

הנושא: על המעבר מנוסחת נסיגה אל נוסחה לפי מקום

הוכן ע"י: עלי עותמאן, סחנין.

תקציר: במאמר מוצגת שיטה למציאת הנוסחה של האיבר הכללי של סדרות המוגדרות על-ידי נוסחאות נסיגה, בין היתר כאלה הדומות לסדרת פיבונצ'י.

מילות מפתח: סדרה, סדרות, כלל נסיגה, נוסחת נסיגה, סדרה הומוגנית, סדרה גיאומטרית, סדרה חשבונית, סדרת פיבונצ'י, סדרת הפרשים, איבר כללי, פעולות חשבון, חזקות, אלגברה, פירוק לגורמים, משוואה ריבועית, שורש כפול, שורש מרוכב, מספר מרוכב, אינדוקציה מתמטית, הוכחה, הוכחות, לוגריתמים.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 12, אדר תשנ"ג, 1993, עמודים 62-68.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 7 עמודים.

על המעבר מנוסחת נסיגה אל נוסחה לפי מקום

מאת: עלי עותמאן, סחנין

כדי שהסידרה תהיה הומוגנית, דורשים שיתקיים:

$$-ux + x + w = 0$$

$$x = \frac{w}{u-1} \quad \text{ולכן}$$

לכן הסידרה $\{b_n\}$ מוגדרת ע"י נוסחת הנסיגה

$$\begin{cases} b_1 = a + \frac{w}{u-1} \\ b_{n+1} = u \cdot b_n \end{cases} \quad n \geq 1$$

ולכן נוסחת האיבר הכללי שלה היא:

$$b_n = \left(a + \frac{w}{u-1}\right) \cdot u^{n-1}$$

ומאחר ש- $b_n = a_n + \frac{w}{u-1}$ נקבל כי $a_n = b_n - \frac{w}{u-1}$ ולכן

הנוסחה של האיבר הכללי של סדרה ליניארית, מסדר ראשון היא

$$a_n = \left(a + \frac{w}{u-1}\right) \cdot u^{n-1} - \frac{w}{u-1}$$

דוגמה 1: אם $\{a_n\}$ היא סידרה המוגדרת על-ידי

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 3a_n + 5 \end{cases} \quad n \geq 1$$

אזי, $w = 5$, $u = 3$, $a = 2$ ולכן,

$$a_n = \left(2 + \frac{5}{2}\right) \cdot 3^{n-1} - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 5)$$

2. סדרה ליניארית מסדר שני

הגדרה 2: נאמר כי סידרה היא סידרה ליניארית מסדר שני אם

היא מוגדרת על-ידי נוסחת נסיגה מהצורה

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_2 = b \\ a_{n+2} = u \cdot a_{n+1} + w \cdot a_n + t \end{cases} \quad n \geq 1$$

כאשר u, w, t, a, b הם מספרים ממשיים.

אם $t = 0$ נאמר כי הסידרה הומוגנית.

אם $a = b = -u = w = 1$ ו- $t = 0$ אזי הסידרה היא סידרת פיבונצ'י המפורסמת.

נושא הסדרות מעורר בדרך כלל עניין רב אצל תלמידים. יכולתם למצוא דפוסים בהתנהגות של סדרה משמשת להם כמדד של כושרם האינטלקטואלי. בגיל צעיר מסתפק התלמיד בניחוש האיבר הבא בסידרה. בגיל מבוגר יותר ובזמן הלמידה של נושא הסדרות בתיכון הוא מתחיל להתעניין במציאת הנוסחה של האיבר הכללי כפונקציה של n . מהר מאוד הוא מגלה כי ניחוש הוא דרך לא יעילה. לדוגמה, לגבי סידרת פיבונצ'י, לא ניתן לנחש את נוסחת האיבר הכללי. בספר הלימוד לא מוסברת שיטה למציאת הנוסחה וגילוי הדרך שבה הגיעו אליה נראה בלתי אפשרי.

במאמר זה אציג שיטה פשוטה, אולי, למציאת הנוסחה של האיבר הכללי של סדרות המוגדרות על-ידי נוסחת נסיגה דומות לסידרת פיבונצ'י.

