

הנושא: קריאה למתמטיקה דיסקרטית

הוכן ע"י:

עופר ליבה, ביה"ס התיכון אורט רמות ע"ש גדיש, ירושלים.

תקציר:

המאמר מדבר בזכות הוראת נושאים מתחום המתמטיקה הדיסקרטית בבתי הספר. לדעת המחבר מהלך כזה יתמוך בלהצגת המתמטיקה כתחום חי ופעיל הקשור גם לחיי היומיום. במאמר מוצגות דוגמאות מתחום המטריצות, תורת הגרפים והסדרות הממחישות את התרומה שיכולה להיות להוראת המתמטיקה הדיסקרטית בבתי הספר.

מילות מפתח:

הוראת מתמטיקה, מודלים, יישומי מתמטיקה, מתמטיקה דיסקרטית, אלגברה, משוואה ריבועית, סדרות, סדרה, כלל נסיגה, תנאי התחלה, סדרה גיאומטרית, סדרת פיבונצ'י, מספר טבעי, מספר הזהב, יחס הזהב, מטריצה, מטריצות, כפל מטריצות, גרף סופי, גרף מכוון, ענפים, קודקודים, בעיות מילוליות, הנדסה, גיאומטריה, גיאומטריה המישור, הנדסת המישור, טרנספורמציות, שיקוף, משולש, ספרים.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 12, אדר תשנ"ג, 1993, עמודים 72-74.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 3 עמודים.



$$A(n+1) = r A(n)[1 - A(n)]$$

אשר יש לה השלכות להבנת תורת קאוס (chaos theory). תלמיד יכול לעשות מחקר זוטא באמצעות מחשב או מחשבון, כשהוא משנה את ערכי $A(0)$.

ב. **חשיבות של בניית מודלים:** תלמידים לומדים זה מכבר לפתור בעיות מילוליות על-ידי רישום והתרת משוואות אלגבריות. המ"ד מספקת כלים יעילים במיוחד לבניית מודלים מעניינים. גרפים סופיים ומטריצות הם שימושיים במיוחד לצורך זה.

ג. **יישומים רבים:** המינהל (הציבורי והעסקי) והתעשייה עושים שימוש נרחב במ"ד. לדוגמה, אם רוצים לבנות לוח-זמנים יעיל להשלמת משימות במסגרת פרויקט גדול, נעזרים בתורת הגרפים.

ד. **הרחבת הקיים:** מ"ד אינה מתחרה עם תוכנית הלימודים המסורתית, אלא מעשירה ואף משלימה אותה. אם ניקח לדוגמה את שיטת ניוטון למציאת אפסים של פונקציה רציפה, זוהי למעשה שיטה רקורסיבית המהווה דוגמה לקשר ההדוק הקיים בין המתמטיקה הרציפה לדיסקרטית.

לצורך המחשה, בחרתי במאמר זה להציג דוגמאות משני תחומים, מטריצות וסדרות. בחרתי בדוגמאות אלה כי לדעתי קל לשבץ אותן במסגרת תוכנית הלימודים החדשה.

מטריצות ככלי רב-גוני

נסתפק בשלושה יישומים לרישום המטריציוני.

א. אגירת נתונים מספריים

למסיבת סוף-שנה הזמינו כתות ט' כיבוד בפונדק "טעים-לי" כמפורט במטריצה הבאה

	פיצה	פלאפל	סמבוסק
1ט	5	10	10
2ט	10	5	5
3ט	15	10	0

קריאה למתמטיקה דיסקרטית¹

מאת: **עופר ליבה**, ביה"ס התיכון אורט רמות ע"ש גדיש, ירושלים

כרטיס ביקור

"מתמטיקה דיסקרטית היא המתמטיקה של ימינו". זוהי הכותרת של פרק הפתיחה בספר השנה לשנת 1991 של המועצה הלאומית של המורים למתמטיקה בארה"ב, NCTM², המוקדש כולו לנושא.

מתמטיקה דיסקרטית (מ"ד) איננה תחום חדש כלל, אלא אוסף של נושאים קיימים שאת הצורך לגבש אותם יחדיו ולייחדם הביאו ההתפתחויות הדרמטיות של עשרים השנים האחרונות בתחום התקשורת, המינהל והמחשבים. בדרך כלל, מאגדת המ"ד את הנושאים הבאים: קומבינטוריקה, הסתברות (מרחב בדיד), מטריצות, תורת הגרפים הסופיים (רשתות), איטרציה ורקורסיה, לוגיקה, תיכנון לינארי, אלגוריתמים וכיו"ב.

