

הנושא: עוד על הפרקטלים – המבט הפיסיקלי מרקמי האנדרלמוסיה

הוכן ע"י: ורדה בר, האוניברסיטה העברית.

תקציר: במאמר מוצגות מספר דוגמאות פיסיקליות הממחישות את ההשפעה המשמעותית שיכולה להיות לשינוי קטן בתנאי התחלה על תיאור תופעה – רעיון בסיסי בתורת הכאוס. המאמר מדגיש את החשיבות של שימוש במודלים מתמטיים. אלה יכולים במקרים הפשוטים לחזות תופעות דטרמיניסטיות ובמקרים אחרים – להצביע על חוסר אפשרות לניבוי – על כאוס.

מילות מפתח: סדר, אי סדר, כאוס, מרקם האנדרלמוסיה, פרקטל, סדר פרקטלי, פרקטלים, ניסוי, מודל, המחשה, שיטת חקר, יישומי מתמטיקה, פיסיקה, נגזרת, משוואות דיפרנציאליות, ליניארי, לא ליניארי, משוואות Navier ו-Stokes, מטולטלת, משרעת, תנודה, לורנץ, קבל, מושך, תהודה, תנאי התחלה.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 12, אדר תשנ"ג, 1993, עמודים 14-22.

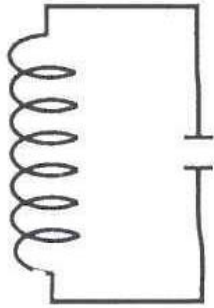
החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 9 עמודים.

עוד על הפרקטלים מרקמי האנדרלמוסיה

המבט הפיסיקלי

מאת: **ורדה בר**, האוניברסיטה העברית

דוגמה 2: תנודות מטען זרם במעגל סליל חשמלי חסר התנגדות



איור 2
מעגל סליל קבל חסרי התנגדות

נניח כי הקבל הוטען במטען מסוים, והמעגל נסגר. הקבל מתפרק תוך כדי הזרמת זרם דרך הסליל. בסליל נוצר שדה מגנטי. אפילו כאשר המתח בין לוחות הקבל מתאפס, נמשך הזרם באותו כיוון תוך כדי החלשות השדה המגנטי. כך נטען הקבל מחדש, וכיוון המתח מתהפך. כאשר השדה המגנטי נעלם, מתחיל הקבל להתפרק שנית וחוזר חלילה... באופן כמותי מיוצגות תנודות הזרם על ידי המשוואה:

$$\frac{Q}{C} + L \frac{di}{dt} = 0$$

כאשר המתח על הסליל הוא $L \frac{di}{dt}$, המתח על הקבל $\frac{Q}{C}$ וסכום המתחים במעגל סגור חסר מקור הוא אפס.

אם נגזור את המשוואה לפי המשתנה t , נקבל

$$-\frac{i}{C} = L \frac{d^2i}{dt^2}$$

משוואה זאת תואמת למשוואות המטוטלת או הקפיץ ופתרונה תנודה הרמונית של זרם כאשר הקבל נטען ומתפרק חליפות.

דוגמה 3: מטוטלת הנעה סביב צירה בסביבה ממשית כלשהי.
המטוטלת מתחילה במשרעת² מסוימת. כאשר ממשיכה המטוטלת לנוע, קטנה המשרעת בהדרגה כתוצאה מהתנגדות האוויר והחיכוך.

(2) **משרעת** או **אמפליטודה** היא המרחק המקסימלי מהציר אליו תגיע המטוטלת בכל חצי מחזור.

האם אפשר לדעת את העתיד?
לפליס¹ (Laplace 1749-1827) ניסח את עמדתו בשאלה זו בצורה ברורה ביותר:
"למוח אשר ברגע מסוים ידע את כל הכוחות המפעילים את הטבע ואת המקום של כל העצמים שבו. ואילו היה מוח זה רחב במידה מספקת כדי למסור את כל הנתונים האלה ולנתחם, הוא היה יכול לרכז למשוואה יחידה את תנועת הגופים הגדולים ביותר והאטומים הקטנים ביותר. בשביל מוח כזה שום דבר לא היה לא בטוח, העתיד כמו העבר היו שניהם גלויים לפניו."

1. האם קיימת קביעות (דטרמיניזם) מוחלטת

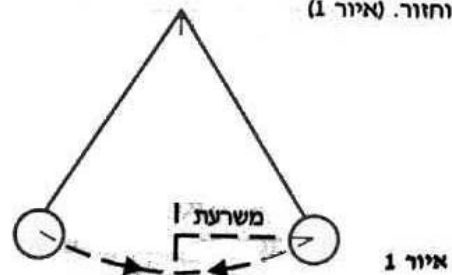
כדי לחזות את מזג האוויר או זקוקים, ראשית כל, למערכת משוואות דיפרנציאליות, המתארות את תנועת האטמוספירה של כדור הארץ; כמרכן, עלינו להעזר בתצפיות הטובות ביותר, המבססות על תחנות על פני כדור הארץ, אוניות, מטוסים, בלונים מטאורולוגיים ולווינים.

אחרי זה נשארים רק החישובים... כך לכאורה. למעשה, אין הדבר כך. משוואות הנראות דטרמיניסטיות לגמרי מציעות פתרונות המשתנים בצורה שאינה נתנת לחיזוי מדויק ובכל זאת יש בה סדר נסתר. כדי להבין זאת נגדיר את המושג **מושך** (Attractor).

2. מושך

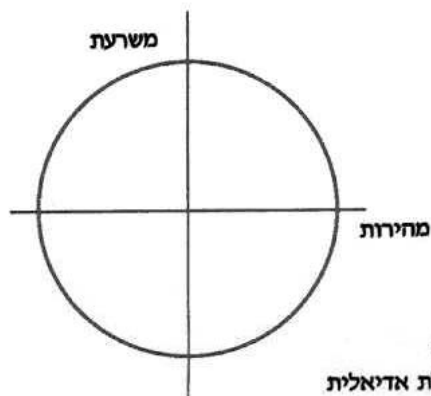
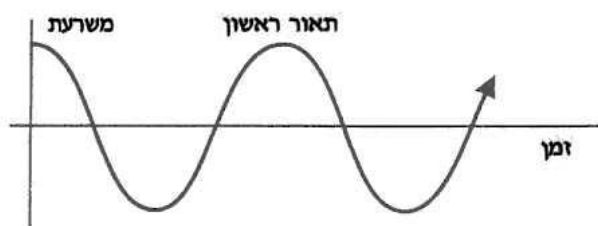
מושך הוא הצורה הסופית אליה תגיע מערכת כלשהי.

