

הוראת מתמטיקה – מחשבות ותופעות

מיומנו של מורה-חוקר

מאת שלמה וינר, האוניברסיטה העברית

0. מעין הקדמה

רשימה זו אמורה להיות ראשונה בסדרת רשימות שתימשך כל זמן שהקוראים ימצאו בה ענין, שעורכות עליה ימצאו אותה מתאימה ושלמחברה יהיה חומר לכתובה היא אמורה לתרום משהו לשיפור ההבנה של התנהגות התלמידים והמורים בשיעורי המתמטיקה שיעורים אלה הם, למרבית הצער מקור לא אכזב של תסכול להרבה תלמידים ומורים היה רצוי להקטין תסכול זה, הן אצל התלמידים והן אצל המורים עם כל הדאגה לתלמידים, רובם המכריע יתגבר על התסכול עם סיום לימודי המתמטיקה ורק חלק קטן לא יתאושש מהטראומה עד סוף ימי חייו ענין אחר הוא תסכולם של המורים שהוראת המתמטיקה היא מקצועם כדי לבטל את תסכולם של אלה, יתכן שדרוש שינוי בכל המערכת רשימה זו איננה המסגרת לדון בכך אבל מה שיכול להקטין תסכול (לא רק בהוראה, גם במגעים אנושיים אחרים) הוא הבנת הזולת והבנת האני ובפרט, ההבנה שהזולת אינו כולו אשם כמו שחשבת ואתה אינך כולך זכאי כמו שהיית בטוח מביאה לקבלה פחות מרירה ויותר מפוייטת של המציאות

1. מבוא

למה שקורה בשיעורי המתמטיקה יש הרבה היבטים החיבת הארגוני, היבט המשמעת, היבט ההתעניינות, היבט התלמיד המתקשה, היבט התוכן, היבט התרגול וכדומה במהלך השיעור עסוק המורה בכל ההיבטים האלה במידה זו או אחרת ברור כי הוא אינו יכול להתייחס בתשומת לב מלאה לכל אחד מההיבטים הרבים לא פלא שחלק מהיבטים אלה מוזנח במהלך שיעור זה או אחר היבט אחד, שבמובן מסויים צריך להחשב כהיבט מרכזי, מוזנח במיוחד אני מתכוון להיבט ההדברות¹ כמתבונן מהצד בשיעורים של אחרים וגם במהלך שיעורי שלי אני מגלה שאם יש דרשיה בין המורה לתלמיד הרי זה במקרים רבים דרשיה של חרשים הביטוי "דרשיה של חרשים" הוא מטבע לשון שחוקה וכמו הרבה מטבעות לשון שחוקות אין מתעכבים כדי לחשוב על משמעותו בכל זאת, אם מקדישים לביטוי מחשבה שניה עולות

1) אם רשימה זו היתה נכתבת באנגלית הייתי משתמש במילה "communication" תרגומה של זו לעברית הוא "יתקשורת" מכיון שלמלה "יתקשורת" יש משמעויות מסויימות הזרות לכוונתי ברשימה זו אני מעדיף להשתמש ב"הדברות"

תמיהות מסויימות איך בכלל מצליח דרשיה של חרשים להתנהלי (אני מניח שהביטוי מגזים בענין החרשות והוא מדבר בעצם על כבדי שמיעה, שכן, חרשים גמורים אינם יכולים לשוחח זה עם זה בעזרת מיתרי קולם) החסבר לעובדה שהשיחה אכן מתקיימת הוא בזה שכל אחד מהמשוחחים ממציא לא רק את דבריו שלו אלא גם את דברי איש שיחו דרשיה של חרשים הוא למעשה שתי שיחות מקבילות המתנהלות בדמיונם של המשוחחים אם לא היתה לשיחה מטרה מעשית כלשהי מלבד קיומה היה ניתן אפילו להאמר שאין בכך כל נזק בשיעור המתמטיקה, לעומת זאת, תפקיד דרשיה, אם אכן הוא מתקיים, לקדם את התלמיד לקראת ידיעת הנושא הנלמד ברור כי דרשיה של חרשים במהלכו של שיעור אין בו תרומה ממשית להשגת המטרה הנכספת כדי להמנע מדרשיה חרשים צריך להבין לאשורם את דברי הזולת "להבין לאשורם" פירושו להבין את צורת החשיבה של הזולת ואת הרעיונות המנחים אותו המסגרת "המלחיצה" של שיעורים רגילים אינה מאפשרת למורה לתהות על בעיות החשיבה של תלמידיו כדי ללמוד משהו על תהליכי החשיבה של תלמידיו יכול המורה להסתייע במחקרים לא מעטים שנעשו על למידת מתמטיקה מחקרים אלה מתארים ומאפיינים תפיסות שונות של מושגים מתמטיים הקיימות אצל התלמידים וכן דרכי חשיבה ודרכי פיתרון בעיות מבלי לגרוע מחשיבותם של מחקרים אלה חסרונם הוא בכך שהמתודולוגיה שלהם היא מתודולוגית in vitro