1. סדרה ליניארית מסדר ראשון

הגדרה 1: נאמר כי סידרה היא סידרה ליניארית מסדר ראשון אם

היא מוגדרת על-ידי נוסחת נסיגה מהצורה:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = u \cdot a_n + w \end{cases} \quad n \geq 1$$

כאשר u, w קבועים ממשיים.

אם $w = 0$, נאמר כי הסידרה הומוגנית. ברור כי סידרה ליניארית הומוגנית היא סידרה גאומטרית ולהיפך. אם $u = 1$, נאמר כי הסידרה חשבונית. אם $w = 0$, אזי, כידוע, נוסחת האיבר הכללי היא $a_n = a \cdot u^{n-1}$. כאשר $u = 1$ נוסחת האיבר הכללי היא $a_n = a + (n-1)w$ כי הסידרה חשבונית.

בעיה 1: מהי נוסחת האיבר הכללי של סידרה ליניארית מסדר ראשון כאשר $w \neq 0$ וגם $u \neq 1$?

נגדיר סידרה חדשה $\{b_n\}$ על-ידי $b_n = a_n + x$. נקבע את ערכו של x כך, שהסידרה b_n תהיה הומוגנית.

פתרון:

$$a_{n+1} = b_{n+1} - x = ua_n + w = u(b_n - x) + w$$

$$b_{n+1} = u \cdot b_n - ux + w + x \quad \text{ולכן}$$

בשלב ראשון נדון במציאת נוסחת האיבר הכללי של סדרות ליניאריות מסדר שני הומוגניות.

הערה: אם $w = 0$, t כלשהו, ניתן לרשום את הסידרה בצורה

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_2 = b \\ a_{n+1} = u \cdot a_n + t \end{cases} \quad n \geq 2$$

וזאת סידרה ליניארית מסדר ראשון, החל מהמקום השני. ולכן נוסחת האיבר הכללי היא:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = \left(b + \frac{t}{u-1}\right)u^{n-2} - \frac{t}{u-1} \end{cases} \quad \text{ולכל } n \geq 2$$

נדון עכשיו בסדרות המוגדרות על-ידי נוסחה מהצורה

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_2 = b \\ a_{n+2} = u \cdot a_{n+1} + w \cdot a_n \end{cases} \quad n \geq 1$$

בתנאי ש- $w \neq 0$. כדי לבנות את התבנית המפורשת נוכיח מספר טענות.

טענה 1: אם x_1 הוא שורש של המשוואה $x^2 = u \cdot x + w$, אזי הסידרה $A_n = x_1^n$ מקיימת: $A_{n+2} = u \cdot A_{n+1} + w \cdot A_n$ לכל n טבעי.

$$\begin{aligned} \text{הוכחה:} \quad A_{n+2} &= x_1^{n+2} = x_1^n \cdot x_1^2 = x_1^n \cdot (ux_1 + w) \\ &= u \cdot x_1^{n+1} + w \cdot x_1^n = u \cdot A_{n+1} + w \cdot A_n \end{aligned}$$

טענה 2: אם $\{a_n\}$ סידרה המקיימת: $a_{n+2} = u \cdot a_{n+1} + w \cdot a_n$ ואם $\{b_n\}$ סידרה המקיימת: $b_{n+2} = u \cdot b_{n+1} + w \cdot b_n$, אזי הסידרה $\{c_n\}$ המוגדרת על-ידי: $c_n = \alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n$ (קבועים α, β) מקיימת: $c_{n+2} = u \cdot c_{n+1} + w \cdot c_n$

הוכחה:

$$\begin{aligned} c_{n+2} &= \alpha \cdot a_{n+2} + \beta \cdot b_{n+2} \\ &= \alpha(u \cdot a_{n+1} + w \cdot a_n) + \beta(u \cdot b_{n+1} + w \cdot b_n) \\ &= u(\alpha \cdot a_{n+1} + \beta \cdot b_{n+1}) + w(\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n) \\ &= u \cdot c_{n+1} + w \cdot c_n \end{aligned}$$

