

הנושא: **הוראת מתמטיקה - מחשבות ותופעות** **מיומנו של מורה חוקר - המבחן**

הוכן ע"י: שלמה וינר, האוניברסיטה העברית

תקציר: במאמר דן המחבר בתפקיד של המבחן במערכת החינוך. הוא ממליץ על הכנסת שאלות למבחן שבהם נדרשת חשיבה מושגית ואנליטית אמיתית. מובאת דוגמא לשאלה הדורשת חשיבה מושגית, ונעשה סיווג של תשובות התלמידים לקטגוריות שונות.

מילות מפתח: הוראת המתמטיקה, חשיבה מתמטית, שגיאות, שיטות הערכה, בחינה, חשיבה מושגית, חשיבה אנליטית, אנליזה - חשבון דיפרנציאלי, נגזרת, אנליזה - חשבון אינטגרלי, אינטגרל, משוואה דיפרנציאלית, יישומי מתמטיקה, מתמטיקה בחיי היום-יום.

החומר פורסם במסגרת: עלייה 13, אלול תשנ"ג, ספטמבר 1993, עמודים 21-28.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 9 עמודים.

הוראת מתמטיקה - מחשבות ותופעות

מיומנו של מורה חוקר -

המבחן

ברשימתי הקודמת (על"ה 12, 27-23, מרץ 93) דברתי על התנהגות מושגית לכאורה ואנליטית לכאורה. אלו התנהגויות שלמראית עין הן מבוססות על חשיבה מושגית ועל ניתוח של דברים, אבל למעשה אין בהן לא זו ולא זה וכל מטרתן ליצור רושם כדי להעניק לבעליהן נקודות זכות. נקודות זכות אינן חייבות להיות נקודות במבחן. מדובר על נקודות זכות במובן המושאל של המילה. אדם מצפה לנקודות זכות במצבים רבים שאינם מבחן רשמי של קורס. זה יכול להיות בדיון כיתתי, בשיחת רעים, בנאום, במאמר וכדומה. כמובן, שבייחוד הוא מצפה להן במבחן, מסגרת שמעצם מהותה מהווה כלי לקביעת מספר נקודות הזכות המגיעות לפלוגי אלמוני. ההתנהגות המושגית לכאורה וההתנהגות האנליטית לכאורה הן התנהגויות שמערכת חינוך אמיתית אינה צריכה לעודד. לא שהיא צריכה לדכא התנהגויות אלו מכל וכל. גם אדם שחשיבה היא אומנותו מפגין במצבים רבים התנהגויות כאלה. מדובר במצבים שגרתיים או כמעט שגרתיים בהם אדם פותר בעיה הדומה לבעיות רבות שפתר בעבר. במצבים כאלה תהיה נטייתו לפתור את הבעיה מבלי להעמיק במושגים ובתכנים המעורבים בבעיה. הוא יפעיל באופן כמעט אוטומטי תהליך מוכר המשמש לפתרון בעיות מהסוג אליו שייכת, על-סמך התרשמות שטחית, הבעיה הנתונה. ברוב המקרים, ההתרשמות השטחית היא גם ההתרשמות הנכונה ולכן ההתנהגות המושגית לכאורה וההתנהגות האנליטית לכאורה אינן מזיקות. להפך, הן אפילו יעילות וחסכוניות. אבל החינוך האמיתי אמור לפתח אצל התלמיד יכולת חשיבה אמיתית. חשיבה אמיתית חייבת להתיחס למשמעותם של דברים ולתכנם. המבחן ככלי הערכה ליכולת החשיבה (ואינני מתעלם מהצורך בשינון וברכישת מיומנויות) אמור לכלול יסודות שיבדקו יכולת חשיבה מושגית ויכולת חשיבה אנליטית. חשיבה מושגית ואנליטית היא חשיבה ברמה גבוהה ומסובכת יותר מהחשיבה המושגית לכאורה והאנליטית לכאורה. הבדיקה עלולה לגלות שתלמידים רבים לא הגיעו לרמת החשיבה המושגית והאנליטית האמיתית. גילוי זה הוא בלתי נעים לתלמידים ולמערכת החינוך כאחד. לא פלא ששניהם יעשו מאמצים להמנע ממצבים שיביאו לחשיפת חולשתם. בכך בוגדת מערכת החינוך, במודע ושלא במודע, באחת ממטרותיה. אינני מדבר רק על מערכת בחינות הבגרות במתמטיקה הדולה את מרבית שאלותיה מתוך מאגר שאלות טיפוסיות שניתן לראותו כמאגר קנוני במובן הכנסייתי של המילה. אני מתכוון גם לחלק גדול מהמבחנים הכיתתיים שציונם משמש אותנו לקביעת ציון התלמיד בבית הספר או באוניברסיטה.

