

הנושא: "דוברי מתמטיקה" – מבט אל פרויקט אוטונומי

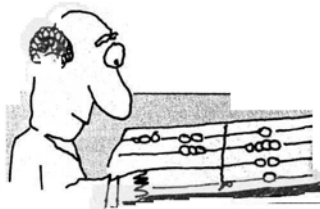
הוכן ע"י: עופר ליבה, ביה"ס התיכון אורט רמות ע"ש גדיש, ירושלים.

תקציר: במאמר מוצג פרויקט המתקיים בבית הספר אורט רמות ע"ש גדיש בירושלים, בו לומדים מתמטיקה בכיתה רגילה ומקצוע נוסף: "מתמטיקה לדוברי מתמטיקה". המטרה: פיתוח חשיבה, הבנה ויצירתיות. האמצעים: מגוונים - החל בפתירת בחנים באופן תדיר, דרך כתיבת יחידת לימוד, סדנאות לחיבור שאלות ועד הרצאות של תלמידים. המאמר מלווה בדוגמאות מנושאי הלימוד.

מילות מפתח: הוראת מתמטיקה, הבנה, חשיבה מתמטית, פרויקט, עבודה שיתופית, עבודת צוות, שיטת חקר, גישה חינוכית, שפה מתמטית, הוכחה, יצירתיות, שיטות הערכה, תורת הקבוצות, אלגברה, אי שוויונים, מטריצות, חבורה.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 12, אדר תשנ"ג, 1993, עמודים 69-71.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 3 עמודים.



מסגרות לימודים מיוחדות

"דוברי מתמטיקה" - מבט אל פרויקט אוטונומי

מאת: עופר ליבה, ביה"ס התיכון אורט רמות ע"ש גדיש, ירושלים

א. מבוא ותאור כללי

ביה"ס אורט רמות נוסד בשנת תשמ"ט. בשנה השנייה לקיומו זומה מנהלת ביה"ס, גבי לאה ניסן, הפעלת פרויקט ייחודי *הוראת מתמטיקה לתלמידים מוכשרים*. שמו ומתכונתו נקבעו על-ידה. נדגיש היטב: **"דוברי מתמטיקה" הינו מקצוע נוסף ונפרד, בלתי תלוי בלימודי המתמטיקה הרגילים, ומזכה בציון בתעודה**. מתכונת זו היא ייחודית לבית-ספרנו, וככל הנראה אינה קיימת בבתי-ספר אחרים. הפרויקט הופעל עד שנת תשנ"ב בכתות של חטיבת הביניים בלבד, תוך שאיפה ברורה להרחיבו לכתות של החטיבה העליונה. השנה אנו מנסים לראשונה להפעילו בכתה י', בקבוצת תלמידים אשר למדו שלוש שנים בפרויקט זה.

כ-10% מתלמידי השכבה לומדים בפרויקט "דוברי מתמטיקה". בשלב הראשון ממליצים על התלמידים מוריהם ומחנכיהם, ולאחר מכן הם עוברים תקופת נסיון של כחודשיים עד לקבלתם הסופית.

בתוכנית מופעלת גישה חינוכית שונה במידה מסויימת מן המקובל (ר' גם הסעיף הבא). פיתוח חשיבה, הבנה ויצירתיות מועדפים על פני זכרון. ניהול מחברת והכנה של שעורי-בית הם בתחום אחריותו של התלמיד, ואינם עוברים ביקורת. סגנון הלמידה היחודי לכל תלמיד נשמר, והוא אינו נדרש, למשל, להשתתף באופן פעיל בזמן השעור. יחד עם זאת, כדי לעודד את התלמיד להצטיינות, ניתנים בונוסים רבים על גילויי התעלות, מקוריות וחשיבה "קדימה".

שמו של המקצוע ומתכונתו המיוחדת מחייבים למדי, ונעשה אמצע בלתי-פוסק להצדיק את קיומו ונחיצותו, הן בתכנים זמועברים בו (ר' מסגרת 1), והן בצורת הפעלתו (ר' סעיפים ב', ג').