טענה 3: אם x_1 הוא שורש כפול של המשוואה $x^2 = u \cdot x + w$, אזי הסידרה המוגדרת על-ידי $a_n = n \cdot x_1^n$ מקיימת: $a_{n+2} = u \cdot a_{n+1} + w \cdot a_n$ לכל n טבעי.

$$\begin{aligned} \text{הוכחה:} \quad w &= -\frac{u^2}{4} \text{ וגם } x_1 = \frac{u}{2} \text{ הרי } x_1 \text{ הוא שורש כפול,} \\ a_{n+2} &= (n+2) \cdot x_1^{n+2} = (n+2) \cdot \left(\frac{u}{2}\right)^{n+2} \\ &= (n+2) \cdot \frac{u^2}{4} \cdot \left(\frac{u}{2}\right)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u \cdot a_{n+1} + w \cdot a_n &= u \cdot \left(\frac{u}{2}\right)^{n+1} \cdot (n+1) - \frac{u^2}{4} \cdot \left(\frac{u}{2}\right)^n \cdot n \\ &= u \cdot \frac{u}{2} \cdot (n+1) \cdot \left(\frac{u}{2}\right)^n - \frac{u^2}{4} \cdot n \cdot \left(\frac{u}{2}\right)^n \\ &= \left(\frac{u^2}{4}n + \frac{u^2}{2}\right) \left(\frac{u}{2}\right)^n = (n+2) \cdot \frac{u^2}{4} \cdot \left(\frac{u}{2}\right)^n \\ a_{n+2} &= u \cdot a_{n+1} + w \cdot a_n, \quad \text{לכן,} \end{aligned}$$

טענה 4: אם x_1 ו- x_2 הם שני שורשים ממשיים שונים של המשוואה $x^2 = ux + w$ ($w \neq 0$), אז קיים פתרון למערכת

$$\begin{cases} c_1 x_1 + c_2 x_2 = a \\ c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = b \end{cases}$$

לכל a, b, c_1, c_2 הם הנעלמים). והפתרון יחיד.

הוכחה: מספיק להראות שהמקדמים אינם פרופורציוניים. לשם כך נראה כי: $x_1 x_2^2 \neq x_2 x_1^2$.
 $x_1 x_2^2 - x_2 x_1^2 = x_1 x_2 (x_2 - x_1) \neq 0$
 כי $x_1 x_2 \neq 0$ (מדוע?) ו- $x_2 - x_1 \neq 0$.

טענה 5: אם x_1 הוא שורש כפול של המשוואה $x^2 = ux + w$ ($w \neq 0$), אז קיים פתרון יחיד למערכת

$$\begin{cases} c_1 x_1 + c_2 x_1 = a \\ c_1 x_1^2 + 2c_2 x_1^2 = b \end{cases}$$

לכל a, b, c_1, c_2 הם הנעלמים).

הוכחה: $x_1 \neq 0$ מפני ש- $w \neq 0$. גם כאן נראה, כמו בהוכחה הקודמת, כי המקדמים אינם פרופורציוניים.

$$x_1 \cdot 2x_1^2 - x_1 x_1^2 = x_1^3 \neq 0$$

לכן קיים פתרון יחיד למערכת.

טענה 6: אם x_1 ו- x_2 הם שני שורשים מרוכבים של המשוואה $x^2 = u \cdot x + w$ אזי קיים פתרון יחיד למערכת:

$$\begin{cases} c_1 x_1 + c_2 x_2 = a \\ c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = b \end{cases}$$

לכל a, b , ומתקיים $c_1 = \overline{c_2}$ (זכור: a, b, u, m ממשיים).