דוגמה 1: מטוטלת הנעה בסביבה אידיאלית, ללא חיכוך
מטוטלת הנעה בריק ובלי חיכוך תנוע כל הזמן בין שתי נקודות קבועות הלך וחזור. (איור 1)



איור 1

(1) פיזיקאי ואסטרונום צרפתי יוצר השערת הערפיליות.



איור 4

מטוטלת אדיאלית

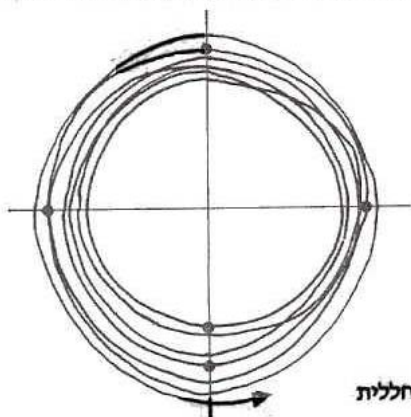
נעבור עתה לתנועה מורכבת יותר.

דוגמה 4: מטוטלת בתוך חללית המקיפה את הירח.

תנודות המטוטלת נקבעות על ידי מחזורי העצמי, תקופת הקפת הירח סביב הארץ (חודש), ותקופת הקפת הארץ סביב השמש (שנה). כמרכז, קימות עד תנועות: תנודת הארץ הנגרמת על ידי משיכת הירח את הארץ, נקיפת (perception) הציר של הארץ ועוד...

אם כל התקופות של תנועות אלה אינן מכפלות שלמות של תקופה מסוימת, כגון תקופת סיבוב הירח סביב הארץ, לא תחזור התנועה על עצמה בדיוק אף פעם.

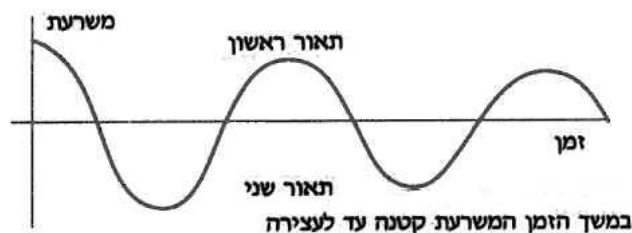
המטוטלת תבצע תנועה תנודתית סביב לשתי נקודות, אך מהירותה לא תתאפס בדיוק בערכים קבועים של X_{max} , ולא תגיע לערך מירבי כאשר תעבור המטוטלת את הציר. במקום המעגל הקבוע שתואר מקודם נקבל את התנועה המתוארת באיור 5.



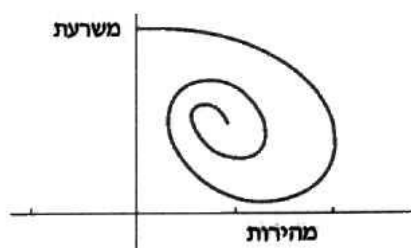
איור 5

מטוטלת בחללית

(3) תקופה היא הזמן הנדרש לביצוע מסלול סגור שלם אחד.



במשך הזמן המשרעת קטנה עד לעצירה



המושך היא נקודת האפס 0 אליה תגיע לבסוף העוצמה

איור 3

מטוטלת ממשית

במציאות שבה קיימים חיכוך והתנגדות אוויר, אם נעקוב אחרי התנועה זמן ממושך תגיע לבסוף המטוטלת למצב מנוחה, שבו המשרעת היא אפס. מצב האפס הוא ה"מושך" של המטוטלת.

קיימות מערכות שתנועתן נמשכת (בתאוריה עד אין סוף) בין שתי נקודות קבועות. המושך מהווה אז את מערך הנקודות המהוות מסלול סגור החוזר על עצמו בין שתי נקודות קיצוניות אלה.

הדוגמה לכך היא מטוטלת חסרת חיכוך הנעה בריק, או מעגל חשמלי שיש בו קבל (חסר התנגדות) וסליל (חסר התנגדות). במעגל כזה יחליף הזרם את כיוונו בתדירות קבועה. המטענים החשמליים ינועו "לנצח" בין הסליל והקבל.

3. מושך מוזר (strange attractor).

כדי להגדיר מושך זה בצורה ברורה נציג שני תאורים של תנועת המטוטלת ושל שינויי עוצמת הזרם במעגל החשמלי של זרם חילופין. תאור אחד יהיה העוצמה כפונקציה של הזמן ובתאור השני ידובר במהירות כפונקציה של המקום (משרעת או זרם).

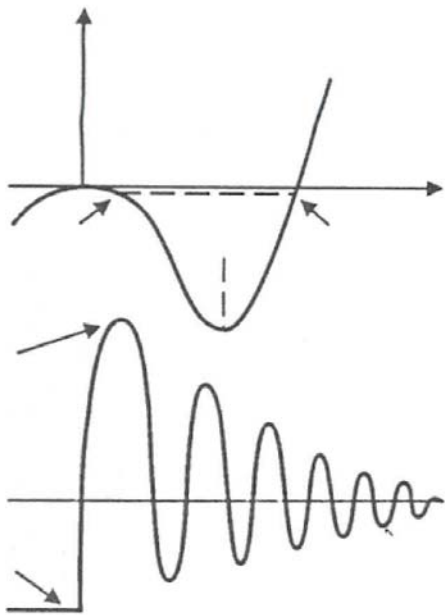
המטוטלת נעה מהציר ועד למרחק X_{max} (המשרעת). בנקודה זו מהירותה מתאפסת והמטוטלת מתחילה ליפול לכיוון הציר בנקודת האפס, שם מהירותה גדולה ביותר: V_{max} . כך תמשיך המטוטלת עד לצד שני ותגיע ל- $-X_{max}$ (המשרעת בצד השני). כאן שוב מתאפסת המהירות והמטוטלת חוזרת לציר. במרחק אפס מהציר מהירותה גדולה ביותר, אך מכוונת לכיוון ההפוך והיא אז $-V_{max}$. המטוטלת ממשיכה עד ל- X_{max} וחוזר חלילה. המושך הוא המסלול המעגלי המתואר באיור 4.

i. אין משקולת, $m = 0$. זהו המקרה הלינארי. המערכת מופעלת בפרוטנציאל הוק, כאשר $M = -D\varphi$.

ii. m קטן למדי. המומנט המחזיר אינו ליניארי. הפרוטנציאל מעוות במקצת, אבל התנועה עדיין מרוסנת.

iii. m גדול למדי

ישנן שלוש נקודות של שיווי משקל, שתיים יציבות ואחת בלתי יציבה. התנועה נעשית בלתי ניתנת לניבוי כאשר שינוי קטן בתנאי ההתחלה משנה מאוד את מבנה התנועה. שתי הנקודות היציבות (s_1 ו- s_2) מתאימות למצב שבו המשקולת למטה; הנקודה הבלתי יציבה s_3 מתאימה למצב שבו המשקולת למעלה. במצבים היציבים, s_1 ו- s_2 , המשקולת "נופלת" למטה, הקפיץ מוחזק מתוח, המומנטים – המגדיל של המשקולת והמחזיר של הקפיץ – מאזנים זה את



איור 7
צורת הפרוטנציאל סביב מצב שיווי המשקל S_1 . התלות שבין המשרעת והמחזור.

