן במקרה של פונקציות החזקה ניתן להצביע על הנגזרת במישרין

בתהליך ההוראה המסורתי (כמו ב [2], למשל), מגדירים את הנגזרת כגבול שיפועי החותכים

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

כידוע, הרעיון הגבול, האמור לשמש רק כ״מושג עזרי״ לבניית יסודות של החשבון הדיפרנציאלי הוא אחד הקשים והחמקמקים ביותר בין כל אלה שמנסים ללמד בתיכון (ראה, למשל, [6], [7])

גישת הק״ל משחררת אותנו מהקשיים שבמושג הגבול לפחות בשלבים הראשוניים של הלימוד במהלך מספר שיעורים התלמיד חופשי להתרכז בהסתכלות קרובה על הדרך המובילה אל מושג הנגזרת ובחיפוש אחר משמעותה כבר כעת הוא מתחיל להיות מודע לתועלת העתידה לצמוח ממנה בחקירת פונקציות הקשר בין הגרף של f ובין הגרפים של קירוביה הלינאריים ברור לעין (מסגרת 4) והדבר עשוי להעמיק את הבנת טיבם של יחסי הגומלין

בין פונקציה ובין נגזרתה. כל זה קורה עוד לפני שפותחה טכניקה מורכבת, ולכן יש סיכוי שכשזו תבוא, היא לא תתקבל עוד כ״גזירה משמיים״

אין אנו מתיימרים ללמד את החשבון הדיפרנציאלי לכל אורכו ללא מושג הגבול. אל הצורך ב״מושג העזר״ מגיעים ברגע שמפנים את מבטנו לפונקציות שאינן פולינומיאליות. כדי להכליל את רעיון הקירוב הלינארי אנו נעזרים אז במושג **תבנית זניחה** — תבנית ההולכת וקטנה לאפס ״יותר מהר״ מאשר h (ראה מסגרת 5). מושג זה, הטומן בחובו את הרעיון של שאיפה לאפס, קל יחסית להבנה אינטואיטיבית, קשה קצת יותר (כמו מושג הגבול) להגדרה פורמלית. עם זאת רצוי לציין, כי גישתנו פוטרת אותנו למעשה מן הצורך במושג הגבול בגירסתו הכללית. די לנו ברעיון מצומצם יותר של שאיפה לאפס, ונושא זה, מן הסתם, קל יותר לתפיסה אינטואיטיבית

לסיומו של סעיף זה אעיר עוד, כי הקירוב הלינארי והנגזרת זוכים לבסוף בהגדרות מדוייקות, כלומר כאלה שישביעו את רצונו של מתמטיקאי. זה קורה בשלבים מתקדמים יותר של הלימוד. פרק המוקדש לנושא זה ([1], פרק 27) מסיים תהליך מתוכנן היטב של הצרנת האינטואיציה — תהליך שתחילתו בטיפוח ההבנה הבסיסית (כיתה י׳) והמשכו בהפיכה הדרגתית של רעיונות אינטואיטיביים למושגים מתמטיים מוגדרים היטב. ההליכה מהרעיונות הראשוניים אל תורה מתמטית מגובשת נמשכת כשנתיים ואפשר לראות בה שיחזור בזעיר אנפין של ההתפתחות ההסטורית של החשבון הדיפרנציאלי. ואמנם, מושג הנגזרת הופיע לראשונה בכתביהם של ניוטון ושל לייבנץ בשילהי המאה השבע־עשרה, אך רק במאה התשע־עשרה החלו להתגבש היסודות הפורמליים של האנליסה (בשנת 1823 הציע Cauchy תאור היכול להחשב לגילגול ראשון של הגדרת הגבול המקובלת בימינו). העדר הגדרות ברורות ומשפטים מנוסחים היטב לא הווה מכשול להתפתחותו של המקצוע. אדרבא, אנליסה מתמטית התפתחה ופרחה דווקא בתקופה בה קל היה לתקוף אותה בטענה, כי בהעדר לבוש פורמלי היא מזכירה ענק העומד על רגלי קש (ראה [4])

