האולימפיאדה לנוער במתמטיקה, 1992

מאת **י. גיליס**, מכון ויצמן, רחובות

אולימפיאדה לנוער במתמטיקה התקיימה השנה, זו הפעם ה־24 ברציפות, במכון ויצמן למדע, רחובות מספר המשתתפים הגיע ל־150, קצת למעלה מהרגיל בין המתחרים היו כ־40 עולים חדשים מברית המועצות שאלונים חולקו בעברית וברוסית ורמת הציונים היתה בדרך כלל גבוהה להלן תמצאו עותק מהשאלון ובסוף הגיליון תוכלו למצוא רמזים לפתרונות

יש לציין כי מאז הוחל בפעילות זו, בשנת 1969, קבל בנק הפועלים בע״מ על עצמו את כל הדאגה והאחריות למימון התחרות הפרס הראשון הוא כסוי של שכר לימוד לשלוש שנים בכל מוסד להשכלה גבוהה בארץ, לפי בחירת הזוכה

התוצאות השנה היו כדלקמן

פרס ראשון

אבישי ונונו, כתה י״א, ביה״ס למדעים ולאמנויות, ירושלים

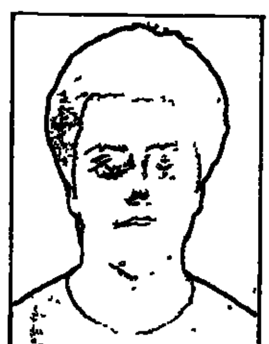
פרס שני

רום פנחסי, כתה י״ב, תיכון ליד האוניברסיטה, ירושלים

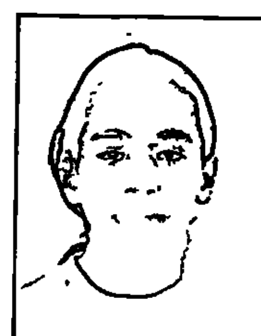
ציונים לשבח

מרק גולדשמידט, כתה י״א, תיכון ליד האוניברסיטה, ירושלים
איליה גרמן, כתה י״ב, בי״ס עמל ב׳, פתח־תקוה
עומר אנגיל, כתה י״א, בי״ס ליאו־בק, חיפה
לב מכליס, כתה י״א, בי״ס דנציגר, קרית שמונה


רום פנחסי


מרק גולדשמידט


איליה גרמן


עומר אנגיל


לב מכליס

השאלון של האולימפיאדה המתמטית לנוער 1992

1. (10 נק')

הוכח כי אין למצוא x, y חיוביים המקיימים

$$x^{19}y^{92} = 2^{1992}$$
$$19x + 92y = 5752$$

2. (10 נק')

הוכח כי אין פוליאדר בעל 7 מקצועות

3. (10 נק')

נתונה מערכת משוואות

$$x_r x_{r+1} = r \qquad (r = 1,2,\ldots,n-1)$$
$$x_n x_1 = n$$

א. הוכח כי כאשר n זוגי, אין פתרון.

ב. פתור את מערכת המשוואות במקרה ש-n הוא אי-זוגי

4. (10 נק')

נתונה קבוצה של $10n$ נקודות במישור, אשר אין שלוש מביניהן הנמצאות על קו ישר. הוכח שניתן לבנות n משושים ו-n מרובעים אשר קדקודיהם הם הנקודות הנתונות כך שאין שניים מבין $2n$ המצולעים האלה אשר יש להם נקודה משותפת (על השפה או נקודה פנימית)

5. (20 נק')

אם x,y,z הם מספרים חיוביים, הוכח כי

$$\mathrm{Min}(1; x^{3}, y^{4}, z^{5}) \leq yxz$$

6. (20 נק')

שיעורי הנקודות A,B,C הם $(2,0)$, $(1,0)$, $(0,0)$ בהתאמה. הנקודה P נמצאת במישור ABC ומקיימת

$$\sphericalangle PBC = 2\sphericalangle PAC + \pi/2$$

מצא את המקום הגיאומטרי של P (משוואה, קביעת תחום ההגדרה, תאור סכימטי ואסימפטוטות)

7. (20 נק')

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

היא סדרה חשבונית של מספרים חיוביים $b_1, b_2, \ldots, b_n$ היא סדרה הנדסית, בעלת אותו מספר איברים ונתון כי $a_1 = b_1$, $b_n = a_n$ הוכח כי

$$\sum_{r=1}^{n} a_r \geq \sum_{r=1}^{n} b_r$$

באילו תנאים יתקיים שוויון נמק