מתחילים מהמצב שבו נמצא המכשיר קרוב לנקודה הלא יציבה, אך התנודות מבוצעות סביב אחד ממצבי שיווי המשקל היציב. מכיוון שהפרוטנציאל לא סימטרי (בערכי φ גדולים "משתלט" האיבר המתכונתי ל- φ^3 והפונקציה עולה בתלילות גבוהה...), קיימת תלות של זמן המחזור במשרעת (אמפליטודה), כאשר משרעות גבוהות מתאימות לזמני מחזור ארוכים.

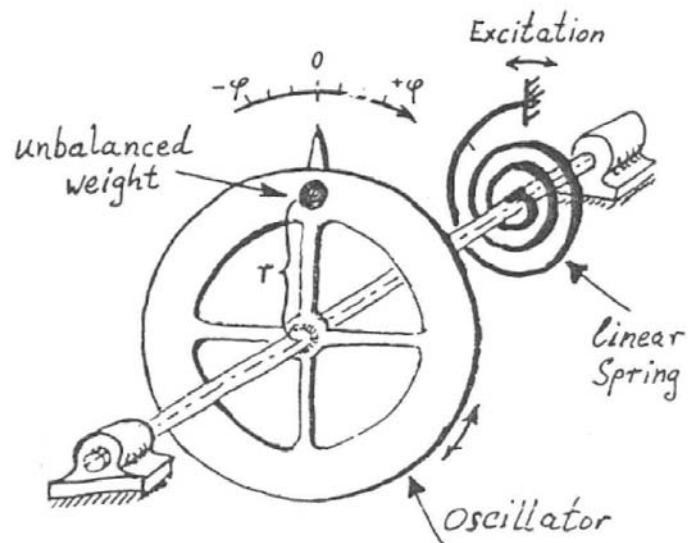
אם מגיעים למצב שבו קיימת תהודה בין התנודות של הכוח החיצוני (הקפיץ) ובין המערכת הפנימית, המשרעת מתחילה לגדול, אך בגלל הקשר בין המשרעת לבין המחזור, התהודה נהרסת והתנודות קטנות. אנחנו יכולים לחזור שנית לתהודה וחזור חלילה. קשר זה בין מחזור, משרעת וכניסה ויציאה מהתהודה הוא הבסיס לתופעת הכאוס שמבצעת המערכת שלפנינו.

במדויק על עצמן אך אפשר לחסום אותן בתוך "טבעת" כלשהי. התנועה יוצרת פיזור של מסלולים, כאשר בכל מחזור פועלות ההפרעות הנגרמות על ידי יתר התנועות בדרך שונה. הדגמת תנועה זו מקרבת אותנו למושג המושך המוזר. הואיל ואין לנו מטוטלת בתוך חללית, נציע דגם מכני שימחיש תנועה מחזורית מופרעת מעין זאת ובהמשך תעזור לנו להבין את המעברים בין סדר לכאוס.

2 גמה 5: דגם מכני

נציע מודל מכני, הניתן להפעלה בכיתה, שימחיש את סוג התנועה שאנו מבקשים. המערכת מכילה קפיץ ספירלי, מוט מרכזי (אליו מתחבר הקפיץ המפעיל אותו), עיגול מחזורי המצויד במשקולת בלתי מאוזנת (משקולת זו תגרום לתגובות הלא ליניאריות של המערכת ותכניס את הגיוון – את ה"כאוס"). מתקן זה (ראה איור 6) ימחיש כיצד בהדרגה עוברים ממערכת שבה קיים ניבוי מדויק למערכת שיש בה תנועה מורכבת ובלתי צפויה.

א. המערכת היוצרת תנודות בעלות מחזור ומקצב משתנה



איור 5

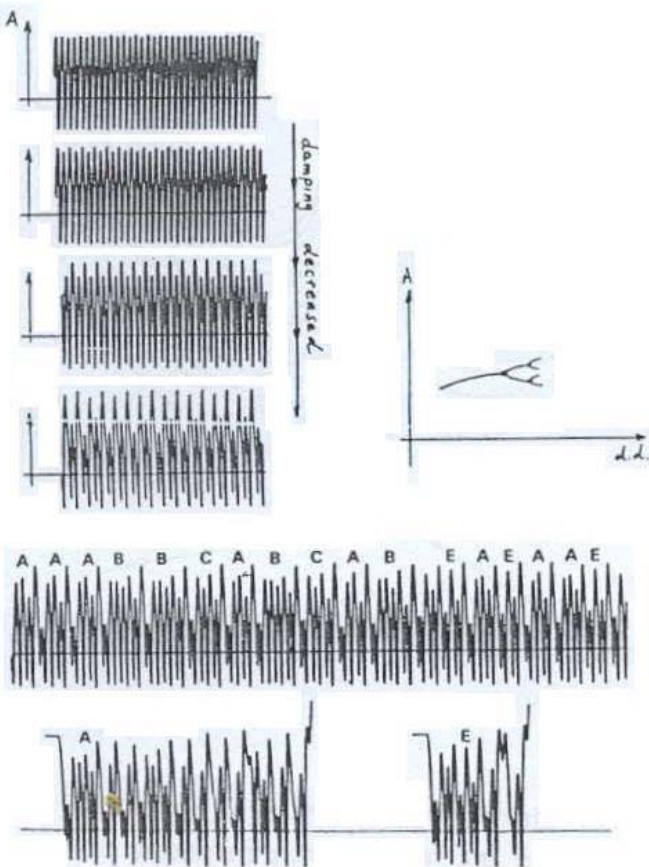
קובעים את המוט בשני קצותיו בעזרת מצמידים. מפעילים את הקפיץ. כאשר משחררים את הקפיץ מתקבל צמד כוחות (שני כוחות שווים מקבילים ומנוגדים היוצרים תנועה סיבובית המחזירה את הקפיץ אל מצבו הבלתי מופרע).