הוכחה: קיום הפתרון ויחידותו נובעים מטענה 4. הוכח כי $c_1 = \overline{c_2}$ כתרגיל.

$$\begin{cases} c_1 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \\ c_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{הוא } c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}, c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ לכן,}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

משפט 2:

אם x_1, x_2 הם שני השורשים המרוכבים של המשוואה $x^2 = ux + w$ ואם (c_1, c_2) הוא הפתרון של המערכת

$$\begin{cases} c_1 x_1 + c_2 x_2 = a \\ c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = b \end{cases}$$

אזי נוסחת האיבר הכללי של הסידרה

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_2 = b \\ a_{n+2} = a \cdot a_{n+1} + w \cdot a_n \end{cases} \quad n \geq 1$$

$$a_n = 2\operatorname{Re}(c_1 \cdot x_1^n) \quad \text{היא}$$

הוכחה: בהוכחת משפט 1 לא היתה שום חשיבות לתנאי שהשורשים ממשיים, ולכן נוסחת האיבר הכללי במקרה ששני השורשים מרוכבים היא אותה נוסחה $a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n$

אבל, כידוע, אם x_1, x_2 שורשי המשוואה $x^2 + ax + b = 0$, אז $x_2 = \overline{x_1}$ ואם השורשים מרוכבים, אז $x_2 = \overline{x_1}$. לפי טענה (6) $c_2 = \overline{c_1}$, לכן,

$$a_n = c_1 x_1^n + \overline{c_1} (\overline{x_1})^n = c_1 x_1^n + \overline{c_1 x_1^n} = 2\operatorname{Re}(c_1 x_1^n)$$

דוגמה 3: מצא את נוסחת האיבר הכללי של הסידרה

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 3 \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n \end{cases} \quad n \geq 1$$

התרה: כאן $u = 2, w = -2$. נפתור את המשוואה $x^2 = 2x - 2$ ונקבל $x_1 = 1+i, x_2 = 1-i$

אם x_1, x_2 הם שני שורשים שונים של המשוואה $x^2 = u \cdot x + w$ ואם (c_1, c_2) הפתרון של מערכת המשוואות $(w \neq 0)$

$$(*) \quad \begin{cases} c_1 x_1 + c_2 x_2 = a \\ c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = b \end{cases}$$

אזי נוסחת האיבר הכללי של הסידרה

$$a_1 = a$$

$$a_2 = b$$

$$a_{n+2} = u \cdot a_{n+1} + w \cdot a_n \quad n \geq 1$$

היא

$$a_n = c_1 \cdot x_1^n + c_2 \cdot x_2^n$$

לכל $n \geq 1$.

הוכחה: נראה כי שתי הסדרות תכונות מתלכדות.

$$b_n = c_1 \cdot x_1^n + c_2 \cdot x_2^n, \quad \begin{cases} a_1 = a \\ a_2 = b \\ a_{n+2} = u \cdot a_{n+1} + w \cdot a_n \end{cases}$$

נוכיח את זה בדרך האינדוקציה המתמטית המורחבת. תהי K קבוצת המספרים הטבעיים עבורם $a_n = b_n$.

$1 \in K$: $a_1 = a, b_1 = c_1 x_1 + c_2 x_2 = a$ מכיוון ש- (c_1, c_2) פתרון של המערכת (*), לכן $b_1 = a$ כלומר $c_1 x_1 + c_2 x_2 = a$.

$2 \in K$: $a_2 = b, b_2 = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = b$ לפי המשוואה השנייה במערכת (*), $b_2 = b$ כלומר $c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = b$.

נניח כי $1, 2, \dots, n, n+1 \in K$ ונראה כי $n+2 \in K$.

לפי שתי טענות (1) ו-(2), נקבל

$$b_{n+2} = u b_{n+1} + w \cdot b_n$$

על פי הנחת האינדוקציה: $b_n = a_n$ וגם $b_{n+1} = a_{n+1}$, לכן,

$$b_{n+2} = u \cdot a_{n+1} + w \cdot a_n = a_{n+2}$$

משום כך $n+2 \in K$. לכן K היא קבוצת כל המספרים הטבעיים ושתי הסדרות מתלכדות.

דוגמה 2: מצא את נוסחת האיבר הכללי של הסידרה

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases}$$

התרה: כדי למצוא את הנוסחה בהסתמך על משפט 1, נפתור את המשוואה $x^2 = x + 1$ (כאן $u = w = 1$).