צרוף המילים "in vitro" מתייחס למחקר ביולוגי ופירושו מחקר בתנאי מעבדה, "בתוך זכוכית" מחקר זה הוא מדוייק למדי ובדרך כלל אפשר לשלוט במשתנים שלו ולבודד אותם מאידך, מעצם טיבו אין מחקר ה-vitro יכול להתבצע בתנאים של חיים רגילים מחקר החיים בתנאים הרגילים שלהם הוא מחקר ה-vivo (בתוך הגוף החי) במחקר ה-vitro מוותר המדען למען הדיוק המדעי על חלק ממטרתו העיקרית – להגיע להבנה וידיעה של החיים עצמם ישנם חוקרים שאינם מוכנים לוותר על מטרה זו ומבצעים, למרות חוסר הניקיון המדעי, מחקר in vivo הם מסתכנים בכך שממצאיהם לא יהיו מדוייקים (ואולי אפילו שגויים) אבל מרגישים שהסיכון כדאי ובסופו של דבר יקרב אותם מחקר ה-vivo מן אל האמת המדעית במה הדברים אמורים כשמדובר במחקר על למידת מתמטיקה ברוב הדוגמאות

עצמו לפיכך, בנוסף לתיאור תופעות, אנסה גם להציע עבורן שמות אני קורא לסדרת הרשימות בשם "תופעות ומחשבות" כדי לציין שאין תופעה מבלי שקודמת לה מחשבה הקובעת שהיא תופעה ביודעי כי יש יסוד סובייקטיבי לקביעות כאלה אני מוסיף לשם הסדרה את כותרת המשנה "מיומנו של מורה" אינני סבור שישוד סובייקטיבי במחקר הוא דבר שלילי אינני רוצה גם להכנס לפולמוס האם מחקר שיש בו יסוד סובייקטיבי ראוי לתואר "מדעי" אומר רק כי לפעמים נתן ללמוד הרבה דוקא ממחקרים שאינם "מדעיים" בעוד שמחקרים מדעיים מסויימים אינם מחכימים אותנו כהוא זה

2. האוכלוסיה

כאמור לעיל, רוב הדוגמאות שאציג כאן לקוחות מתוך מגעים עם אוכלוסיות תלמידים בפקולטה למדעי הטבע באוניברסיטה העברית תלמידים אלה אינם לומדים מתמטיקה כחוג ראשי אבל הם חייבים לשמוע קורס אחד בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי (להלן חדו"א) ולפעמים גם קורס באלגברה ליניארית (סילבוס מינימלי) הקבוצה המיוחדת אליה אני מתייחס ברשימה זו כוללת תלמידים שלמדו מתמטיקה בהיקף של 4, 5 יחידות בבית הספר התיכון ציוניהם בתעודת הבגרות היו פחות מ-8 בהיקף של 4 יחידות ופחות מ-7 בהיקף של 5 יחידות כמו כן יש בקבוצה זו תלמידים בודדים שלמדו מתמטיקה בהיקף של 3 יחידות קבוצה זו מתוייבת ללמוד קורס של סימסטר אחד הנקרא חדו"א בסיסי קורס זה אמור לרעץ את זכרונם בחדו"א של בית הספר התיכון וליצור אצלם הבנה של המושגים המרכזיים של המקצוע בסופו של הקורס הם אמורים להיות מוכנים ללמוד את הקורס הרגיל של חדו"א הניתן בפקולטה ליתר התלמידים אפשר לטעון, בהערכה גסה, כי תלמידים אלה שייכים לאחוזון התשעים של בוגרי בתי הספר התיכון ובתי הספר המקצועיים כלומר, תשעים אחוז מכלל מסיימי בית הספר התיכון או המקצועי בארץ הם ברמה שווה או נמוכה מרמתם של תלמידים אלה לפיכך, כל מה שייאמר לגביהם עשוי להיות נכון, בבחינת קל וחומר, לגבי תשעים אחוז של תלמידי בית הספר התיכון או המקצועי בארץ