בלשון הפיזיקה מתקבל מומנט סיבובי: $M_1 = -D\varphi$. המשקולת המצויה בהתחלה למעלה ובשיווי משקל רופף יוצרת מומנט סיבובי נוסף, M_2 , הגורם דווקא להוצאת המערכת משיווי משקל. המשקולת פועלת נגד הקפיץ!

$$M_2 = mgr \sin \varphi = mgr \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6} \right)$$

נזכור: במצב תהודה המשרעת גדלה, המחזור גדל, התהודה נעלמת. המשרעת קטנה, המחזור קטן, נוצרת תהודה חדשה וכו'... כך מתחלפות ארבע משרעות וכמובן ארבע תדירויות הקשורות בהן.

עם החלשה נוספת של הקפיץ נעשית התנועה לגמרי בלתי סדורה (כאוטית לגמרי). התנועה מורכבת מצורות של תדירויות המשתנות בפתאומיות ובצורה בלתי סדורה. אם עוקבים אחרי התנועה במשך זמן ממושך, אפשר להבחין בצורות מטיפוסים: E, D, C, B, A וכו'... אם מפסיקים את פעולת המערכת ומפעילים אותה מחדש, מופיעה תחילה הסדרה A, אבל בהמשך לא מופיע המהלך הקודם. השרשרת הקודמת B, B, A, A, A אינה חוזרת. ככל שמנסים להחזיר את המערכת למצבה התחילי כדי להגיע בדיוק לאותה הסדרה, לא מצליחים. שוני קטן מאוד בתנאי ההתחלה מוביל לתמונה שונה לגמרי של התנועות.



איור 8

השתנות התנועה כאשר מקטינים בהדרגה את חוזק הקפיץ

ב. תנודות מאולצות במערכת קפיץ – משקולת לא מאוזנת

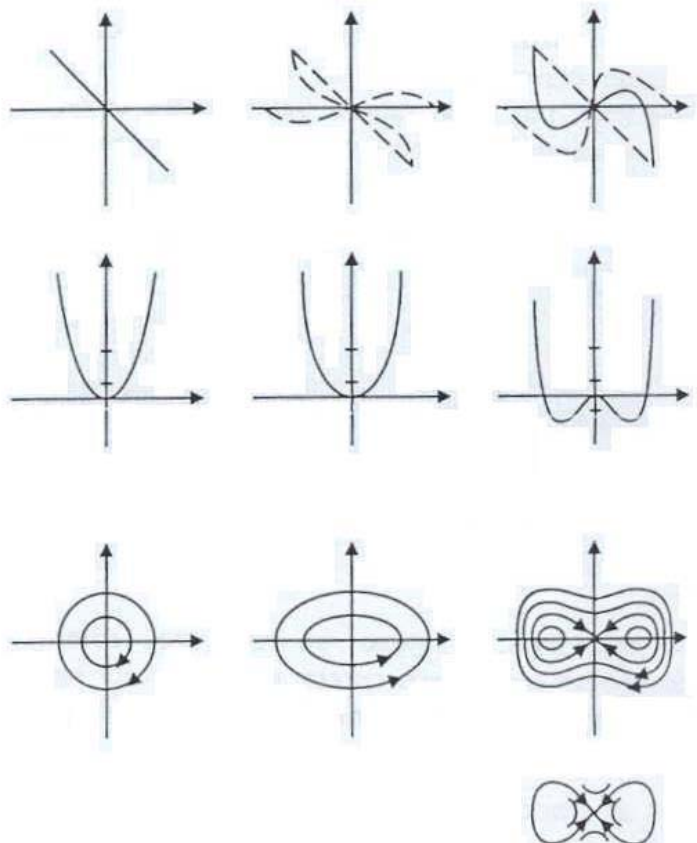
מכיוון שהמשחק הוא בין הכוח המחזיר של הקפיץ וכובד המשקולת, נתחיל מקפיץ "חזק" (בעל כוח מחזיר גבוה) ונחליש אותו בהדרגה. בקפיץ חזק התנועה היא (לפחות למראית עין) הרמונית קלאסית, כאשר התדירות והאמפליטודה קבועות.

מתחילים להקטין בהדרגה את חוזק הקפיץ. פתאום מפסיקה התנועה להיות בעלת תדירות אחת ומופיעה תדירות נוספת. המערכת "מתנדדת" בין שתי התדירויות. ממשיכים להקטין את חוזק הקפיץ ובשלב מסוים מתחיל הקפיץ להתנדד בארבע תדירויות.

איור 8

תופעת הכפלת התדירות מתארת "מזלג פינגבאום" ראה המאמר של יששכר אונא.

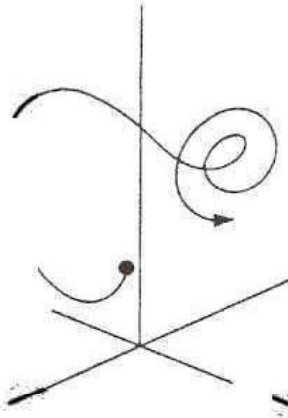
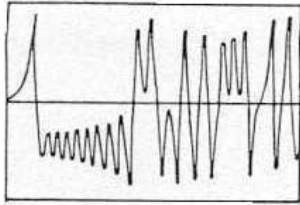
את התופעה ניתן לראות גם בהתנהגות של מערכות פיזיקליות ולא רק בהפשטה המתמטית!



איור 9

השתנות התנועה כאשר מקטינים בהדרגה את חוזק הקפיץ

מהו אפוא המושך של התנועה? זהו, הפעם, מושך מחזר.