המורה, כמי שאמור להגן על האינטרסים של התלמיד, עושה כמיטב יכולתו להכין את התלמיד למבחן המכריע. מבחינה זו, כל עיסוק בשאלות שאינן משתייכות למאגר הקנוני הוא בניגוד לאינטרס של התלמיד. לא רבים המורים המוכנים להופיע בכיתה כמי שפועלים בניגוד לאינטרס של התלמיד. אינטרס התלמיד הוא במובן מסויים גם אינטרס בית הספר החותר להגיע למקום טוב למעלה מהאמצע בדירוג בתי הספר לפי הצלחתם בבחינות הבגרות. האם ניתן להחלץ ממלכוד זה?

1. דיוקנו של המחנך כסוכן כפול

הכותרת אינה אלא פרפזה על שם ספרו הידוע של ג'ימס ג'ויס, "דיוקנו של האמן כאיש צעיר". המונח "סוכן כפול" עלול לעורר אסוציאציה שלילית. סוכן אמור להיות נאמן לגורם שאותו הוא משרת. נאמנות כפולה היא ממבט ראשון רעיון עם סתירה פנימית עמוקה. סוכן כפול נחשב אם כך לאדם חסר נאמנות כלשהי שעושה את כל מעשיו בעבור בצע כסף. אלא שהחיים יותר מורכבים מהרבה תפיסות פשטניות ונדמה לי שניתן גם לחשוב על נאמנות כפולה לשני גורמים שיש ביניהם ניגוד אינטרסים. פלוגי אלמוני עשוי להכיר בחשיבותם של שני הגורמים ולרצות לפעול למען שניהם ובמיוחד ירצה הוא לפעול למען האיזון ביניהם. המורה אמור לדאוג לאינטרסים של מערכת החינוך מחד ולאינטרסים של התלמיד מאידך. לא קשה לקבוע מהו האינטרס של התלמיד. מעבר למליצות ולרטוריקה ניתן לומר שהאינטרס של מרבית התלמידים הוא להשיג את

הציון הגבוה ביותר שהם יכולים. (אינני מתעלם מהענין וההנאה שמפיקים תלמידים מסויימים מהלימודים, אבל לא ניתן להתעלם מכך ששביבת מורים ממושכת תגרום להם הנאה גדולה יותר. כמו כן, נדיר הוא שציון נמוך לא יעיב על ההנאה האינטלקטואלית שהיתה לתלמיד בקורס מסויים, אם היתה לו הנאה כזאת).

קשה יותר לומר מהו האינטרס של מערכת החינוך. כדי לא להקשות על עצמי את הדיון אצטמצם לאינטרס של מערכת החינוך המתמטי. כאן יש כמה מסמכים רשמיים של משרד החינוך. לא אצטט אותם. אם אקלף מהם את עטיפת המליצות נראה לי שאחת המטרות העיקריות של הוראת המתמטיקה היא לפתח אצל התלמיד יכולת חשיבה מתמטית. גם היגד זה עלול להחשב כסתמי, כללי ואפילו מליצי. יש לפרוט אותו לדוגמאות ספציפיות ולהקשרים ברורים. אעשה זאת בהמשך.

בשלב זה רק אשאל: אם זהו האינטרס של מערכת החינוך כיצד קורה שבכל כך הרבה מקרים פועלת המערכת בניגוד לאינטרס שלה?