3. דו-שיח של חרשים – תמונות מעורפלות, ניסוחים מעורפלים, גיבובי מילים והתשובה הנכונה

כבר הערתי באופן כללי משהו על דו-שיח של חרשים הדברים המובאים בסעיף זה וכן בסעיפים אחר כך נועדו להדגים את התופעה כמה מעמית, ביודעם את התעניינותי בקשיי תלמידים, נוהגים לספר ולהראות לי "דברים מעניינים" מנסיונם אחד מהם הביא לי כמאתיים מחברות מבחן סיום קורס חדו"א לתלמידי כלכלה כדי שאעיין בתשובות התלמידים לשאלה מדוע שני קוי גובה של אותה פונקציה בשני משתנים אינם יכולים להחתך? באחת המחברות כתב התלמיד

של מחקר זה מתקבלים הנתונים באמצאות שאלונים או ראיון אישי התלמיד הנבדק מנותק למעשה מהסביבה הטבעית שבה הוא לומד מתמטיקה סביבת הכיתה, שולחן הכתיבה הביתי שעליו הוא מכין שיעורים וכדומה תהליכי החשיבה המתרחשים בשעה שהתלמיד עונה על שאלון המוצג בפניו שלא בהקשר השיעור או בשעת ראיון אינם בהכרח התהליכים המתרחשים אצל התלמיד בזמן השיעור הכיתתי או בזמן הכנת שיעורי הבית אחרי תהליכי חשיבה בכיתה ניתן להתחקות (אם בכלל) רק על-ידי תצפיות בכיתה אם רוצים באמת לחשוף אותם יש לפעמים הכרח לשאול שאלות מיוחדות צופה העורך תצפיות בכיתה אינו יכול בדרך כלל להתערב במהלך השיעור ולשאול שאלות שיחשפו את תפיסות התלמיד לכאורה יכול היה המורה לעשות זאת אילו היה לוקח על עצמו בנוסף לתפקיד ההוראה גם את תפקיד עורך התצפיות והחוקר צרוף זה של מורה וחוקר באדם אחד נראה אידיאלי למחקר vivo מן של תהליכי למידה בכיתה אבל למעשה יש בצירוף הזה סתירה פנימית ענינו של המורה הוא לקדם את השיעור ולזרז את תהליך רכישת המושגים ודרכי החשיבה המתמטיים אצל התלמיד עניינו של החוקר הוא להתעכב על קשייו של התלמיד ולברר את תפיסותיו המוטעות אלה יכולים להיות לא פעם עניינים מנוגדים אף על פי כן, בהעדר אלטרנטיבות טובות יותר אשתמש במתודולוגיה של מורה וחוקר באדם אחד – מתודולוגית המורה החוקר החומר שאציג יהיה לקוח בעיקר מתוך ניסיון ההוראה שלי עם תלמידי מדעי הטבע שאינם לומדים מתמטיקה כחוג ראשי אבל חייבים ללמוד קורס מתמטי אחד או שניים הוא יכול אפיזודות שונות שהתרחשו בכיתה או במשרדי, בשעת הקבלה וכן דיון בשאלונים שהועברו בכיתה או בתרגילי בית השאלונים שבהם אדון שולבו במהלך התוכני של השיעור והתייחסו לתהליכי החשיבה שהיו אמורים להתרחש אצל התלמידים בעקבות הלמידה לפיכך, למרות היסוד המלאכותי שיש בהעברת שאלון אני רואה גם בשאלונים אלה אמצעי מחקר vivo מן בהסתייגות מסויימת