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

נפתור את המערכת

$$\begin{cases} c_1(1+i) + c_2(1-i) = 1 \\ c_1(1+i)^2 + c_2(1-i)^2 = 3 \end{cases}$$

$$c_1 = -\frac{1}{4}(1+3i)$$

$$a_n = 2\operatorname{Re}\left(-\frac{1}{4}(1+3i) \cdot (1+i)^n\right) \quad \text{לכן}$$

$$1+i = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$$

$$(1+i)^n = (\sqrt{2})^n (\cos 45^\circ n + i\sin 45^\circ n) \quad \text{לכן,}$$

וחנוסחה של האיבר הכללי

$$a_n = (\sqrt{2})^{n-2} (3\sin 45^\circ n - \cos 45^\circ n)$$

משפט 3:

אם x_1 הוא שורש כפול של המשוואה $x^2 = u \cdot x + w$ ואם (c_1, c_2) הוא הפתרון של המערכת

$$\begin{cases} c_1 x_1 + c_2 x_1 = a \\ c_1 x_1^2 + 2c_2 x_1^2 = b \end{cases}$$

אזי נוסחת האיבר הכללי של הסידרה

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_2 = b \\ a_{n+2} = u \cdot a_{n+1} + w \cdot a_n \quad n \geq 1 \end{cases}$$

$$a_n = c_1 \cdot x_1^n + c_2 \cdot n \cdot x_1^n \quad \text{היא}$$

הוכחת משפט זה דומה בכל פרטיה להוכחת משפט 1, אבל כאן יש להעזר בטענות (3) ו-(5).

3. מציאת האיבר הכללי של סידרות ליניאריות

מסדר שני

המטרה היא למצוא את נוסחת האיבר הכללי של הסידרה

$$a_1 = a$$

$$a_2 = b$$

$$a_{n+2} = u \cdot a_{n+1} + w \cdot a_n + t$$

כאשר $w \neq 0$

נגדיר סידרה $\{b_n\}$ על-ידי: $b_n = a_n + y$ ונקבע את ערכו של y כך שהסידרה $\{b_n\}$ תהיה הומוגנית. נציב בנוסחת הנסיגה

$$a_{n+2} = u \cdot a_{n+1} + w \cdot a_n + t$$

את אברי $\{b_n\}$ במקום $\{a_n\}$.

$$b_{n+2} - y = u \cdot (b_{n+1} - y) + w \cdot (b_n - y) + t$$

$$b_{n+2} = u \cdot b_{n+1} + w \cdot b_n + (1 - u - w)y + t$$

כדי ש- $\{b_n\}$ תהיה הומוגנית צריך להתקיים

$$(1 - u - w)y + t = 0$$

$$y = \frac{t}{u + w - 1} \quad \text{אם } u + w \neq 1, \text{ נקבל כי}$$

על-כן, הסידרה $\{b_n\}$ הומוגנית ומקיימת את נוסחת הנסיגה

$$\begin{cases} b_1 = a + \frac{t}{u + w - 1} \\ b_2 = b + \frac{t}{u + w - 1} \end{cases}$$

$$b_{n+2} = u \cdot b_{n+1} + w \cdot b_n$$

את האיבר הכללי של $\{b_n\}$ ניתן למצוא על-פי אחד משלושת המשפטים הקודמים. לאחר שנמצא את b_n , נמצא את a_n מתוך

$$a_n = b_n - \frac{t}{u + w - 1}$$

דוגמה 5: מצא את נוסחת האיבר הכללי של הסידרה

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 5$$

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n - 3$$

פתרון: $y = \frac{-3}{-1} = 3$, $b_n = a_n + 3$. לכן $\{b_n\}$ מוגדרת על-ידי נוסחת הנסיגה

$$b_1 = 6$$

$$b_2 = 8$$

$$b_{n+2} = 4b_{n+1} - 4b_n$$

$$b_n = (4 - n) \cdot 2^n \quad \text{לפי דוגמה 4}$$

$$a_n = (4 - n) \cdot 2^n - 3 \quad \text{לכן}$$

דוגמה 4: מצא את נוסחת האיבר הכללי של הסידרה

$$a_1 = 6$$

$$a_2 = 8$$

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$$

פתרון: $x = 2$ הוא שורש כפול של המשוואה: $x^2 = 4x - 4$. נפתור את המערכת,

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 3 \\ c_1 + 2c_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot 2 = 6 \\ c_1 \cdot 2^2 + 2c_2 \cdot 2^2 = 8 \end{cases}$$

$$c_1 = 4, \quad c_2 = -1$$

$$a_n = 4 \cdot 2^n - n \cdot 2^n$$

$$a_n = (4 - n) \cdot 2^n$$

ולכן

בלומר

$$a_2 - a_1 = b_1$$

$$a_3 - a_2 = b_2$$

.