מסגרת 1

נושאים שהועברו בחטיבת-הביניים (מחזור ב')

קבוצות "משוגעות": קבוצות שאיבריהן קבוצות וקבוצות מעורבות (חלק מהאיברים "רגילים" וחלקם קבוצות בעצמם). חמש פעולות. פעולות בין קבוצה מעורבת לבין קבוצת החזקה שלה. קבוצות המורכבות מהקבוצה הריקה בלבד (זאת אומרת מהסימונים $\emptyset, \{\}$ בלבד).

קבוצות על הישר הממשי: אינטרוואלים, איחוד של אינטרוואלים או של קבוצות סופיות. קבוצות חסומות. קבוצה דיסקרטית אינסופית וחסומה.

רלציות (יחסים): הגדרה באמצעות קבוצה של זוגות או באמצעות *תבנית פסוק*. גרף מכוון. יחס רפלקסיבי ולא רפלקסיבי, יחס סימטרי, טרנזיטיבי, אנטיסימטרי. צירופים שונים של יחסים, יחס שקילות ופרטיציה. יחס סדר.

מבוא ללוגיקה: פסוק לוגי ופעולות בין פסוקים. טבלאות-אמת. שקילות לוגית וטאוטולוגיה.

משוואות ואי-שוויונים ממעלה ראשונה עם פרמטר (כאשר התבניות הפרמטריות הן ממעלה ראשונה, שנייה, ועם ערכים מוחלטים). מציאת קבוצת-אמת תוך הפרדה בין ערכי הפרמטר. אינטרוואלים פרמטריים וקבוצות פרמטריות. פעולות הדורשות הפרדה בין ערכי הפרמטר.

פעולות בינריות. סגירות, קומוטטיביות, אסוציאטיביות, קיום איבר נטרלי ואיברים סימטריים, מבנה חבורה, הוכחות.

מטריצות כמודל. פעולות כפל בין מטריצות. אי-קומוטטיביות. תת-חבורות של מטריצות 2×2 , קומוטטיביות ולא קומוטטיביות. הוכחות.

ב. מטרות חינוכיות ולימודיות

ההיבטים החינוכיים זוכים לתשומת-לב מיוחדת כיוון שהם לא פחות חשובים מהתכנים, ואולי אף יותר. בין מטרות הפרויקט לטווח רחוק נציין:

להקנות לתלמיד אחריות, בגרות ועצמאות לימודית, ולעודדו להיות שותף פעיל בתהליך הלמידה;
לשלב בצורה מאוזנת יצירתיות וגילוי עם פיתוח מיומנויות פורמאליות, חשיבה מופשטת והבנה מעמיקה;
לעודד התייחסות אסתטית למתמטיקה:

- להקנות את השפה המיוחדת של המתמטיקה המודרנית ושליטה בסמליה;
- להקנות מיומנויות הוכחה.

מסגרת 3: פתרון דוגמה (שאלה 5)

$$A = [0,1] \cup \{2\}$$

$$B = [0,m] \cup \{2m\}$$

• מקרה ראשון: $m < 0$, ואז $B = \{2m\}$.

$$A \cup B = [0,1] \cup \{2m,2\}$$

$$A \cap B = \emptyset$$

$$A \Delta B = [0,1] \cup \{2m,2\}$$

$$A \cup B = [0,1] \cup \{2\}$$

• מקרה שני: $m = 0$, ואז $B = \{0\}$.

$$A \cap B = \{0\}$$

$$A \Delta B = (0,1] \cup \{2\}$$

$$A \cup B = [0,1] \cup \{2\}$$

• מקרה שלישי: $0 < m < \frac{1}{2}$.

$$A \cap B = [0,m] \cup \{2m\}$$

$$A \Delta B = (m,2m) \cup (2m,1] \cup \{2\}$$

• מקרה רביעי: $m = \frac{1}{2}$, ואז $B = [0, \frac{1}{2}] \cup \{1\}$.

$$A \cup B = [0,1] \cup \{2\}$$

$$A \cap B = [0, \frac{1}{2}] \cup \{1\}$$

$$A \Delta B = (\frac{1}{2}, 1) \cup \{2\}$$

$$A \cup B = [0,1] \cup \{2m,2\}$$

• מקרה חמישי: $\frac{1}{2} < m < 1$.