בשנים אלו ממש נשמעים בארה"ב קולות רבים הדורשים להכיל את מ"ד בצורה נרחבת בתוכנית הלימודים של בתי-הספר, עם דגש על ניתוח מצבים ויצירת מודלים. יש אף שמציעים ללמד בכיתות נמוכות חלקים נבחרים, כגון שיטות ספירה פשוטות, חשיבה לוגית בסיסית, סדרות והסתברות אמפירית.

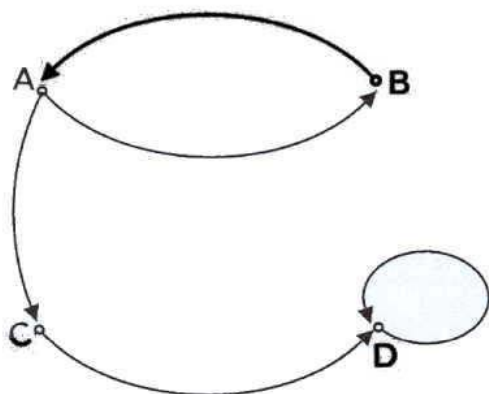
כדאי ללמד

הקריאות הרבות ללמד מ"ד בבתי-הספר מנומקת בכמה סיבות טובות, כבדות משקל:

א. **מתמטיקה כתחום חי:** תלמידים נוטים לחשוב שהמתמטיקה "גמורה" מזה מאות שנים ואין עוד מה להמציא ולפתח. את האמונה הזו ניתן בקלות להפריך באמצעות פרקים מהמ"ד. לדוגמה, בתחום המשוואות הרקורסיביות, עדיין חוקרים את המשוואה הפשוטה

1. NCTM, Discrete Mathematics Across the Curriculum, (1991 yearbook)
2. National Council of Teachers of Mathematics, USA

המספר המופיע בשורה x ובעמודה y שווה למספר הדרכים שבהם ניתן לחבר את x עם y באמצעות שני ענפים. (לדוגמה, בשורה E ועמודה B מופיע 2, ואומנם ניתן "להגיע" מ- E ל- B דרך C או דרך A). באלכסון הראשי מופיעים מספר הענפים היוצאים מכל קודקוד.



המטריצה שתתאר את הגרף המכוון היא

	A	B	C	D
A	0	1	1	0
B	1	0	0	0
C	0	0	0	1
D	0	0	0	1

כאשר בשורה x ועמודה y מופיע 1 אם יש קטע מכוון מ- x ל- y , 0 אם לא. (הפעם המטריצה אינה סימטרית ביחס לאלכסון הראשי). ריבוע המטריצה הוא

	A	B	C	D
A	1	0	0	1
B	0	1	1	0
C	0	0	0	1
D	0	0	0	1

אני משאיר לקורא לפרש את התוצאה.

ג. טרנספורמציות

נתייחס לדוגמה למשולש ABC כאשר $A \equiv (1,1)$ $B \equiv (4,1)$ $C \equiv (1,6)$ נרכז את האינפורמציה במטריצה

1	4	1
1	1	6

אם נכפיל מטריצה זו משמאל במטריצה

1	0
0	-1

מחיר המוצרים ומספר תלשי הבונוס הניתנים עבורם בפונדק "טעים-לי" מפורטים במטריצה הבאה

	מחיר (ש"ח)	תלשים
פיצה	5	2
פלאפל	6	1
סמבוסק	4	1

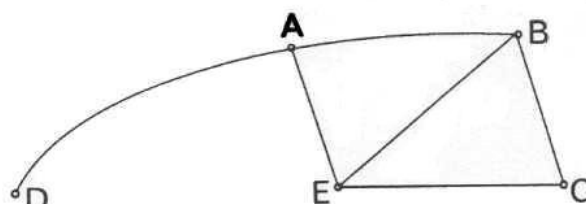
אם נכפיל את המטריצה הראשונה בשנייה נקבל מטריצה

	שולם סה"כ (ש"ח)	סה"כ תלשים
1ט	125	30
2ט	100	30
3ט	135	40

הצורה "המוזרה" שבה מגדירים כפל מטריצות מוצאת לה הצדקה בדוגמאות מסוג זה.