2. דיוקנה של מערכת החינוך כסוכנת כפולה

תפקידה של מערכת החינוך הוא לחנך. לא זה המקום לפרט בנקודה זו וגם אם היה זה המקום קיימות תשובות רבות לשאלה מה פרוש לחנך. על אחת מהן הצבעתי בקיצור בסעיף הקודם. מה שבכל זאת חשוב לענייננו הוא העובדה שבטובתה או שלא בטובתה קבלה על עצמה מערכת החינוך תפקידים נוספים פרט לחינוך (והחינוך למרבית הצער נדחק לפעמים לשוליים). אחד מהם, שמדובר בו רבות, הוא תפקיד השמרטף. תפקיד אחר שעליו ארחיב קצת את הדיבור הוא תפקיד הסינון. כל חברה, ולו גם הפרימיטיבית ביותר מבוססת על דיפרנציאציה. לא כל שכן, חברה מודרנית טכנולוגית.

השאלה היא כמובן מי יקבע את הדיפרנציאציה ומה יהיו הקריטריונים שלה. אחד הקריטריונים העיקריים לדיפרנציאציה בחברה המודרנית הוא קריטריון ההצלחה בלימודים. באימוץ קריטריון זה יש הגיון מסויים למרות שהוא עלול לגרום לעיוותים לא מעטים. באופן טבעי הוטל על המערכת האחראית ללימודים לקבוע גם מי הצליח בלימודים, ובכך גם לקבוע איזה מסלולי המשך נפתחים או נסגרים בפניו של פלוני אלמוני שמידת הצלחתו כך וכך. עד כאן הכל טוב ויפה ולא נראה שיש ניגוד בין שני התפקידים שהוטלו על מערכת החינוך - לחנך ולמייין. הבעיה מתחילה בכלי המיון. כלי המיון העיקרי הוא המבחן. זה מתחיל במבחן הכיתתי, נמשך במבחן החיצוני (מבחן הברגרות ומבחנים אחרים) ונגמר במבחנים הפסיכומטריים. ההנחה הפשטנית יכולה להיות שכדי להצליח במבחן על התלמיד ללמוד חומר, להבין אותו, להפנים אותו, להיות מסוגל לחשוב ולפתור בעיות הקשורות לחומר זה וכדומה. לכאורה, מה שנדרש מתלמיד כדי שיצליח במבחן הוא מה שמערכת החינוך מצפה ממנו. אבל המציאות טופחת על פנינו בנקודה זאת. מתברר שאפשר להצליח במבחן על חומר מסויים גם בלי להפנים אותו, בלי להבין אותו ואפילו בלי ללמוד אותו. בעזרת חשיבה מושגית לכאורה ואנליטית לכאורה יכול התלמיד להסתדר עם מספר לא מבוטל של שאלות טיפוסיות במבחנים טיפוסיים. כאן מתחיל איפוא ניגוד האינטרסים בין החינוך לבין המיון (או הסינון). על מערכת החינוך נכפית בנקודה זו נאמנות כפולה לשני יסודות מנוגדים. זוהי משימה קשה ביותר לכל הדעות. כמו במקרה של כל סוכן כפול קיימת הסכנה שבסופו של דבר ייטה הסוכן לטובת אחד הגורמים ובכך יפר את האיזון בין השניים שמלכתחילה היה אולי מעוניין לשמור עליו. נדמה לי שזה מה שקרה בעצם למערכת החינוך. היא קיבלה על עצמה להכין את התלמיד למבחן החיצוני שיקבע את עתידו וזנחה, אולי באופן לא מודע, את תפקידה כמחנכת.