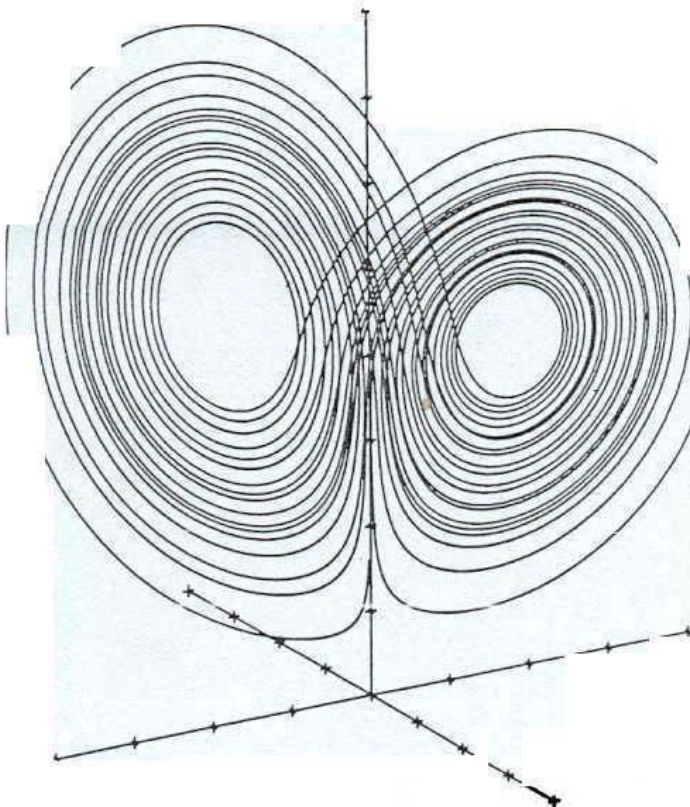


התנועה אכן לעולם אינה חוזרת על מתכונת קבועה, אך בגלל הקשר בין תדירות לבין מחזור אין המשרעת יכולה לעלות מעל לערך גבולי מסוים ואף אינה יכולה ליפול מתחת לערך גבולי קטן מסוים. שני ערכים אלה, המגדירים את ה"מעטפה" שבתוכה מתרחשת התנועה, הם המושכים המוזרים של התנועה.

4. מהי תלות רגישה בתנאי התחלה, ומדוע איננו יכולים לחזות את מזג האוויר?

ניתוח המערכת ה"קטנה" של קפיץ ומשקולת יכול ללמדנו מדוע איננו יכולים לבא את מזג האוויר מעבר לכמה ימים.

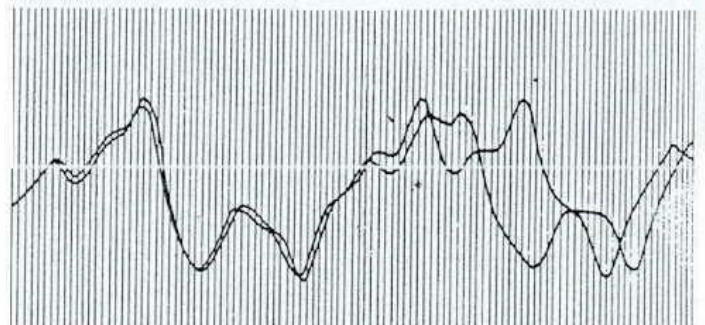
תנועה במערכת שאינה חוזרת על עצמה.



מושך לורץ - או מושך מוזר

איור 11

הניסוי של לורץ (A. Lorenz) היה אחד המאורעות שהובילו לגילוי מדע ה"לא לינאריות", מדע הכאוס. לורץ פיתח מערכת של שתיים עשרה משוואות שתארו את מערכת מזג האוויר. הוא פתר את מערכון המשוואות במחשב ו"עקב" אחרי השינויים במשתני מזג האוויר: טמפרטורה, רוחות וכו'... (זו המשמעות של המשתנים במשוואות אלה). במקרה מסוים החליט להריץ פעם נוספת קטע מסוים של החישוב. התוצאה לא תאמה את מה שהתקבל קודם. הסיבה לכך הייתה שהוא השתמש כנתוני פתיחה בטור המודפס של הנתונים שבו היו שלוש ספרות אחרי הנקודה בלבד. זאת לעומת הנתונים שבהם השתמש בחישוב הקודם, שנשלפו מזכרון המחשב, היו בדיוק של שש ספרות אחרי הנקודה (מי בכלל יכול למדוד נתוני מזג אוויר בדיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה?).



איור 10

לורץ חשב, לתומו, כי ההשפעה של השינוי הזעיר בסיפורה הרביעית אחרי הנקודה נעלם בהדרגה. אך למעשה שינוי זעיר זה גרם בהדרגה לכך שכל מערך מזג האוויר כפונקציה של הזמן השתנה לגמרי, ראה איור 10.

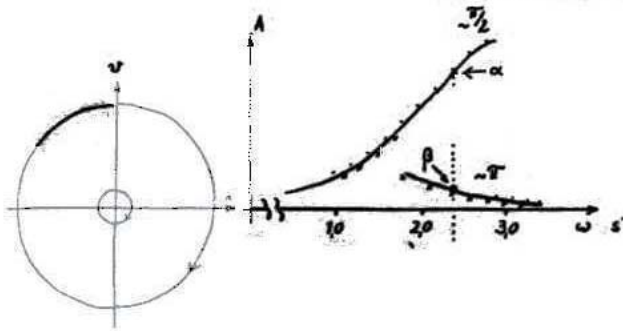
למדנו, כי במערכות מכניות שאותן ניתן להדגים בכיתה, כמו גם במזג האוויר קימת תלות רגישה בתנאי ההתחלה. שינוי מזערי בנתונים גורם לסטייה שאינה מתכנסת ונעלמת, אלא לחפץ, ממשיכה וממשיכה להשפיע, והשפעתה הולכת ומתחזקת עד שהמערך הקודם נמחק ומערך חדש נוצר במקומו. זהו סוף לניבוי ארוך הטווח של מזג האוויר עליו חלם לפלס.

5. מרחק, מהירות וגם פאזה (מופע)

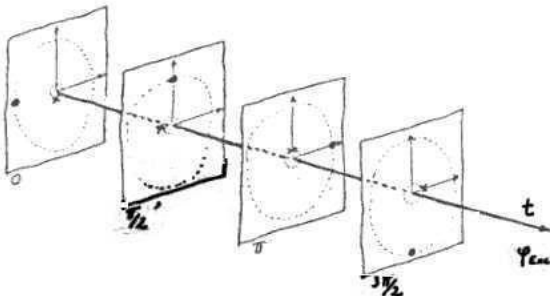
ננסה עתה להבין מהו המשתנה שהמערכת המכנית ומערכות תנודתיות אחרות כה רגישות לו.

במערכת מתנדדת, כמו זו שתארנו, ישנם שלשה משתנים: מרחק, מהירות ומופע.