אני משוכנע שכל מורה למתמטיקה מכיר לפחות חלק מהתופעות המתוארות להלן ברצוני להתעכב מעט על ההבדל בין "אירועי" ל"תופעה" אירוע בודד איננו בהכרח תופעה השם "תופעה" ניתן לאירועים מסויימים כאשר מגיעים למסקנה שיש בהם משהו אופייני החוזר על עצמו כדי לגלות תופעות לא די בהסתכלות דרושים גם ניתוח והבחנה גם כאשר מבחינים בכך שאירועים מסויימים דומים זה לזה וחוזרים על עצמם עדיין קיימת האפשרות שהמסתכל לא יתייחס אליהם כאל תופעה משום שחסרה לו טרמינולוגיה מתאימה תארו לעצמכם שאדם החוזר וחש רגשות סותרים כלפי משהו אינו מכיר את המונח "אמביוולנטי" או את הצירוף "רגשות סותרים" ייתכן שאדם כזה יתקשה בשל כך לתאר לעצמו ולאחרים את תחושותיו העדר טרמינולוגיה מתאימה עלול איפוא לגרום לאדם קשיים גם בהבנת

בכל אופן אין לערער על העובדה שיש איזה שהוא נוף השרוי בערפל אליו מתייחס התיאור שלי

ב התלמיד רואה תמונה ברורה (נכונה או שגויה) אבל מתקשה לתאר אותה במילים הנסיון לתאר אותה על אף הקושי מביא לידי ניסוחים מעורפלים מבחינת הקורא אין אולי הבדל בין תמונה מעורפלת לניסוח מעורפל ההבדל הוא אצל התלמיד כמובן שישנם המקרים שלתלמיד יש תמונה מעורפלת והוא גם מתקשה לתאר אותה לנו כקוראים יהיה קשה להבחין בין כל המצבים האלה ועובדה זו תהווה מכשול רציני להדברות בין המורה לתלמיד

ג בתודעת התלמיד אין כל תמונה המתקשרת לשאלתו של המורה אבל התלמיד יודע שמילים מסוימות שייכות להקשר השאלה הוא יודע שכשמדברים על נושא מסויים ישן כמה מילות מפתח המופיעות בשיחה כשמדברים, למשל, על אמנות המאה העשרים יופיעו המילים "מודרניזם" ו"פוסט מודרניזם" בציודן של עוד כמה מילים אפשר לשלב מילים אלה במשפטים ובחצאי משפטים וליצור רושם שכאילו ידוע לדובר במה מדובר תלמיד המתמטיקה משתמש בטכניקה זו מפעם לפעם כדי לקבל נקודות זכות במבחן או בשיעור למעשה הוא משרבב מילים שאינו יודע את פירושן ברוב המקרים אין מגיע גיבוב המילים לכלל תשובה מרשימה הוא עשוי להראות או להישמע כניסוח מעורפל

מבחינתנו קשה לפעמים להבחין בין גיבוב מילים לבין מצבים אחרים שנוכרו קודם אולם בבוואנו להדבר עם התלמיד עלינו להיות מודעים לאפשרויות השונות תמונה מעורפלת, ניסוח מעורפל או גיבוב מילים הטחת התשובה הנכונה בעקבות ניסוח מהסוג של התשובה שראינו לא תשפר, קרוב לודאי, את מצב ידיעותיו של התלמיד במקרה הטוב ישן התלמיד את התשובה הנכונה ויכתוב אותה במבחן החוזר לשיעור רצונו של המורה הדברות אמיתית צריכה להתחיל בנסיון של המורה להבין את נקודת המוצא של התלמיד וכבר אמר זאת אוזובל במוטו לספרו לפני שנים רבות "אם היה עלי להעמיד את כל הפסיכולוגיה החינוכית על עקרון אחד הייתי אומר הגורם המשפיע יותר מכל דבר אחר על הלמידה הוא מה שהתלמיד כבר יודע ברר זאת ולמד אותו בהתאם" Ausubel, D., Educational Psychology, A Cognitive (View, Holt Rinehart Winston 1968)

4. כיצד פותרים

כותרת סעיף זה היא שמו של ספר קלסי בהוראת המתמטיקה מאת פויה G Polya, How to Solve it, Doubleday Anchor Books, 1957 הנמצא גם בתרגום עברי

"שני קוי גובה של אותה פונקציה לעולם לא יכולים להחתך זאת משום שיש להם קודקוד השומר על יחס ושיפוע ששומר על כך שהם לעולם לא ייפגשו (קצת קשה לי להסביר את זה במילים)"