.

$$a_n - a_{n-1} = b_{n-1}$$

אם נסכם את האיברים בשני האגפים, נקבל באגף ימין

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}$$

ובאגף שמאל $a_n - a_1$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} = \frac{n-1}{2} \cdot [2b_1 + (n-2)t]$$

$$= \frac{n-1}{2} [2a - 2b + (n-2)t]$$

$$a_n = a + \frac{n-1}{2} [2a - 2b + (n-2)t] \quad \text{לכן}$$

הערה: לא קשה להכליל את הרעיון למציאת האיבר הכללי של סידרת פיבונצ'י מסדר 2 אל סדרות פיבונצ'י מסדר גבוה יותר.

4. סוגים נוספים של כללי נסיגה

4.1 מציאת האיבר הכללי של סדרות מהצורה

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_2 = b \\ a_{n+2} = t \cdot a_{n+1}^u \cdot a_n^w \end{cases} \quad n \geq 1$$

כאשר a, t ר"ב חיוביים, u ו- w ממשיים

נגדיר סידרה $\{b_n\}$: $b_n = \ln a_n$

$$\ln(a_{n+2}) = \ln t + u \ln a_{n+1} + w \ln a_n \quad \text{אזי}$$

$$b_{n+2} = u b_{n+1} + w b_n + \ln t, \quad \text{כלומר,}$$

ולכן הסידרה $\{b_n\}$ מוגדרת כך:

$$b_1 = \ln a$$

$$b_2 = \ln b$$

$$b_{n+2} = u b_{n+1} + w b_n + \ln t$$

את האיבר הכללי של הסידרה $\{b_n\}$ נמצא לפי השיטה שהוסברה לעיל. לאחר שנמצא את $\{b_n\}$, נוכל למצוא את a_n מתוך השוויון $a_n = e^{b_n}$.

דוגמה 6: נתונה הסידרה

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 3 \\ a_{n+2} = a_{n+1}^{-2} \cdot a_n^3 \end{cases}$$

מצא את נוסחת האיבר הכללי.

נבצע את כל שלבי הפתרון שתוארו לעיל

$$\ln a_{n+2} = -2 \ln a_{n+1} + 3 \ln a_n$$

$$u + w = 1$$

נגדיר את הסידרה $\{b_n\}$ על-ידי: $b_n = a_n + n y$. נקבע את y כך שהסידרה תהיה הומוגנית.

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= a_{n+2} + (n+2)y \\ &= u \cdot a_{n+1} + w \cdot a_n + t + (n+2)y \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= u(a_{n+1} + (n+1)y) + \\ &w(a_n + ny) + t - u(n+1)y - wny + (n+2)y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= u \cdot b_{n+1} + w \cdot b_n + \\ &t + (1 - u - w)ny + (2 - u)y \end{aligned}$$

מאחר $u + w = 1$, הרי כדי ש- $\{b_n\}$ תהיה הומוגנית נדרוש שיתקיים $t + (2 - u)y = 0$

$$y = \frac{t}{u-2} \quad \text{אם } u \neq 2 \text{ נקבל}$$

ואז הסידרה $\{b_n\}$ תהיה מוגדרת כך:

$$\begin{cases} b_1 = a + \frac{t}{u-2} \\ b_2 = b + \frac{2t}{u-2} \\ b_{n+2} = u \cdot b_{n+1} + w \cdot b_n \end{cases}$$

נמצא את האיבר הכללי של $\{b_n\}$ ואחרי כן נמצא את a_n .

$$g. \quad u = 2 \text{ ו- } w = -1$$

במקרה זה יש למצוא את האיבר הכללי של הסידרה

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_2 = b \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + t \end{cases}$$