2.2 הסקת מסקנות: הקירוב הלינארי ככלי לחישוב נגזרות

ניתן כעת מבט חטוף אל המשך לימודי האנליסה. גם כאן שמור לקירוב הלינארי מקום נכבד, וגם כאן עשויה לצמוח ממנו תועלת דידקטית רבה. הדברים באים לידי ביטוי בעיקר בחישובי נגזרות של הפונקציות האלמנטריות הבסיסיות ובמציאת האלגוריתם לגזירת צירופים של פונקציות אלה (בהעדר תורה פורמלית של גבולות אין למעשה אפשרות לבנות הוכחה העונה על הקריטריונים הנוקשים של הדיוק המתמטי, לתאור התהליכים המבוצעים על־ידנו עדיף על־כן להשתמש במונח ״חישוב הנגזרת״, כשהכוונה לסדרת פעולות פשוטה ככול הניתן **לגילוי הנגזרת**) בגישת הק״ל נראים רבים מחישובים אלה טבעיים ופשוטים יותר מאשר חיפושי הגבול המסורתיים

נתבונן בשתי דוגמאות

נתחיל בחישוב הנגזרת של מכפלת פונקציות לפי ההגדרה הקלאסית נהוג להציג נגזרת זו כגבול

$$\lim_{h\to 0} \frac{v(x+h)u(x+h) - v(x)u(x)}{h}$$

כדי למצוא את הגבול ישנו צורך בתכסיס. יש להוסיף ולהחסיר במונה מחובר מסוים כדי לבטא את התבנית באופן שיאפשר את מציאת הגבול. במסגרת 7 מוצג חישוב של אותה נגזרת בגישת הק״ל. רואים, כי הפעם מתבצעת המשימה ללא תחבולות, כשהגדרת הנגזרת מדריכה אותנו לאורך כל הדרך

מסגרת 7: חישובי נגזרת בעזרת הק״ל — מכפלת פונקציות

אנו מניחים, כי הפונקציות v ו־u גזירות ב־x_0. נמצא את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = u(x)\cdot v(x)$

גירסה מקורבת מהירה:

מהגזירות של u ושל v נובע, כי

$u(x_0+h) \approx u(x_0) + u'(x_0)h$ ו $v(x_0+h) \approx v(x_0) + v'(x_0)h$

לכן

$$f(x_0+h) = u(x_0+h)\cdot v(x_0+h) \approx (u(x_0) + u'(x_0)h)(v(x_0) + v'(x_0)h) = u(x_0)v(x_0) + (u(x_0)\cdot v'(x_0) + u'(x_0)\cdot v(x_0))h + u'(x_0)\cdot v'(x_0)\cdot h^2$$

גירסה מלאה: החישוב דומה לזה שבצענו לעיל, אך הפעם משתמשים בהצגה מלאה של $u(x_0+h)$ ו $v(x_0+h)$, דהיינו

$$u(x_0+h) = u(x_0) + u'(x_0)h + \alpha(h)$$
$$v(x_0+h) = v(x_0) + v'(x_0)h + \beta(h)$$

כאשר $\alpha(h)$ ו $\beta(h)$ — תבניות זניחות

דוגמתנו השנייה היא הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \sin(x)$ בשיטה הקלסית, כדי לגלות כי $(\sin x)' = \cos x$ צריכים לחשב את

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

לשם כך דרושה לא רק ידיעת נוסחאות טריגונומטריה, אלא גם ניחוש באשר לדרך יישומן בחישובו של הגבול. זאת ועוד. אחרי שיושמה הנוסחה להפרש הסינוסים חייבים להגיע אל הביטוי $\sin(h/2)\,/\,(h/2)$ ולחשב את גבולו. איזה תלמיד מסוגל ולו

רק לנחש שעליו לשאוף לתבנית זאת? מאין עליו לדעת שהגבול אכן קיים והוא שווה ל 1? המורה צריך לעמול קשות כדי להראות את ההתכנסות עליו לגייס את "משפט הסנדוויץ'", להעזר בשרטוט מסובך ובמספר עובדות נוספות בתורת הגבולות והרי התוצר הסופי של כל המאמצים האלה אף הוא אינו הוכחה של ממש, שכן מקורו בעובדות שלא הוכחו — לא היו ידועות כללי — קודם לכן גזירת הסינוס מתגלית לעיני התלמיד רק בסוף הדרך הקשה הזו — דרך רצופה החלטות בלתי צפויות, שבעיני התלמיד אינן יכולות להצטייר כ"טבעיות"