מצאתי ענין בתשובת התלמיד אבל במיוחד ריתקה אותי הערת המורה שהיתה רשומה לידה בדיו אדום ההערה היתה "לפונקציה יש תמונה יחידה" אינני יודע מה היו מניעי המורה לכתוב ההערה הזאת אבל "דור-שיח" הקצר שהתנהל על דף המבחן הפך בעיני משל ובתור שכזה אני רוצה להציג אותו (אינני מבקר חס וחלילה את המורה ואיני דן אותו לכף חובה כל אחד מאיתנו עשוי להעיר הערה מעין זו בנסיבות דומות)

ובכן, כל מורה מכיר את הרגשת הזעם ההולך וגואה עם קריאת תשובות הדומות לזו בשעת בדיקת מבחנים ברגעים אלה הופך העט האדום שבידינו לחרב שלופה איתה היינו רוצים להסתער על התלמיד "העצל והטיפשי" אבל כמו בטקסי וודו חשאיים אנחנו מסתפקים בנעיזת החרב בחפץ כלשהו של אויבנו מתוך אמונה עמוקה שתתרחש גם פגיעה חמורה בבעליו אנחנו מניפים פעמיים את חרבנו ומשאירים שני תוכים עמוקים בצורת x על תשובת התלמיד את הנפת החרב אנחנו מלווים בקריאת תרון ונקם שמשלימה את מעשה הצדק שביצענו זה עתה בתלמיד ומחי קריאת נקם זו, האמורה לפגוע בתלמיד עוד יותר ממדקרות החרבי זוהי התשובה הנכונה

אינטראקציה זו היא חלק מדור-שיח החרשים שדיברתי עליו בסעיף קודם היא מתרחשת כולה בדמיונו, שהרי בן שיחנו אינו נוכח בה וקרוב לודאי גם לא יראה את מחברת המבחן שלו היא לא תשנה בכלום את ידיעותיו במתמטיקה בכל אופן, בדמיונו אנחנו משלימים את ההדברות עם התלמיד בתשובה הנכונה משום שזהו דגם ההדברות שלנו איתו מה באמת ניתן היה לומר לתלמיד שנתן את התשובה ההיא אילו היה זה במסגרת דור-שיח אמיתי התשובה אינה פשוטה וגם אינני מתכוון להציע כאן עצות מעשיות כזכור, קו גובה של פונקציה $z = f(x,y)$ הוא ההיטל על מישור xy בכיוון ציר ה- z של אוסף כל הנקודות (x,y) כך ש- $c = f(x,y)$ קבוע כלשהו כשאני מנסה להבין מה מתרחש בתודעתו של התלמיד נראה לי שאפשר להציע שלושה הסברים לפחות ניתוח זה הוא כללי ואינו מתייחס בהכרח לתשובה שצוטטה

א לתלמיד יש איזו שהיא תמונה מנטלית מעורפלת של המושג הנידון כשאני אומר "מעורפלת" אני מתכוון למשמעות היומיומית של המילה כשמסתכלים על נוף בערפל שיח יכול להראות כמו כלב, מכונית חונה דומה לבית ועץ מתנועע נראה כבן אדם כשאני מתאר במילים נוף בערפל התאור עשוי להישמע בלתי הגיוני (כמו תשובתו של התלמיד) הקשרים בין הפרטים השונים של התמונה אינם מתקבלים על הדעת

5. כשלים בהדברות

בהרבה הקשרים של השיעור ושל שיעורי הבית עולה השאלה למה התכוון המורה בקטע זה או אחר האם הסבירי האם הציג בעיה לפתרון? האם הוא מסתפק בכך שהתלמיד יבין את הנאמר וזה הכל או שהוא גם מתכוון לבדוק אם התלמיד אכן הבין? ואם הוא מתכוון לבדוק – באיזה אופן יעשה זאת? מכיון שרק לעיתים רחוקות הדברים הם חד-משמעיים יוצא שלעיתים קרובות עוסק התלמיד בניחוש כוונותיו של המורה עבור התלמיד בשלב זה להבין פירושו להבין את כללי המשחק החברתי להבין מה מצפים ממנו ולהתנהג בהתאם כדי לקבל את נקודות הזכות