מהמשוואה $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + t$ רואים כי

$$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n + t$$

ולכן אם נגדיר הסידרה $\{b_n\}$ על-ידי $b_n = a_{n+1} - a_n$, נקבל כי הסידרה $\{b_n\}$ מוגדרת בעזרת נוסחת הנסיגה

$$\begin{cases} b_1 = a - b \\ b_2 = a - b + t \\ b_{n+1} = b_n + t \end{cases}$$

כלומר $\{b_n\}$ היא סידרה חשבונית ולכן $b_n = (a - b) + (1 - n)t$. מכאן מקבלים כי הסידרה $\{a_n\}$ הינה סידרה חשבונית מסדר 2 (כלומר סידרה שבה סידרת ההפרשים של איבריה היא סדרה חשבונית). וניתן למצוא את איברה הכללי בצורה הבאה:

ב. מצא את האיבר הכללי של הסידרה המוגדרת על-ידי

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + w(n) \end{cases} \quad n \geq 1$$

a קבוע, $w(n)$ פונקציה של המשתנה n .
לפי ההגדרה:

$$a_2 - a_1 = w(1)$$

$$a_3 - a_2 = w(2)$$

.

.

$$a_n - a_{n-1} = w(n-1)$$

נסכם שני האגפים:

$$a_n - a_1 = w(1) + w(2) + \dots + w(n-1)$$

לכן לכל $n \geq 2$: $a_n = a + w(1) + w(2) + \dots + w(n-1)$.
גם כאן הנוסחה תהיה נוחה אך ורק אם ניתן למצוא תבנית מפורשת של הסכום שבאגף ימין.

דוגמה 9:

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = a_n + 4n + 4 \end{cases}$$

$$a_n = 4 + 8 + 12 + \dots + 4n = 4 \frac{n}{2}(n+1) = 2n(n+1)$$

ג. מצא את האיבר הכללי של הסידרה

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = u(n)a_n + w(n) \end{cases} \quad n \geq 1$$

כאשר a קבוע, $u(n)$, $w(n)$ שתי פונקציות של n .
נחפש פונקציה $f(n)$ שתקיים

$$f(n) = u(n) \cdot \frac{f(n)}{f(n+1)} \quad \text{כלי הגבלת הכלליות נניח כי } f(1) = 1$$

במילים אחרות, $f(n)$ מוגדרת על-ידי

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(n+1) = \frac{1}{u(n)} f(n) \end{cases} \quad n \geq 1$$

לכן לפי (א):

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(n) = \frac{1}{u(1) \cdot u(2) \cdot \dots \cdot u(n-1)} \end{cases} \quad \text{לכל } n \geq 2$$

$$f(n+1) = \frac{1}{u(1) \cdot u(2) \cdot \dots \cdot u(n)} \quad \text{ומכאן}$$

$$u(n) = \frac{f(n)}{f(n+1)} \quad \text{נציב את } u(n) \text{ בתבנית}$$

נגדיר $b_n = \ln a_n$. על-פי הגדרה זו

$$b_{n+2} = -2b_{n+1} + 3b_n$$

נפתור את המשוואה $x^2 = -2x + 3$ ונקבל, $x_1 = -3$, $x_2 = 1$.
עתה נפתור את המערכת

$$\begin{cases} c_1(-3) + c_2 \cdot 1 = \ln 1 = 0 \\ c_1(-3)^2 + c_2 \cdot 1 = \ln 3 \end{cases}$$

$$c_2 = \frac{1}{4} \ln 3, \quad c_1 = \frac{1}{12} \ln 3$$

$$b_n = \frac{1}{12} (\ln 3) \cdot (-3)^n + \frac{1}{4} \ln 3$$

נוסחת האיבר הכללי תהיה על-כך,

$$a_n = e^{b_n} = e^{\frac{1}{12} (\ln 3) \cdot (-3)^n} \cdot e^{\frac{1}{4} \ln 3}$$

$$= \left(e^{\ln 3^{1/12}} \right)^{(-3)^n} \cdot e^{\ln 3^{1/4}} = (3^{1/12})^{(-3)^n} \cdot 3^{1/4} \\ = 3^{1/4(1 + (-3)^{-n})}$$