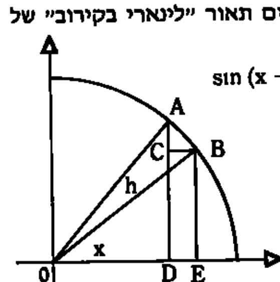
כשמחפשים אחר אותה נגזרת בעזרת הקירוב הלינארי, כמתואר במסגרת 8, אין צורך ברעיונות "מונחתים", זרים ללומד לאחר החישובים המקורבים שביצענו כדי להגיע אל האומדן $\sin(x+h) - \sin x \approx h\cos(x)$, השוויון $(\sin x)' = \cos x$ הוא בגדר של השערה אם נרצה להוכיחו "עד הסוף", נצטרך להראות כי התבנית $\sin(x+h) - \sin x = h\cos x$ היא זניחה הוכחת טענה זו מופיעה ב-[1] כחומר רשות ומומלץ לוותר עליה כליל היא מובאת בספר הלימוד בתור שיכנוע נוסף לתלמיד ספקן, אך הניסיון מראה כי מעטים הם התלמידים שמרגישים צורך בכך אגב, כדי "לרכך" את תהליך החישוב עוד יותר, רצוי להתחיל במציאת הנגזרת של סינוס בנקודה $x = 0$

$$\sin(0+h) - \sin 0 = AB = h$$

מסגרת 8: חישובי נגזרת בעזרת הק"ל — פונקצית הסינוס

כדי לחשב את $(\sin x)'$, אנו מחפשים תאור "לינארי בקירוב" של ההפרש

$$\sin(x+h) - \sin x$$



הפרש זה מיוצג בשרטוט על-ידי הקטע AC

את הקטע AC יש להציג כעת בעזרת הנתונים זווית x ו-h והקטע AB שאורכו שווה בקירוב ל-h זהו תרגיל בטריגונומטריה ברמת קושי סבירה

$$\sin(x+h) - \sin x = AC = AB \cos\sphericalangle A_1$$

אבל

$$\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A - \sphericalangle A_1 = \frac{\pi - h}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x - h\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

הואיל ו $AB \approx h$, מתקיים

$$\sin(x+h) - \sin x = AB\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \approx h\cdot\cos x$$

מכאן ניתן לשער, כי $(\sin x)' = \cos x$

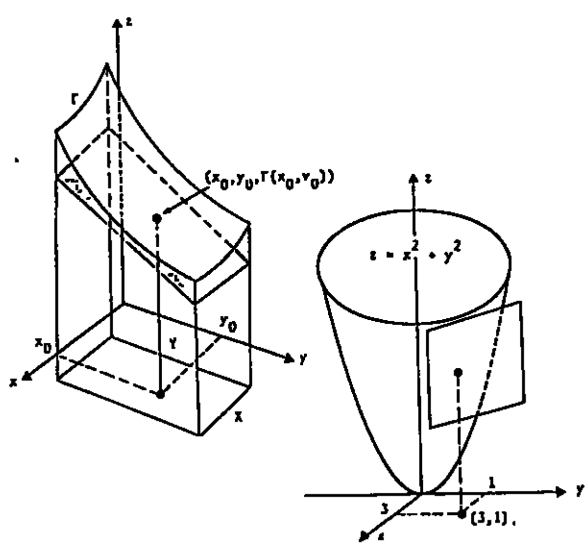
אוסיף עוד, כי התאור הקלסי של הנגזרת כגבול שיפועי החותכים מופיע ב-[1] כבר בכרך הראשון (עמ' 95) ומאותו רגע ניתן ליישמו בכל מקום שבו תראה צורה זו עדיפה על חברתה

2.3 המשך הלימודים: הכללות והרחבות

מושג הקירוב הלינארי ניתן להכללות רבות, בכיוונים שונים ראשית, יתברר בהמשך שאין הוא אלא מקרה פרטי של פיתוח טיילור, המקרב פונקציה גזירה על-ידי פונקציה פולינומיאלית ממעלה כלשהי ואולם, המקום שבו כוחו של הקירוב הלינארי מתגלה במלוא עוצמתו הוא המעבר אל העולם התלת-ממדי של פונקציות בשני משתנים אלה שהבינו את הקשר שבין פונקציה במשתנה אחד ובין קירובה הלינארי לא יתקשו כעת להציע כלים לחקירת פונקציות בשני משתנים. יהיו אלה המישורים המשיקים לגרפים של פונקציה בשני משתנים (ראה מסגרת 9) הרי אם נגדיל חלקים קטנים של גרף הפונקציה בשני משתנים, ישתטח הגרף למישור כפי שמשתטח הגרף של פונקציה במשתנה אחד לישר. המונח **קירוב לינארי** יתייחס מעתה גם לפונקציות המיוצגות על-ידי מישורים המשיקים למשטחים תלת-ממדיים