3. מבחן אחר - האתגר

בעבודת מחקר שהושלמה זה לא כבר (מרים עמית, קשיים של סטודנטים בפתרון בעיות מושגיות בחשבון דיפרנציאלי - אבחון, ניתוח וטיפול, דוקטורט, אוניברסיטת בן גוריון, 1992) מדובר על הצורך לכלול בתרגילים ובמבחנים שאלות מושגיות. לפי מה שנאמר שם שאלה מושגית היא שאלה שכדי לפותרה על הפותר להתייחס למושגים המופיעים בשאלה. השימוש במתכונים השכיחים לא יביא את הפותר אל התשובה הנכונה. אני חושב שנכון יותר לדבר על פתרון מושגי ולא על שאלה מושגית. הבוחן המחבר "שאלה מושגית" עשוי להאמין כי הפותר אכן יתייחס למושגים המופיעים בשאלה ובעקבות ניתוחם יגיע אל התשובה הנכונה. למרות כוונותיו הטובות או הרעות של הבוחן (זה כבר ענין של השקפה) עשוי התלמיד לפתור את השאלה בלי לבצע את הניתוח המושגי שהבוחן קיווה לו. זה עלול לקרות כאשר התלמיד הספיק להכיר את "השאלה

המושגית" במהלך אימוניו לקראת המבחן. לפיכך ארצה להשתמש במונח "שאלה מושגית" כדי לציין שאלה שאכן נפתרה באופן מושגי. בכך הופך מונח זה למונח יחסי. הוא תלוי הן בשאלה והן בפתור. כדי ששאלה מסויימת אכן תהיה שאלה מושגית רצוי שהתלמיד לא ייתקל בה לפני המבחן. כאן בעצם מתחילה הדילמה של המורה. אם ברצונו לשאול במבחן שאלה מושגית עליו להמנע מלהציג שאלות דומות לה במהלך ההוראה והתרגול. מאידך, אם ברצונו להכין את תלמידיו בצורה הטובה ביותר למבחן עליו לחשוף את תלמידיו לכל השאלות האפשריות. לכאורה, ההגינות היא המחייבת זאת.

בשעת המבחן נמצא התלמיד בלחץ וקשה לצפות מאדם הנמצא בתנאי לחץ לחשיבה ברמה גבוהה. המשימה הנדרשת בשאלה מושגית במבחן אמורה להיות פשוטה למדי, אפילו טריויאלית, ובלבד שתאלץ את הפותר להשתמש בחשיבה מושגית ואנליטית אמיתית. מכל אלה עולה שהכנסת שאלות מושגיות במבחן כיתתי, לא כל שכן בבחינה חיצונית, היא ענין בעייתי במיוחד. שומר נפשו ירחק מכך. למרות זאת, אני ממליץ על הדבר. יכולה להיות לו תרומה חשובה גם לתלמיד וגם למורה. הידיעה ששאלות מושגיות עשויות להופיע במבחן תעודד את התלמיד לחשיבה מושגית ואנליטית. היא תגרום לו גם להבין שלאינטראקציה הכיתתית בינו ובין המורה יש חשיבות. אינטראקציה זו אסור לה שתעוצב באופן בלבדי על-ידי המאגר הקנוני של שאלות הבררות. בשאלות המושגיות יבואו לידי ביטוי טעמו של המורה, דרכי חשיבתו המיוחדות, היצירתיות שלו וכדומה. אמנם יש בזה פוטנציאל לקונפליקט אם השאלות המושגיות ישפיעו באופן שלילי על ציון התלמיד. בייחוד עלולה להיווצר התמרמרות כאשר ציון המגן יהיה נמוך יותר מציון בחינת הבררות. אני חושב שיש להתמודד עם בעיה זו ולצאת למאבק. למורים יש הרבה מאבקים צודקים עם מערכת החינוך כשהמאבק על שכר הוא רק אחד מהם. המאבק על למידה משמעותית הוא מאבק חשוב ושייך למאבק על מעמדו של המורה. האלטרנטיבה ללמידה משמעותית היא תעשיית ההכנה לבחינות בגרות. אלטרנטיבה שאינה גורמת הרגשה טובה במיוחד למורה. כמובן, היה רצוי שגם בחינות הבררות יכילו שאלות מושגיות, אבל לשנות את דפוסי בחינות הבררות הוא ענין מסובך. יש לי הרושם שמורים רבים גם אינם מעוניינים לשנות דפוסי בחינות הבררות הוא ענין עלולים להכשיל את תלמידיהם. שוב עולה כאן הבעיה של הנאמנות הכפולה שהוחלפה בנאמנות יחידה, הנאמנות להצלחתו המירבית של התלמיד בבחינת הבררות.