4.2 א. מצא את האיבר הכללי של הסידרה

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = u(n) \cdot a_n \end{cases} \quad n \geq 1$$

כאשר a קבוע, $u(n)$ פונקציה של המשתנה n .
מהגדרת הסידרה נקבל כי

$$1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = a_1 \cdot u(1) \cdot a_1 \cdot u(2) a_2 \cdot \dots \cdot u(n-1) \cdot a_{n-1}$$

לכן,

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_1 \cdot u(1) \cdot u(2) \cdot \dots \cdot u(n-1) \end{cases} \quad \text{לכל } n \geq 2$$

הנוסחה בדרך כלל איננה נוחה כי לא קל למצוא צורה יותר פשוטה של המכפלה שבאגף ימין.

דוגמה 7: אם

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = (n+1)a_n \end{cases} \quad n \geq 1$$

$$a_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n! \quad \text{אזי}$$

דוגמה 8:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{2n+1}{2n-1} a_n \end{cases} \quad n \geq 1$$

$$a_n = 1 \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n-3} = 2n-1$$

ונוסחת האיבר הכללי

$$a_n = u(1) \cdot \dots \cdot u(n-1) [a + f(2)w(1) + \dots + f(n)w(n-1)]$$

$$= 3^{n-1} \left[3 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot (n-1) \right]$$

אפשר למצוא נוסחה פשוטה עבור הסכום

$$S_k = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + kx^{k-1}$$

באופן הבא:

$$xS_k = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + kx^k$$

לכן,

$$S_k - xS_k = 1 + x + x^2 + \dots + x^{k-1} - kx^k$$

$$= \frac{x^k - 1}{x - 1} - kx^k$$

$$S_k = -\frac{x^k - 1}{(x - 1)^2} - \frac{kx^k}{1 - x}$$

ומכאן

$$k = n - 1, x = \frac{1}{3} \text{ נציב את } a_n \text{ נחשב את } a_n$$

מקבלים

$$a_n = 3^{n-1} \left[3 + \frac{1}{3} \left(-\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} - \frac{(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{3}} \right) \right]$$

$$= 3^n + \frac{3}{4}(3^{n-1} - 1) - \frac{1}{2}(n-1) = \frac{5}{4} \cdot 3^n - \frac{n}{2} - \frac{1}{4}$$

$$a_n = \frac{1}{4}(5 \cdot 3^n - 2n - 1)$$

$$a_{n+1} = u(n)a_n + w(n)$$

$$f(n+1)a_{n+1} = f(n)a_n + f(n+1) \cdot w(n) \quad \text{ונקבל}$$

$$b_n = f(n) \cdot a_n \quad \text{נגדיר}$$

$$b_{n+1} = b_n + f(n+1) \cdot w(n) \quad b_1 = a \quad \text{לכן,}$$

לפי (ב) נקבל כי לכל $n \geq 2$

$$\begin{cases} b_1 = a \\ b_n = a + f(2)w(1) + f(3)w(2) + \dots + f(n)w(n-1) \end{cases}$$

והנוסחה של a_n היא

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = (u(1)u(2)\dots u(n-1)) \cdot (a + f(2)w(1) + \dots + f(n)w(n-1)) \end{cases} \quad \text{ול-} n \geq 2$$

שוב הנוסחה יעילה כאשר אפשר להציג את המכפלה ואת הסכום שבאגף ימין בצורה נוחה.

דוגמה 10:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = 3a_n + n \end{cases} \quad n \geq 1$$

במקרה זה $u(n) = 3$, $w(n) = n$ (פונקציה קבועה).

$$f(n) = \frac{1}{3^{n-1}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad \text{לכן}$$

היכן הטעות בטיעון שלהלן:
אנו יודעים, כי 36 אינץ' $= 1$ יארד
על כן, 9 אינץ' $= \frac{1}{4}$ יארד
הואיל ושוורש ריבועי של 9 הוא 3 , ושוורש ריבועי של $\frac{1}{4}$ הוא $\frac{1}{2}$,
יוצא, כי 3 אינץ' $= \frac{1}{2}$ יארד.
מתוך J.A. Paulos, INNUMERACY