לפעמים קורה שהמורה מתכוון לדבר אחד והתלמיד עונה דבר אחר ניתוח המקרה מראה שדברי המורה אכן יכולים להתפרש לכאן ולכאן למשל, במשך שלושה שבועות אני מדבר על מושג המספר הנגזר והקשר שלו לקצב ההשתנות של פונקציה אני רושם עשרות פעמים על הלוח את הביטוי

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ומסביר איך אפשר בעזרת הצבות או חישובי גבול למצוא קירוב למספר הנגזר או את המספר הנגזר עצמו אני מדגיש שיש לנו טכניקות (כללי גזירה) לחישוב המספר הנגזר שאפשר להשתמש בהן במקרים רבים אבל באופן בסיסי איננו תלויים בטכניקות אלה כי תמיד אנחנו יכולים לצאת מהביטוי הרשום ולהשתמש בו כמוסבר לעיל אני מדגים להם את הדבר לגבי הפונקציה $f(x) = 1/x$, כלומר אני מטפל בביטוי

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

עד שאני מגיע לתוצאה $-\frac{1}{x^2}$ חמש דקות לאחר מכן אני מבקש מהתלמידים לענות בכתב על השאלה

נתונות שתי פונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ בונים מהן פונקציה חדשה $F(x)$ בעזרת הכלל $F(x) = f(x)g(x)$ מה צריך לעשות כדי לחשב את המספר הנגזר של $F(x)$ בנקודה x ?

חשוב לומר כבר בשלב זה כי מחוץ להקשר השיעור שאותו תארתי יש בשאלה זו מידה לא מעטה של עמימות אבל בהקשרו של השיעור אפשר היה לצפות לכך שהתלמידים, שראו כמה פעמים את החישובים שאני מבצע לאחר שאני שואל "מה צריך לעשות?" יבינו את השאלה באופן חד-משמעי ויענו שיש לחשב את

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

בסעיף זה אתייחס לדימוי המתמטיקה אצל המורה ואצל התלמיד ולשאלה כיצד התבדל בין שני הדימויים עלול להשפיע על התנהגותם של המורה ושל התלמיד כשמדובר על הבדלים בדימוי המתמטיקה אין מדובר על הבדלים בתפיסות של מושג או מושגים מסויימים כאן מדובר על תפיסה כוללת של המתמטיקה מהי המתמטיקה? מה נדרש בשיעור המתמטיקה? מהן שאלות מתמטיות? מהן המשימות שמצפים ממני לבצע במהלך לימודי המתמטיקה וכדומה?

בקהילת העוסקים בחקר הוראת המתמטיקה מקובל כיום לחשוב שאצל רוב התלמידים נתפסת המתמטיקה כאוסף של נוסחאות שיש להציב בהן מספרים כדי לקבל פתרון לשאלות וזהו בעצם ליבה של הפעילות המתמטית לימוד המתמטיקה אמור להתמצות אם כך בחצות הנוסחאות ובתרגול של הצבת מספרים בנוסחאות אלה השאלה מהיכן באו הנוסחאות ומדוע הן נכונות אינה שייכת לענין מורה השואל אותה עלול להפך את החוזה הדידקטי הסמוי שבינו לבין תלמידיו (החוזה הדידקטי הוא הסכם לא כתוב בין המורה לתלמיד בנוגע למה שכל צד רשאי ויכול לצפות מהצד השני לפרטים נוספים אפשר להסתכל ב, Balacheff, N (1990), Towards a problématique for research in mathematics teaching Jour. for Research in Math Ed. 22 (4), 258-272.

גם אם תפיסת המורה את המתמטיקה שונה מזו של התלמיד המצוי אין ערובה לכך שיצליח להעביר לתלמיד את תפיסתו מסגרת השיעור כפי שהיא מוכתבת על-ידי מערכת החינוך עם ספרי הלימוד, בחינות הבגרות, בעיות המשמעת וכולי איננה מסגרת תומכת לפיתוח תפיסות רחבות של מקצוע המתמטיקה מה שבעיקר נדרש מהתלמיד זה לפתור שאלות כך שהשורה התחתונה של הפיתרון היא $x =$ אצל תלמידים מסויימים זה הופך להיות רפלקס מותנה בכל מקום שמופיע x הם מצפים שיידרש מהם לחשב משהו ולסיים את החישוב $x =$

דוגמא: לאחר שהסברתי באופן אינטואיטיבי מהי פונקציה עולה וגם נתתי מספר דוגמאות כתבתי על הלוח את ההגדרה האלגברית הידועה פונקציה f היא עולה בתחום מסויים אם לכל x_1, x_2 בתחום זה כך ש $x_1 < x_2$ גם $f(x_1) < f(x_2)$.