בהמלצה לכלול שאלות מושגיות איני מתכוון למהפכה: מדובר כאן בשינוי הדרגתי. קודם כל ביצירת מודעות לבעיה. המודעות היא תנאי הכרחי לשינוי. יצירת שאלות מושגיות אינה דבר קל. אם בשלב ראשון ירצה המורה לאמן את תלמידיו בפתרון שאלות מושגיות שיופיעו במבחן גם בכך תהיה תועלת. הוספת סוגים חדשים של שאלות למאגר הקנוני תאלץ את הנבחן לחפש את המתכון המתאים לפתרון השאלה בתוך קבוצה גדולה יותר של מתכונים. בעצם חיפוש כזה כבר יש יסודות של חשיבה אנליטית.

4. הדגמה

כאמור לעיל, אי אפשר לטעון על שאלה נתונה שהיא שאלה מושגית במנותק ממי שפותר אותה. הדוגמה להלן היא שאלה מושגית משום שבקורס¹ שבבחינת הסיום שלו היא הופיעה לא ניתנו שאלות הדומות לה באופן בולט, אם כי ניתנו שאלות דומות במידה מסויימת. בכך אני משתדל לענות על דרישת ההגינות שדיברתי עליה: המשימה הנדרשת אינה אמורה להיות קשה מדי לנבחן. תלמיד הנתקל בשאלה מושגית במבחן עלול ללקות פעמיים בהלם. בפעם הראשונה כשהוא נוכח לדעת שלא נתקל בשאלה כזו מעולם. בפעם השנייה כאשר, לאחר ניתוח, הוא מגיע למסקנה שהתשובה לשאלה היא פשוטה למדי וקשה לו להאמין ששאלות כאלה יינתנו במבחן. אם התשובה כל כך פשוטה סימן שמהו לא בסדר בפתרון. הערה אחרונה שברצוני לומר לפני שאציג את השאלה היא שעצם הצגתה אינו מהווה המלצה עליה. השאלה האם להשתמש בה או בדומות לה במבחנים היא ענין של טעם וכבר אמרתי קודם כי השאלה המושגית במבחנים אמורה להיות תוצאה של טעמו של המורה, תפיסותיו, גישותיו ומה עשה עם תלמידיו בכיתה ובשיעורי הבית.

אנ מצייג את השאלה להלן כדי להדגים את היסודות המושגיים החשובים לי, המאפשרים לחשוף חשיבה מושגית לכאורה ואנליטית לכאורה. השאלה היא ארוכה במיוחד וגם זה מתוך כוונה תחילה. הטקסט הארוך משמש כאן לבדיקה של יכולת הבנת הנקרא המתמטי.

¹ קורס בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי באוניברסיטה העברית לתלמידי ביולוגיה שציון הבררות שלהם הוא לפחות 9 ב-4 יחידות לימוד או לפחות 8 ב-5 יחידות לימוד. מורה הקורס הוא מחבר המאמר.

שאלה

ביחידה לביולוגיה היפותטית במשרד הבריאות נתבקשה החוקרת ד"ר רגינה הרחום לבנות מודלים מתמטיים להתפשטות מגיפה לא קטלנית באוכלוסיית בעלי חיים שחיה בתנאי עֵדָר בשטח גָדוֹר (אין מבודדים את בעלי החיים החולים). ד"ר הרחום הציעה שלושה מודלים²:

I. בתחילת המגיפה קצב התפשטותה פרופורציוני למספר החולים.

II. בסוף המגפה קצב התפשטותה פרופורציוני למספר הבריאים.

III. בנקודת זמן כלשהי (בין בתחילת ההתפשטות ובין בסופה), קצב ההתפשטות פרופורציוני הן למספר החולים והן למספר הבריאים (תזכורת: על גודל משתנה c אומרים שהוא פרופורציוני הן לגודל המשתנה a והן לגודל המשתנה b אם יש קבוע k כך ש: $c = kab$).

א. מה פירוש המושג קצב התפשטות מגיפה באוכלוסייה כלשהי כפי שאתה מבין אותו?

ב. מהו ההגיון הביולוגי, אם יש כזה, בכל אחד מהמודלים המתמטיים הנ"ל?