מסגרת 9: הקירוב הלינארי של פונקציה בשני משתנים

הק"ל של $F(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0) הוא פונקציה לינארית ב-x וב-y, שהגרף שלה הוא מישור קרוב מאד לגרף של F בסביבת (x_0,y_0)



הק"ל של פונקציה $F(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0)

$$Z = F(x_0,y_0) + F_x(x_0,y_0)h + F_y(x_0,y_0)k$$

או, בכתיב וקטורי

$$Z = F(\underline{v_0}) + \text{grad } F(\underline{v_0})\ \underline{v}$$

3. לא הכל פשוט: מספר עצות ואזהרות

הדברים שיאמרו בסעיף זה אינם מיוחדים לגישת הק"ל אף על פי שבדיון אזכיר שוב ושוב את הקירוב הלינארי, בטענות שאטען אתייחס למעשה לאופיה הכללי של השיטה האנליטית ולא אל התכונות המיוחדות של הצגה זו או אחרת

3.1 הגדרת הקירוב הלינארי אינה קונסטרוקטיבית

הגורמים שבגללם התקשו המתמטיקאים במשך למעלה ממאה שנה "לעכל" את רעיונותיה של האנליסה עשויים להפריע גם לתלמיד היושב בכיתתנו החשבון הדיפרנציאלי מביא איתו מושגים מסוג חדש, שונים מכל הרעיונות המתמטיים שנבנו עד כה התלמיד, שלמד לזהות מתמטיקה עם חישובים בכמויות נתונות וקבועות, אמור לעסוק כעת בחקר של תהליכים ושל גדלים משתנים יתרה מזו, לראשונה יהיה עליו להתמודד עם הגדרה לא קונסטרוקטיבית — הגדרה שאינה מציעה תהליך אלגוריתמי לבניית העצם המתמטי המוצג בה

ואמנם, הגדרת הקירוב הלינארי אינה מפרטת את דרך מציאתו (כך גם הגדרת הנגזרת בעזרת הגבול, אם כי עובדה זו עלולה להעלם מעינינו בשל הכתיב "המסוותה", המציג לכאורה תבנית לחישוב הנגזרת) מבחינתו של התלמיד זהו חידוש של ממש כל בעיה מתמטית נפתרה עד כה בעזרת חישוב אלגוריתמי הרעיון היה פשוט כשאתה מחפש תשובה לשאלה שנשאלת, כל שעליך לעשות הוא לבחור פרוצדורה מתאימה ממאגר הפרוצדורות הידועות, להזין אותה בנתונים שבידיך ולבצעה אם לא טעית, הרי הגודל המיוצר בתהליך זה הוא התוצאה שחיפשת מה יעשה כעת התלמיד כשנבקש ממנו למצוא "מספר a כך שלכל h מתקיים $f(x + h) - f(x) = a \quad h + \alpha(h)$ כאשר $\alpha(h)$ היא תבנית זניחה"?

בקושי המתעורר כאן דנו כבר בעלייה 4 ([4]) אחזור כאן על עיקרי הדברים

במקום להציע תהליך אלגוריתמי למציאת הנגזרת, מספקת ההגדרה קריטריון לבדיקת התאמתו של מספר כלשהו לתפקיד הנגזרת של f בנקודה x_0 על־כן, תלמיד הרוצה למצוא את $f(x_0)$ חייב לנסח תחילה **השערה** בדבר ערכו האפשרי של a ולאחר מכן **להוכיח** כי המועמד מקיים את דרישות ההגדרה דרך פעולה זו חדשה ללומד בחיפושינו אחר הנגזרת ישנו מרכיב של ניחוש סביר להניח כי מבחינתו של התלמיד לא די בהוכחת נכונותו של הניחוש כדי להסיר את כל הספקות ילד פיקח עשוי לערער על הדרך שבה הלכנו מי יבטיח שאין ניחושים מוצלחים נוספים? מניין הביטחון שאילו ניסחנו השערה אחרת לא ניתן היה להוכיח שגם היא נכונה?