$$A \cap B = [0,m]$$

$$A \Delta B = (m,1] \cup \{2m,2\}$$

• מקרה ששי: $m = 1$, ואז $B = [0,1] \cup \{2\} = A$.

$$A \cup B = A \cap B = [0,1] \cup \{2\}$$

$$A \Delta B = \emptyset$$

$$A \cup B = [0,m] \cup \{2,2m\}$$

• מקרה שביעי: $1 < m < 2$.

$$A \cap B = [0,1]$$

$$A \Delta B = (1,m] \cup \{2,2m\}$$

• מקרה שמיני: $m = 2$, ואז $B = [0,2] \cup \{4\}$.

$$A \cup B = [0,2] \cup \{4\}$$

$$A \cap B = [0,1] \cup \{2\}$$

$$A \Delta B = (1,2) \cup \{4\}$$

$$A \cup B = [0,m] \cup \{2m\}$$

• מקרה תשיעי: $m > 2$.

$$A \cap B = [0,1] \cup \{2\}$$

$$A \Delta B = (1,2) \cup (2,m] \cup \{2m\}$$

מסגרת 2

שאלות לדוגמה

דוגמה 1 (קבוצות משוגעות)

נתונה הקבוצה: $A = \{1,2\}$. בנה קבוצה D בעלת שלושה איברים אשר מקיימת: $\{A\} \subseteq D \cap P(D)$.

(תשי"ן, ז')

דוגמה 2 (קבוצות חסומות)

בנה קבוצה D המקיימת את כל התנאים הבאים:

א. $D - [\frac{1}{2}, 2]$ היא קטע.

ב. $D - (-\infty, 0)$ אינסופית ודיסקרטית.

ג. $\text{Inf}(D - [-1, 1]) = 1$

ד. $\text{Sup}(D - [1, 2]) = 1$

(תשנ"ב, ח')

דוגמה 3 (אי-שוויונים עם פרמטר)

לרשום אי-שוויון אשר חקירתו נותנת:

• עבור $m = 1$, $S = \emptyset$ ✓

• עבור $m \neq 1$, $S = (-\infty, 0)$ ✓

(תשנ"א, ח')

דוגמה 4 (רלציות)

נתונה הקבוצה $B = \{2,4\}$.

מגדירים על הקבוצה $P(B) - \{\emptyset\}$ את הרלציות:

aR_1b כאשר ורק כאשר $a \subseteq b$.

aR_2b כאשר ורק כאשר $a \cup b = B$.

א. צייר גרף מכון של הרלציה.

ב. לגבי כל רלציה, קבע האם היא רלציה טרנזיטיבית, סימטרית, טרנזיטיבית, אנטיסימטרית.

(תשנ"ב, ט')

דוגמה 5 (קבוצות פרמטריות)

תוך הפרדה בין ערכי הפרמטר m , בצע את פעולות האיחוד, חיתוך, והפרש סימטרי בין הקבוצות הבאות:

$$A = [0,1] \cup \{2\}$$

$$B = [0,m] \cup \{2m\}$$

(תשנ"ב, ט')

(ראה פתרון במסגרת מס. 3)

דוגמה 6 (חבורות של מטריצות)

על אוסף המטריצות מסוג

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

כאשר $a \neq 0$, מגדירים את פעולת הכפל הרגילה בין מטריצות. הוכח שאוסף זה, יחד עם פעולת הכפל, מהווה חבורה קומוטטיבית.

(תשנ"ב, ט')

ג. משימות ופעולות

נציין את החשובות שבמשימות המוטלות על התלמיד.

בחנים מועברים בתדירות גבוהה למדי, לצורך העמדה שוטפת של אתגרים בפני התלמיד, וכאמצעי בקרה אישי וכתתי. לאור המטרות המיוחדות במקצוע זה, הבחנים חייבים להיות מגוונים בסגנונם, בתכניהם ובאופי השאלות שבהם. התלמיד נדרש להפגין הבנה, ידע, חשיבה, יכולת גילוי ויצירתיות ושליטה בשפה המתמטית. **בבחנים מותר להעזר בכל חומר לימוד.** אני מזמין את הקורא לעיין בדוגמאות המופיעות במסגרת 2.