ג. סמן ב- N את מספר בעלי החיים באוכלוסייה הנחקרת על-ידי ד"ר רגינה הרחום. סמן באותיות כרצונך את שאר הגדלים הרלוונטיים המופיעים בהשערות החוקרת וציין מה מסמנת כל אות. **הנח כי N קבוע.**

ד. כתוב משוואה דיפרנציאלית עבור כל אחד מהמודלים I, II, III הנ"ל.

ה. פתור את המשוואות המתאימות למודלים I - II.

ו. ד"ר רגינה הרחום התקשתה בפתרון המשוואה הדיפרנציאלית למודל III. לפיכך, היא פנתה לידידה, ד"ר ליכטיג בְּרָגְבּוֹל, מהיחידה למתמטיקה שימושית באותו משרד בבקשת עזרה. ד"ר ברגבול פתר את המשוואה באופן כללי אבל הציע לד"ר הרחום בשלב ראשון פונקציה ספציפית

אחת לבדיקה. הפונקציה היא $y = N \left(1 - \frac{1}{1 + e^{Nkx}} \right)$, כאשר N כנ"ל ו- K קבוע הפרופורציה (את

משמעות x ו- y היתה ד"ר רחום אמורה להבין בעצמה). האם הפונקציה שמציע ד"ר ברגבול היא אכן פתרון למשוואה או שיש טעות בפתרונו? פרט כיצד הגעת לתשובתך והראה את כל חישוביך.

אם מצליח התלמיד להבין את הטקסט הארוך הזה הוא מגלה בו יסודות שגרתיים למדי בצד יסודות פחות שגרתיים, הכל ביחס למה שהתרחש בכיתה ובתרגילי הבית שניתנו במהלך הקורס הנ"ל. המבחן ניתן במועד ב' של הקורס (חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי לתלמידי ביולוגיה), לכן מספר הנבחנים קטן יחסית ($n=31$). חלקם ניגש למבחן משום שנכשל במועד א'. חלק אחר ניגש אליו כי רצה לשפר את ציון מועד א' שלו.

זה אולי המקום להזכיר כי במהלך הקורס נאמר לתלמידים שוב ושוב כי יש מקרים בעולם החי שבהם אנחנו משתמשים במודל רציף למצבים ותהליכים דיסקרטיים. גידול אוכלוסייה וקצב גידול אוכלוסייה היו דוגמאות שהובאו בפני התלמידים. המשוואות הדיפרנציאליות המתאימות לשלושת המודלים הנ"ל הן:

$$(I) \quad \frac{dy}{dx} = ky$$

$$(II) \quad \frac{dy}{dx} = k(N - y)$$

$$(III) \quad \frac{dy}{dx} = ky(N - y)$$

² שים לב, אלה אינם מודלים אלטרנטיביים בהכרח. הם מתייחסים לפרקי זמן שונים במהלך התפשטות המחלה.

5. התוצאות

5.1 קצב התפשטות מגיפה

הבקשה (סעיף א') להסביר מהו קצב התפשטות מגיפה יכולה להראות בנלית, שכן הנושא של קצב השתנות (ממוצע ובנקודה) נידון בהרחבה רבה בקורס מספר פעמים. בכל אופן, כאן, צריך התלמיד להיות ספציפי משום שהשאלה היא ספציפית. בקורס דובר על קצב השתנות ממוצע ועל הקשר בינו לבין קצב השתנות בנקודה. בתחילת הקורס התברר שכמחצית התלמידים חושבים שמושג קצב ההשתנות הממוצע מוגדר בעזרת קצב ההשתנות בנקודה (בניסוח התלמידים: קצב ההשתנות הממוצע הוא הממוצע של קצבי ההשתנות בנקודה). כאשר מדובר במונח "קצב התפשטות מגיפה" בשפת יום-יום מתכוונים בדרך כלל לקצב ההשתנות הממוצע (מספר החולים הנוספים ביחידת זמן). ניתן היה לקוות כי בבחינת גמר של הקורס בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי יתייחסו התלמידים לא רק למונח היום יומי של המונח, אלא גם למשמעותו הטכנית-פורמלית (דהיינו, נגזרת של פונקציה מתאימה וכדומה). כידוע, בתחום ההוראה, תקוות לחוד ומציאות לחוד.