תקינותו של תהליך החיפוש אחר הנגזרת נובע ממשפט בדבר **יחידות הנגזרת** — עובדה שניתן להוכיחה די בקלות הדבר נידון ב־[1] (כרך א, עמוד 79) באמצעים מתמטיים צנועים מנמקים כאן את הטענה כי לא יתכן קיום של שני מספרים שונים, a ו־b כך ש $\alpha(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - ah$ זניחה ואף $\beta(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - bh$ זניחה משפט זה הוא המעניק תוקף לניחוש שעמד במבחן ההגדרה נובע ממנו, שאם הצלחנו למצוא מספר המקיים את הדרישות, הרי מצאנו את המועמד **היחיד** — לכן גם **וודאי** — לנגזרת

האם די בטיעון זה כדי שיעלמו הספקותי אינני סבורה כך יתרה מזו, אינני בטוחה שיש טעם רב בהצגת הוכחה **פורמלית** של יחידות הנגזרת בשלבים מוקדמים של לימוד (איזכור הנושא ונימוקים האוריסטיים — כן, הוכחה — לא) סביר להניח, שכדי לעכל ולהפנים את המסר של משפט היחידות דרושה בגרות מתמטית רבה יותר מזו המאפיינת תלמידים רבים ואולם, אין בעובדה זו כדי לרפות את ידינו אדרבא, התמודדות עם בעיות כמו זו שתוארה לעיל עשויה לתרום תרומה חשובה ליכולתו של הלומד הבגרות המתמטית אינה נרכשת **למרות** הקשיים שבהסתגלות למצבים חדשים אלא דווקא **בזכותם** נראה לי, כי התלמידים שלנו לא יצאו נשכרים אם "נגן" עליהם וננסה לחסוך להם אתגרים לפי התפיסה שהדריכה את מפתחי התוכנית, תפקידו של המורה הוא לחשוף את הלומד לקושי — ולעזור לו להתגבר עליו בתהליך זה אחד המסרים החשובים ביותר ללומד הוא שההסתגלות לדרך חשיבה חדשה אינה באה בקלות לתלמיד, כמו למתמטיקאים עצמם, ידרש זמן, ואולי זמן רב, כדי שרעיונות חדשים יראו לו טבעיים ומובנים עובדה זו נלקחה בחשבון בעת פיתוח התוכנית וחומרי הלימוד נבנו בהתאם (ראה סעיף 3 3 להלן)

3.2 אמת, רק אמת, אך לא כל האמת

ההצעה שאנסח כעת ניתנה כבר קודם, אך אחזור עליה כדי להדגיש את חשיבותה **אין להרחיק לכת בדיונים על הזניחות** אף על פי שספר הלימוד ([1]) אינו פוסח על טיעונים מפורטים בעניין זה (ראה לדוגמה עמ' 79 ו־227 בכרך א' ועמ' 64 בכרך ב'), ההמלצה היא לוותר עליהם כליל גם אם אינם מסומנים כחומר רשות הוכחות של זניחות, המשלימות את חישובי הנגזרת, הן קשות ומלאות פרטים, וההתעסקות בהן עלולה לטשטש את העיקר — את התהליך המוליך אל מציאת מועמד סביר לנגזרת אין סכנה גדולה שוויתור על הוכחות אלה יפגע באמינות החישוב — הרי לא ננסה לשכנע שיש בתהליך שבצענו כל שנדרש מהוכחה מתמטית בשלב זה די שנבטיח, כי נשלים את החסר כאשר תועמד התורה על יסודות מוצקים יותר

3.3 דרוש אורך רוח

כפי שהסברתי במבוא למאמר זה, גישת הק״ל נבחרה על־ידי מפתחי התוכנית החדשה משום שנמצאה מתאימה במיוחד להוראה המבוססת על עקרונות קונסטרוקטיביסטיים. הכוונה היא לדרכי הוראה המספקות הנחות יסוד של אסכולה חינוכית חדשה יחסית, אך מקובלת כבר על אנשי חינוך רבים. הקונסטרוקטיביסטים מסרבים להתייחס לתלמיד כאל כלי המתמלא ידע ואל המורה כאל אדם שתפקידו למזוג את הידע לתוך ראשו של הלומד. הם מציגים את התלמיד כמי שבונה את הידע מחדש, בכוחות עצמו. תפקידו של המורה לעזור לו בכך.