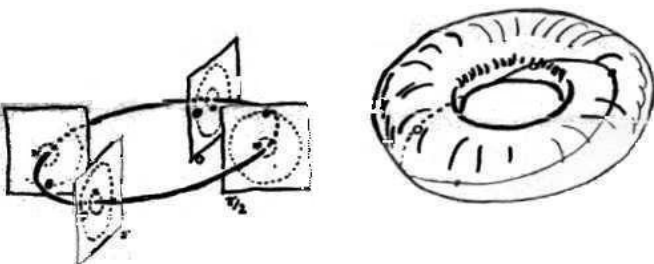
במרחב הפאזות: שתי משרעות יציבות α ו- β ושני מעגלים המבטאים את הקשר בין x ו- v .



כפונקציה הזמן: הנקודה השחורה המתארת את מצב המערכת בכל רגע נעה על גבי המעגל המתאר את שינוי x, v בשביל המשרעת α .



כדי לחזות את העובדה שמבחינת הפאזה $0 = 2\pi$, "נקפלי" את ציר הזמן למעגל.

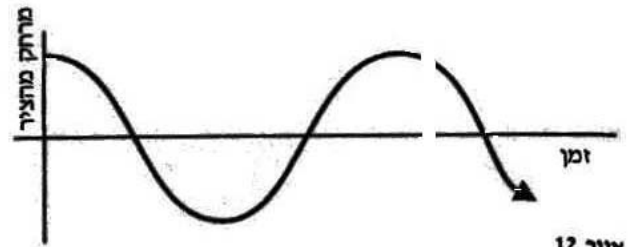


תנועה כאוטית תתחזה על גבי ה"כעך" המוגבל בשני מעגלים: "alpha" ו-"beta" שהופיעו למעלה.

איור 13

המהירות עוברת גבול מסוים נוצרות מערבולות. כאן לא היה פיתרון שיחלום את התנועה ויתאר אותה נכון.

התנועה הטורבולנטית נחשבה כשונה מהתנועה הסדורה עד כדי כך שבשנת 1934 טען Leray כי מערכת המשוואות של Navier and Stokes אינה תואמת לתאור. בשנת 1948 טען Landau טענה אחרת. הוא נסה לתאר את התנועה המערבולתית כעשויה מצרף של אינסוף תנועות סדורות. בשנת 1972 בוקרה גם תאוריה זו על



איור 12

תנודת המטוטלת כפונקציה הזמן: $x = A \cos \omega t$

ω הוא המופע, כלומר גודל שממנו אפשר ללמוד על המקום שבו נמצאת המטוטלת בכל רגע ועל כיוון תנועתה. תנועה תנודתית תלויה בצורה רגישה בפאזה. כדי למסור אנרגיה למטוטלת יש להפעילה בדיוק בנקודת הקצה, כאשר המטוטלת במנוחה. אז גורמת המכה החיצונית להגדלת המהירות. התערבות בנקודה אחרת, ולו גם סמוכה לראשונה, גורמת להפחתת המהירות. רגישות זו לפאזה אופיינית להרבה מערכות תנודתיות מכניות, חשמליות ואחרות.

נתבונן בתנועה הנוצרת על ידי קפיץ די חזק ו- β קטן. במקרה זה מתקבלות שתי משרעות, α ו- β .

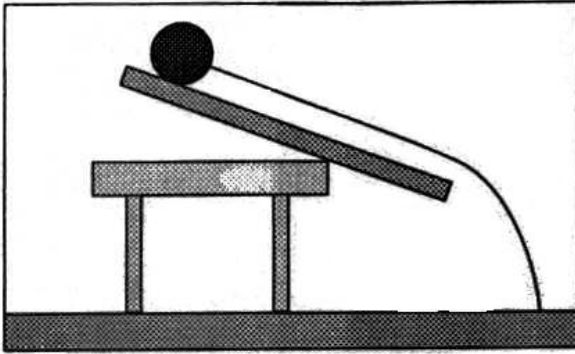
אפשר לבחור תנאי התחלה (משרעת x ומהירות v) שיגרמו לכך שהמערכת תגיע למשרעת α . אפשר גם לבחור תנאי התחלה שיובילו ל- β . המישור $[x, v]$ מתחלק לשני איזורים: איזור "הניקוז" של α , ואיזור "הניקוז" של β .

אך אם נבחר כתנאי התחלה נקודה הנמצאת על קו החיץ שבין α ו- β , בגלל ההשפעה הרבה של משתנה הפאזה שינוי קטן בו ירחיק את הפתרון מ- α אך לא יקרבו ל- β וכך תהיה תנועה בלתי סדורה, שאינה מתכנסת לשום פתרון, שאינה חוזרת על עצמה. במישור $[x, v]$ יתקבל קו פתלתול המסתובב בין שני הערכים מבלי לחזור על עצמו אף פעם, אך המתקיים תמיד בטווח ערכים מסוים של x ושל v . "המושך" שהוגדר כצורתה הסופית של המערכת הוא אכן מוזר, מכיוון שלמערכת אין צורה סופית קבועה! לורץ היה הראשון שגלה התנהגות כזאת של מערכות ולכן קוראים למושך זה גם "מושך לורץ".

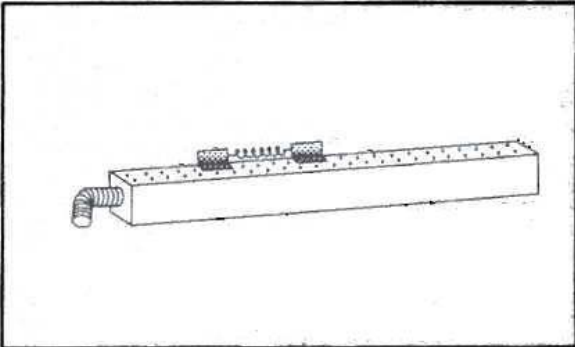
6. שלש תאוריות לזרימה טורבולנטית (מערבולתית)

אחת הבעיות הקשות ביותר של הפיזיקה הוא תנועה טורבולנטית. מסתבר כי באופן גס גם מערכת זו מתנהגת כמו המערכת המכנית של הקפיץ המסתובב. כדי לתאר תנועה של נוזל משתמשים במערכת משוואות שפותחה על ידי Stokes ו-Navier. בקרוב הליטארי של המערכת במהירות קטנה ביותר הזרימה רציפה. אפשר להשתמש במשוואות גם לתאור תנועות מורכבות יותר, כגון גלים או זרימה סביב למחסומים ולסכרים. אך כאשר