ב. תאור גרף סופי

גרף סופי (רשת) הוא אוסף של קטעים (הנקראים ענפים) המחברים בין הנקודות (הנקראות קודקודים).



נתבונן בדוגמה

תארו לעצמכם רשת כבישים המחברת ערים. מטריצת הענפים המתארת את הגרף היא

	A	B	C	D	E
A	0	1	0	1	1
B	1	0	1	0	1
C	0	1	0	0	1
D	1	0	0	0	0
E	1	1	1	0	0

כאשר המספר הנרשם בשורה x ובעמודה y הוא 1 אם יש קטע המחבר ישירות את x עם y , 0 אם אין. אם נחשב את ריבוע המטריצה נקבל

	A	B	C	D	E
A	3	1	2	0	1
B	1	3	1	1	2
C	2	1	2	0	1
D	0	1	0	1	1
E	1	2	1	1	3

נחתום, איך לא, עם סדרת פיבונצ'י

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

המשוואה האופיינית היא $x^2 - x - 1 = 0$ ופתרונותיה הם

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (\text{מספר הזהב "המפורסם"})$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad (\text{ההופכי-נגדי של מספר הזהב})$$

ולאחר הצבת תנאי ההתחלה, נקבל

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

הוקוס-פוקוס... הנוסחא "מלאה" בשורשים אך נותנת מספר טבעי לכל n !



רשימת ספרות

- Finkbeiner, Daniel & Lindstrom, Wendell: *A Primer of Discrete Mathematics*. Freeman, 1987.
- Gerstein, Larry: *Discrete Mathematics*. Freeman, 1987.
- Lipschutz, Seymour: *Discrete Mathematics*. Schaum, McGraw-Hill, 1976.
- Lipschutz, Seymour & Lipson, Marc: *2000 Problems in Discrete Mathematics*. Schaum, McGraw-Hill, 1992.
- Townsend, Michael: *Discrete Mathematics*. Benjamin Cummings, 1987.
- אלטשולר, עמוס: גרפים, פאונים ומפות. המרכז להוראת-המדעים. — משלר, מיכאל: אלגברה לשנת הלימודים התשיעית. עס-עובד, 1971.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

מטריצת התוצאה מתארת משולש אשר התקבל מהמשולש ABC על-ידי שיקופו סביב ציר x . ניתן להראות שהמטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

מייצגת תמיד שיקוף סביב ציר x . באותו אופן המטריצה

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

מייצגת שיקוף סביב הישר $y = x$, המטריצה

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

מייצגת סיבוב של 90° בכיוון החיובי סביב הראשית, וכיו"ב.

התרת משוואות רקורסיביות לינאריות מסדר שני

המטרה היא למצוא נוסחה לפי מקום עבור סדרות המוגדרות על-ידי

$$a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1}$$

ניקח לדוגמה את הסדרה

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 9$$

$$a_{n+1} = a_n + 2a_n \quad (n \geq 2)$$

נחפש תחילה סדרה גיאומטרית x^n המקיימת את כלל הנסיגה. הצבת x^n במקום a_n נותנת:

$$x^{n+1} = x^n + 2x^n$$

ולאחר צמצום ב- x^{n-1} נקבל $x^2 - x - 2 = 0$, משוואה ריבועית (הנקראת משוואה אופיינית) אשר פתרונותיה הם $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. ניתן לבדוק שכל סדרה מסוג

$$\alpha(-1)^n + \beta \cdot 2^n$$

מקיימת את כלל הנסיגה. הצבת תנאי ההתחלה ($a_2 = 9$, $a_1 = 3$) נותנת $\alpha = 1$, $\beta = 2$. מכאן שהנוסחה לפי מקום עבור הסדרה היא

$$a_n = (-1)^n + 2 \cdot 2^n$$

אם נשנה את תנאי ההתחלה וניקח לדוגמה $a_2 = 16$, $a_1 = 4$, נקבל $\alpha = 2$, $\beta = 3$ והנוסחה לפי מקום תהיה

$$a_n = 2(-1)^n + 3 \cdot 2^n$$

אם הדיסקרימיננטה של המשוואה האופיינית היא אפס או שלילית, הפירוש שונה (אני משאיר לקורא לעיין בספרות).