אימוץ העקרונות הקונסטרוקטיביסטיים אינו עניין של מה בכך. זוהי למעשה עיסקת חבילה שאינה יכולה להצליח בלי שינוי בתפיסות ובציפיות בסיסיות ביותר של התלמיד ושל המורה. שניהם צריכים להכיר בנחיצותה של למידה פעילה ולהיות מוכנים להשקיע מאמץ בבניית הידע. שניהם צריכים להשלים עם המחשבה, שבחיפוש אחר ההבנה של רעיונות עמוקים אין קיצורי דרך. חיסכון בזמן אפשרי רק אם ישנה נכונות להסתפק בלימוד טכני, המכוון אל שליטה באלגוריתמים. המאמצים של התלמידים להבין ומאמצי המורה לעזור להם בכך אינם יכולים להביא תמורה מיידית. מתוך מודעות מלאה לכך, בנינו את לימודי האנליסה בצורה ״ספירלית״ ודאגנו לכך שכל הגדרה וכל טכניקה יחזרו שוב ושוב, ברמות העמקה עולות בהתמדה. הוראה מעין זו דורשת, כמובן, גישה חדשה לנושא של הערכה הן אצל המורה והן אצל התלמיד. כדי להשלים עם העובדה, שהבנת מושגים מסויימים תשאר חלקית לאורך זמן, חייבים לרכך את הבדיקה ולהשהות את השיפוט.

***

במבוא לרשימה זו הצגתי תנאים הנראים לי הכרחיים למימושו של הפוטנציאל הטמון בשיטת הקירוב הלינארי. מוקדם עדיין לשפוט מה הם התנאים המספיקים להצלחת הרעיון. במאמר זה לא דובר בתוצאות של תצפיות וסקרים, למרות שיש כאלה בידינו. נמנעתי כאן מלהציג את המשוב מן השטח מתוך תחושה, כי עדיף שדברים אלה יבואו מהמורים עצמם. מאמר זה הוא בבחינת הזמנה לדיון, המופנית בעיקר אל בעלי ניסיון (לאלה שאינם רוצים לחכות: דעותיהם של כמה עשרות רכזי מתמטיקה על התוכנית החדשה רוכזו בדו״ח של קשר־חס, [3]. מהדו״ח ניתן ללמוד דבר מה גם על עמדות המורים כלפי לימודי האנליסה). מטרתי כאן הייתה להסביר את הסיבות הראשוניות שבגללן העדיפו מפתחי התוכנית החדשה את גישת הק״ל על פני הגישות האחרות. היה בכך גם ניסיון לקרב את הקירוב הלינארי לליבו של הקורא. אני מקווה כי עלה בידי לעזור למורים להבין את רוחה של התוכנית החדשה ואת רעיונותיה.

רשימת ספרות

[1] אנליסה מתמטית, 4, 5 י״ל, כרכים א-ה (1979-1986), מהסדרה **מתמטיקה לחשיבה העליונה**, המרכז להוראת המדעים, ירושלים

[2] תוחמן, ז , קלעי ש פ (1978), **חשבון דיפרנציאלי ואינטגראלי**, הוצאת עבד, ירושלים

[3] מבושוביץ־הזר, נ (1992), ״**קשר חס**״. **דו״ח לתקופה 1.1.91-31.12.91** טכניון, חיפה

[4] מציאת הנגזרת בשיטת הקירוב הלינארי: מעשה קסמים או תהליך מתמטי תקין? (1988), לפי הצעתה של רחל דנבאום, **על״ה** 4, 44-51

[5] Boyer, C B (1949), **The History of Calculus and its Conceptual Development**, Dover Publications

[6] Davis, R & Vinner, S (1986), The notion of limit Some seemingly unavoidable misconception stages, **Journal of Mathematical Behavior**, 5, 281 303

[7] Cornu, B (1991), Limits, in Tall, D O (ed), **Advanced Mathematical Thinking**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht

מתמטיקה היא תחום שבו אין אנו יודעים על מה אנו מדברים.
Bertrand Russel

מתמטיקאי הוא אדם שיודע הכל על לא־כלום.
George Bernard Shaw