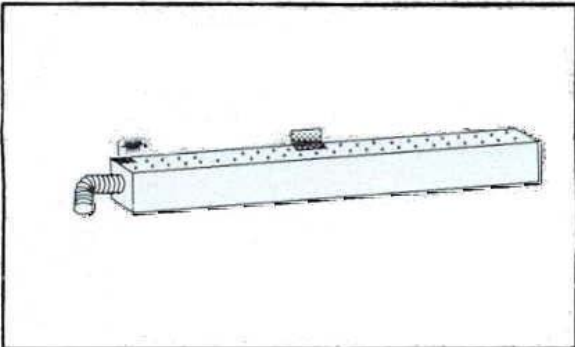
כאשר:



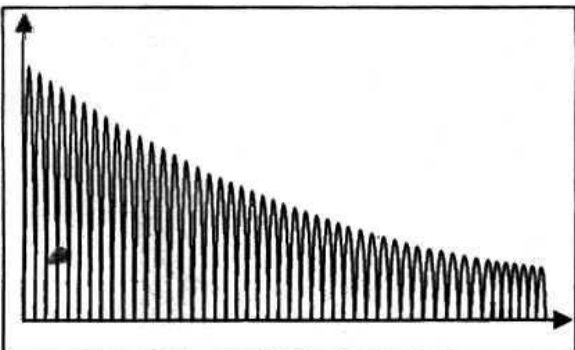
כדור נופל משולחן. ניבוי מושלם.



שני גופים קשורים בקפיץ. תנודות הרמוניות מרוסנות



גוף המתנעש בקפיץ. תנודות הרמוניות מרוסנות



מערכת תנודות בתדירות קבועה המתארת את התוצאות של ניסויים 2 ו-3. ניבוי מושלם של התוצאות.

איור 14

די Takens ו-Puelle. הם טענו כי צורף של אין סוף התלכדויות לא יתן את התנועה הנצפית. לטענתם, אותן משוואות קלאסיות אכן מתארות את התנועה, אך עלייה הדרגתית בערכו של המרכיב הלא ליניארי היא שגורמת לשבירה של הזרימה הרציפה הקווית. תדירויות נוספות מופיעות בהדרגה לפי התרשים שתואר קודם ובמהירות רבה נוצר מצב של אנדרלמוסיה. אין צורך בהתלכדות מקרית של אינסוף תדירויות. אפשר לצאת מהתנועה הסדורה ולהפעיל בה את תופעת שבירת (או הכפלת) התדירות ובהדרגה להגיע לזרימה המערבולתית.

כך אנו זונחים את הדיכוטומיה הקלאסית בין סדור לחלוטין והניתן לניבוי, לבין מצבי רעש בלתי סדירים לחלוטין. לתופעה זו אפשר לקרוא **סדר פרקטלי**. הכוונה למצב שבו מערבולות הדומות לעצמן מופיעות בכל סדר גודל שבו נתבונן במערכת. מעניינת במיוחד העובדה שהמעברים שנצפו מקודם במערכת המכנית ובפתרונות המשוואה המתמטית מתקיימים במערכת הטבעית של זרימת נוזל. מרקס! אי סדר! קבלנו את מרקס אי הסדר, מרקס האנדרלמוסיה!

7. ניסוי שאפשר לעשות בכיתה: המחשה בעזרת קפיצים

לסיכום נציע שוב ניסוי שניתן לבצעו כמעט בכל כיתה, וגם הוא ממחיש את המעבר מסדר לכאוס.

הבעיה אותה נציג היא הבעיה של האפשרות לבנא. נזכור, כי התחלנו את המאמר בשאלה האם אפשר לדעת את העתיד. נצא ממערכת ניסויים שתוצאתם ניתנת לניבוי מדויק ונגיע לניסוי שבו שוב איננו יכולים לבנא את התוצאות וחזרה על הניסוי תוביל למערך שונה לגמרי מזה שהופיע בניסוי הקודם. במילים אחרות, נדגים מצב שבו קימת **תלות רגישה מאוד בתנאי ההתחלה**. הניסויים עצמם פשוטים ביותר, הציוד גם הוא פשוט ביותר.

ניסוי 1: נפילת הכדור

כדור מתגלגל על מדרון עד שפת שולחן ונופל לרצפה. אפשר לחשב בדיוק את מקום נפילת הכדור. מנסים שנית, התוצאה אינה משתנה.

ניסוי 2: תנודות הקפיץ

גוף כבד נופל דרך מישור משופע על קצה של קפיץ, הקפיץ מתנדנד. התנודות נרשמות אוטומטית על מסך של מחשב (אפשר אוסצילוסקופ). התוצאה: תנועה מרוסנת, כמעט הרמונית קלאסית, תדירות קבועה, משרעת מרוסנת (במשך זמן די ארוך).

ניסוי 3: שני גופים הקשורים בקפיץ

נתונים שני גופים הקשורים זה לזה בעזרת קפיץ על ספסל אוויר. נמשוך אחד מהם ונרפה. כמו קודם, נקבל מערכת של תנודות הרמוניות מרוסנות. אנחנו יכולים לבנא כיצד תתנהג המערכת והניבוי שלנו כמעט מלא.

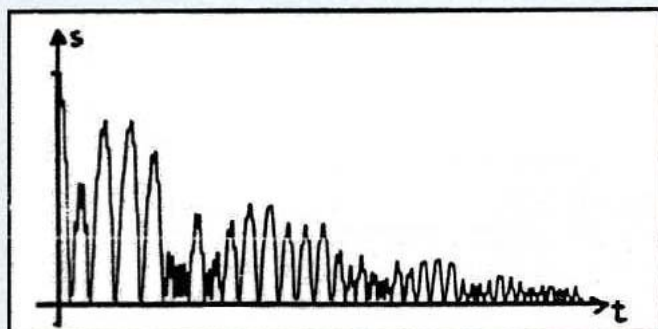
המסות, מקדמי שני הקפיצים ונפעיל את המערכת. נקבל סדרת תנודות על מסך המחשב.

נחזור שנית – קבלנו אותו הדבר. נבצע שינוי קטן בתנאי ההתחלה. התקבלה סדרת תנודות לגמרי שונה מהקודמת. המחשבו עד כמה רגישה המערכת לתנאי ההתחלה.