שבוע לאחר שלימדתי זאת באה למשרדי תלמידה, פותחת את מחברתה ומצביעה על ההגדרה הרשומה במחברת היא אומרת לי "כבר שבוע אני חושבת על זה ועדיין אני לא מבינה איך בדיוק אתה פותר את זה?"

המחשבה שבשיעור עוסקים רק בשאלות שיש לפתור אותן באופן שבו הוסבר לעיל, מעכבת בעד התלמידה להבין שלפעמים מדובר בעניינים שונים לגמרי מאלה של השאלות השכיחות, המקובלות השאלה כיצד פותרים חוסמת בפניה את הדרך להבנה של קטעים לא מעטים בשיעור שאין להם כל קשר לשאלה זו

(I) התשובה המצופה – 5 תלמידים

(II) $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ – 11 תלמידים

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \quad \text{(III)}$$

– 3 תלמידים

(IV) $f'(x)g'(x)$ – 4 תלמידים

כלומר, רק 8 תלמידים (קטיגוריות (I) ו-(III)) הבינו את כוונת המורה (אני מצרף את שלושת המשיבים בקטגוריה III לאלה שהבינו את כוונת המורה למרות שתשובתם שגויה הם הבינו כי בהקשר הפעילות שהיתה בכיתה כדי לחשב נגזרת צריך למצוא את ערך הפונקציה בנקודה $x+h$ לחסר ממנו את ערכה בנקודה x וכי הטעות שלהם הייתה בהצבה ולא בהגנת הכוונה של המורה) הקורא עשוי לטעות שגם בהקשר של השיעור אין לבוא בטענות אל התלמידים על כך שרק כשליש מהם הבין אותה כפי שציפה המורה ובכן, אינני בא בטענות אל התלמידים אני רק מצביע על תופעה שכיחה להערכתך של "נתק תקשורת" בין המורה לתלמידים

הנתק קורה למרות שהמורה עושה הכל כדי למנוע אותו המורה צריך להיות ער לכך שנתק כזה עלול להתרחש בכל רגע של השיעור מאידך, אין לו היכולת לבדוק בכל רגע אם אכן נתק כזה התרחש כדי שהמורה יוכל ללמד עליו להאמין שתלמידיו מבינים אותו אל נכון אמונה זו עלולה לתרום לא מעט לדושיח החרשים עליו דיברנו קודם

דוגמא נוספת: אני מסביר לתלמידים את מושג המספר הרציונלי כשבר עשרוני אינסופי לא מחזורי אני מראה להם איך לבנות שברים עשרוניים אינסופיים לא מחזוריים זה מורכב מכתובת שבר עשרוני אינסופי ואחר כך כתיבת הכלל לבנייתו על הלוח למשל 0 123456789101112

בצעד ה- k כותבים (בכתיב עשרוני) את המספר k

או 0 102030405060708090

בצעד ה- $2k-1$ כותבים את המספר $2k-1$

בצעד ה- $2k$ כותבים 0

לאחר מכן אני מביא לידעתם (מידע שנשכח אולי) כי \sqrt{k} הוא אירציונלי לכל k ראשוני, וגם יותר מכך, \sqrt{n} הוא אירציונלי לכל n טבעי כך שאין x טבעי המקיים $n = x^2$

בתרגיל בית אני נותן את השאלה הבאה

תן שני כללים שונים בעזרתם מתקבלים שברים עשרוניים אינסופיים שהם מספרים רציונליים להלן תשובות אופייניות של תלמידים

1א מספר אירציונלי זהו מספר שאפשר לכתוב אותו כשבר

עשרוני אינסופי לא מחזורי

ב אם יש מספר שאי אפשר לכתוב אותו כחלוקה של שני מספרים שלמים אז הוא מספר אירציונלי