לצורך **כתיבת יחידת לימוד** נדרשים התלמידים להתארגן בצוותים של שניים-שלושה ולדון בכתב על נושא שהועבר בכתה, במתכונת של פרק בספר לימוד. משימה זו מאפשרת לתלמידים להתנסות בעבודת צוות יצירתית, להתנסות בעיבוד חומר כתוב ועריכתו, ולשפר בצורה משמעותית את הבנת החומר. להלן ציטוט מתוך דף ההנחיות:

"אתה חופשי לארגן את הכתיבה כראות עיניך, אך עליה להיות מנוסחת היטב, עשירה בהסברים ברורים ובדוגמאות מגוונות. מותר לך לשנות את סדר הנושאים, לקצר בנקודות מסוימות ולהרחיב באחרות..."

סדנאות לחיבור שאלות מופעלות לכל אורך השנה. סדנאות אלו הותגלו כמכשיר יעיל להגברת המעורבות הפעילה של התלמידים ולשיפור משמעותי של הבנת הנושאים הנלמדים. התלמידים מציגים בסדנאות אלו את שאלותיהם, ולאחר מכן מנתחים ומשפרים אותן. הנסיון מראה שהתלמידים מוצאים עניין רב בפעילות זו, והם מרבים להציג רעיונות יפים ומקוריים.

הוצאות של תלמידים הועברו עד כה על בסיס התנדבותי.

ד. תוכניות לעתיד

כפי שנאמר, שאיפתנו היא לפתח פרויקט אשר ילווה את התלמידים במשך ארבע שנים לפחות, החל מכתה ז' או ח' ועד לכתה י"א. כמרכז, יש לדאוג שהפרוייקט לא יקפא על שמריו גם בחטיבת הביניים. שני הדברים מחייבים הכנה מתמדת של נושאים נוספים וחילופיים לשתי החטיבות (רי' מסגרת 4).

ראוי גם שתוספנה משימות ומטרות. כגון קריאת טקסטים באנגלית, הקניית הרגלי עבודה מדעית (תצפית, השערה, פיתוח תיאוריה וישומים), התייחסות היסטורית ופילוסופית למתמטיקה, פיתוח החשיבה הדדוקטיבית, כתיבת עבודות על נושאים שלא מועברים בכתה, ועוד.

ה. לסיכום

האם יש הצדקה וחשיבות לקיום מקצוע נוסף זה? לדעתי התשובה חיובית, ואני מקווה שסקירתי מוכיחה זאת. הקורא מוזמן לשפוט.

לסיום, אני רוצה לשבח את תלמידי ולהודות להם, על האתגר האינטלקטואלי, הדידקטי והחינוכי המרתק שהם מעמידים בפני ללא הרף.

מסגרת 4

מאגר נושאים נוספים וחילופיים

(הרשימה היא חלקית)

- תבניות מספר ותבניות פסוק עם ערך מוחלט.
- פונקציות פורמליות. תמונה ומקור של תתי-קבוצה.
- פונקציה המוגדרת בצורה מפורטת או עם ערך מוחלט, הרכבת פונקציות והפיכת פונקציות.
- סדרות המתכנסות לגבול סופי. סדרות המוגדרות ברקורסיה, התרות רקורסיביות. סדרת פיבונצ'י ומספר הזהב.
- פונקציות בשני משתנים. מודל מתמטי של כיווצים וקיפולים.
- גיאומטריה Taxicab.
- קבוצות אינסופיות. עוצמות.
- מבוא לתורת המספרים. חשבון מודולרי.
- מבוא לקומבינטוריקה ולגרפים סופיים.
- שורשים אי-רציונליים. טכניקות תבניות פסוק עם שורשים.
- טרנספורמציות (בגיאומטריה).
- תורת הגבולות.
- לוגיקה (השלמות). יישומים להוכחות בתורת הקבוצות.
- זוגות ומכפלה קרטזית. פעולות בין זוגות.
- פרמוטציות. חבורות גיאומטריות. חוגים.