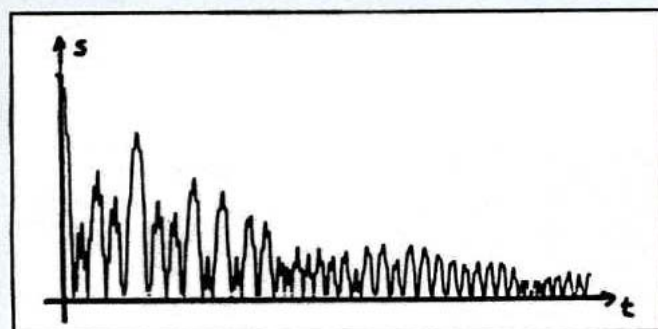
אפשר לנסות להפעיל שלושה גופים בעלי מסות שונות המחוברים על ידי שני קפיצים. גם כאן מערכת בעלת רגישות גבוהה לתנאי ההתחלה.

במאמר זה למדנו באמצעות דוגמאות פיסיקליות עובדה מפתיעה, המונחת ביסודה של תורת הכאוס. ישנן מערכות התלויות באופן רגיש בפרמטרים, תלויות באופן רגיש בתנאי ההתחלה, את התנהגותן ארוכת הטווח לא נוכל לנבא ובכל זאת מתקיים בהן מין סדר נסתר.

דוגמאות לכך אפשר להביא מהמכניקה של המוצקים מתנועת הנוזלים מתורת החום ועוד... מה שמפליא הוא הדמיון שבין ההתנהגות של מערכות שונות.

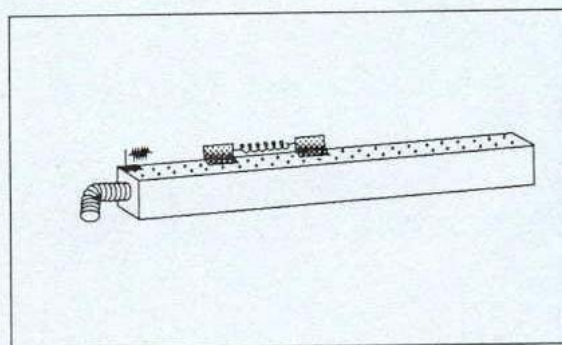
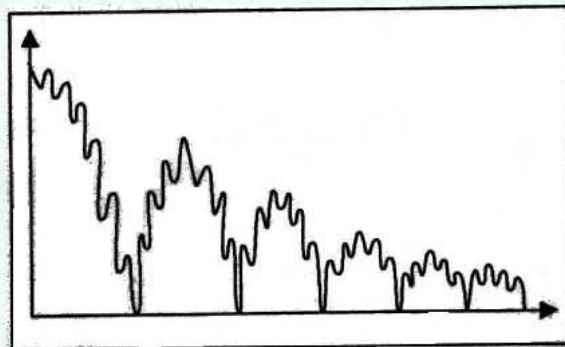


איור 16



איור 17

עד כאן התנהגות פשוטה וניתנת לגיבוי אך פתאום... מה יקרה בניסוי 4?



איור 15
שילוב של שני גופים מתנודדים והתנגשות בקפיץ. הנחה: שינוי קטן בתנועה, כלומר מודולציה. למעשה מתקבלת התנהגות שונה לגמרי.

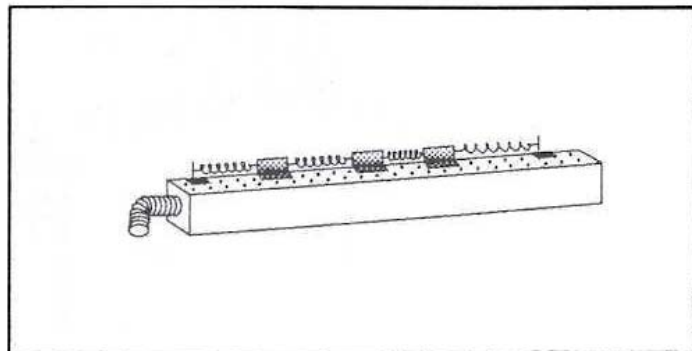
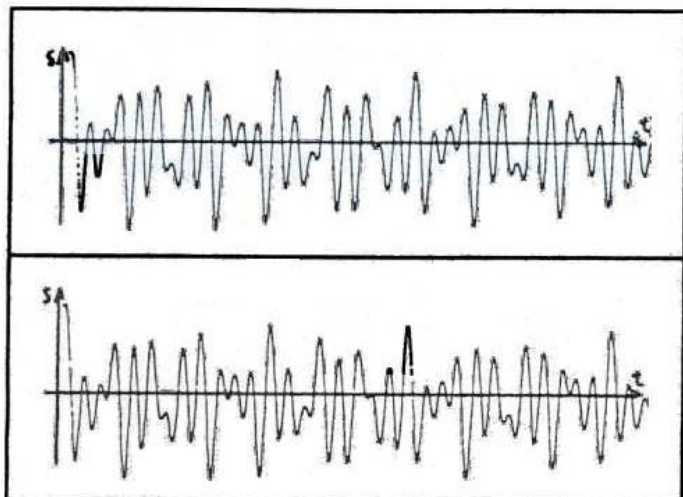
ניסוי 4: תנודות מורכבות

הפעם נתונים שני גופים המחוברים בקפיץ. הגופים מופלים בעזרת מישור משופע אל הקפיץ שהופעל בניסוי הקודם. אפשר לשער שנקבל תנודה שעליה הפרעה קטנה: התנועה תהיה מורכבת מתנודה בעלת תדירות מסוימת שעליה מורכבת תנודה בעלת תדירות גבוהה יותר ובעלת משרעת הרבה יותר קטנה.

למעשה מתקבלת מערכת תנודות שהמשרעת שלהן משתנה בצורה לא סדורה. מופיעות תנודות בעלות משרעות שונות בסדרות בלתי קבועות (3, 5... וכו'...). חוזרים על הניסוי. מתקבלת סדרה לגמרי שונה, המורכבת מאותם אלמנטים. מדוע אי אפשר לנבא את תוצאות הניסוי?

מפעילים שנית את המערכת: קיימת תלות רגישה בתנאי ההתחלה ובגללה קשה לנבא את תוצאות הניסוי. הגורם הפיזיקלי הוא התלות הרגישה בפאזה שבה נפגשים שני הקפיצים המתנודדים. שוני קטן בה גורם להופעת סדרה שונה לגמרי של תנודות.

אפשר להדגים זאת בעזרת ניסוי מחשב. נכניס את תנאי ההתחלה למחשב: הזווית של הספסל, מרחק האוסצילטור מהקפי שני



איור 18

שלושה גופים וארבעה קפיצים. מערכת מורכבת שאת התנהגותה אי אפשר לנבא.