2א \sqrt{x} כש- $x =$ מספר ראשוני הוא אירציונלי

ב \sqrt{n} , n טבעי ואין x טבעי כך ש- $x^2 = n$ הוא אירציונלי

3א בנית שבר על-ידי הצבת מספר בסדר עולה כך שבצעד

ה- k נציב את המספר k 0 12345

ב 0 2357

מספרים ראשוניים

4א בצעד ה- k נכתוב את החזקה השניה של k

0 14916

ב בצעד ה- k נפתור מספר k

(אגב, שימו לב ל"נפתור" בתשובה האחרונה זהו ביטוי לתפיסה הזכרנו קודם כי הפעילות המתמטית מתמצת בפתרון שאלות גם אם זו איננה התפיסה הרשמית של התלמיד אפשר לראות ב"נפתור" זה מעין "פליטת פה פרוידיאנית")

21 מתוך 24 התשובות שניתנו לשאלה זו היו מסוג תשובות 1, 2 דלעיל בדומה לדיון בדוגמא הקודמת ניתן לטעון גם כאן כי השאלה עמומה ותשובה מסוג "ק" כאשר k ראשוני, יכולה בהחלט להחשב לתשובה נכונה, שכן, השבר העשרוני המתאים ל- \sqrt{k} הוא שבר עשרוני אינסופי המתאים למספר אירציונלי פירוש זה יכול אולי להתקבל במקרה של תשובה 2 אבל ספק רב אם ניתן לקבלו גם במקרה של תשובה 1 ושוב, בהקשר השיעור שקדם לתרגיל הבית אפשר היה לצפות שתהיה התייחסות של התלמיד למה שקרה בשיעור הפירוש שנראה לי מתאים יותר לתופעה זאת הוא אחר התלמיד מבין במילה "כלל" משהו שונה לגמרי ממה שהמורה הבין במילה זו בהקשר של השיעור "כללי" פירושו חוק, טענה וכדומה התלמיד התעלם ממה שקרה בשיעור שקדם למתן תרגילי הבית כשהוא קרא את השאלה (בחפזון ולא בזחירות ובקפדנות) הוא הגיב באופן ספונטאני למילה "כללי" כפי שהוא מכיר אותה מלימודיו הקודמים התגובה הזאת דחפה אותו לחפש במחברתו תשובות המתאימות למונח זה של "המלה כללי" וכאן בא גם לידי ביטוי (תשובה 1) חוסר ההבחנה בין כלל והגדרה בגלל ההתנהגות הספונטנית-אימפולסיבית הזאת התעלם התלמיד מהניסוח המדויק של השאלה ומחלק השיעור הרלוואנטי לה התעלמות זו גרמה לכך שתשובתו "נחתה" במקום רחוק מאוד מזה שהתכוון אליו המורה

6. סיכום

האפיוזודות שתוארו לעיל ממחישות את העדר ההדברות האמיתית בין המורה לתלמיד בשיעורי המתמטיקה ובמהלך ההכנה של שיעורי הבית התלמיד מביא לשיעור את תפיסותיו המוקדמות

מה התשובה הנכונה התלמיד יאמץ אותה בלי להתעמק בענין יתר על המידה כמו שנאמר קודם, עבור התלמיד להבין פירושו להבין את כללי המשחק החברתי עבור המורה, כך אני מקוה, להבין פירושו להבין את העולם (במקרה זה העולם המתמטי) כדי להעלות את התלמיד מתפיסת ההבנה שלו לתפיסת ההבנה של המורה יש צורך בהידברות מסוג שונה ממה שמצוי בשיעור הטיפוסי במתמטיקה

ומתוכן הוא מנסה לענות על שאלות המורה מטרת התלמיד היא לתת תשובה שתחשב לכונה בעיני המורה נסיונותיו "להבין" את כוונת המורה אינם מכוונים כל-כך אל החומר המתמטי אלא מתרכזים בצד החיצוני של חומר זה בעייתו של התלמיד היא איזו תשובה עליו לתת כשהוא נשאל שאלה מסוג מסויים הדרך לתשובה זו אינה עוברת בהכרח דרך חומר הלימוד היא יכולה להתקבל בשיטת הניסוי והטעיה אם תשובה מסויימת (שהיתה "שליפה מן המותן") לא התקבלה אז לאחר מעשה ייאמר לתלמיד