להלן התפלגות תשובות התלמידים לסעיף א' של השאלה.

קטיגוריה I: תשובה מלאה שמופיע בה מושג הנגזרת - 2 תלמידים.

דוגמה: אם נשרטט גרף של מספר החולים לעומת הזמן, אז קצב ההתפשטות הוא השיפוע (טנגנס הזווית) של המשיק לגרף בנקודה מסוימת.

$$\text{במילים אחרות: } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

כלומר הגבול של:

$$\frac{\text{מספר החולים בנקודה} + \text{תוספת פחות מספר החולים בנקודה}}{\text{תוספת}}$$

כאשר התוספת שואפת ל- 0.

הערה: $f(x+\Delta x)$ - מספר החולים בזמן $(x + \text{תוספת זמן})$, $f(x)$ - מספר החולים בזמן x .

קטיגוריה II: תשובה המגדירה למעשה קצב השתנות ממוצע ומשקפת את המושג היום יומי - 12 תלמידים.

דוגמאות:

1. מספר הפרטים באוכלוסייה נתונה הנדבקים במחלה מסויימת ביחידת זמן.
2. השינוי במספר החולים ליחידת זמן dy - שינוי במספר החולים dx - שינוי ביחידת זמן. (בתשובה זו נעשה ניסיון להתקדם מעבר למושג היום-יומי בכיוון ההגדרה הפורמלית של קצב שינוי בנקודה. אנחנו רואים שהנסיון לא עלה יפה. התלמיד לא טרח לכתוב את המנה: dy/dx . אבל חמור מכך, אצלו dy הוא השינוי במספר החולים ואין הוא מבחין בין Δy ל- dy).
3. מספר בעלי החיים באוכלוסייה שנדבקים במחלה ליחידת זמן.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{מס' בע"ח באוכלוסייה שנוספו לאוכלוסייה הנגועה ביחידת זמן}}{\text{יחידת הזמן}}$$

(גם בתשובה זו נעשה ניסיון להתקדם בכיוון ההגדרה הפורמלית. הכשל כאן דומה לכשל בתשובה הקודמת אבל מצטרף אליו יסוד נוסף. בגלל הרצון לכתוב קו שבר התעורר הצורך לכתוב משהו במכנה השבר. המעבר מ"מספר בעלי החיים הנדבקים במחלה ליחידת זמן" למנה של שני גדלים אינו מייד ויהתלמיד שאינו מבין את מורכבות הענין מציין "יחידת זמן" הן במונה והן במכנה, מה שעושה את השימוש בקו השבר לבלתי הגיוני).

קטיגוריה III: הגדרה משובשת בה נזכרים מספר החולים והזמן בתוספת יסודות לא נכונים או שנזכר בה רק הזמן - 11 תלמידים.

דוגמאות:

1. מספר הפרטים החולים באוכלוסייה לפרק זמן מסויים. השתנות. (התלמיד מציין אומנם שמדובר במושג של יחס. אבל הוא אינו מדבר על היחס בין התוספת למספר החולים לבין תוספת זמן מסויימת. באומרו "השתנות" באופן שתמי הלך לאיבוד גם ענין היחס).
2. מספר הפרטים הבריאים ליחידת אוכלוסייה הנדבקים במגיפה ליחידת זמן. (גם כאן, כמו בדוגמה הקודמת יש "תוספת" המקלקלת את השורה. התוספת כאן היא "יחידת אוכלוסייה", מונח שהוזכר בקורס והתלמיד סבר שהוא רלוונטי לשאלה זו).
3. מספר המודבקים. כמה אנשים נוספים נדבקו ביחידת זמן.
זמן
(בתשובה זו קו השבר הוא שמקלקל. התלמיד אינו רואה שקו השבר אינו שקול למה שנאמר אחר כך. אם נתעלם מכך אפשר לסווג את התשובה לקטיגוריה II).
4. השינוי במספר החולים במגיפה בזמן מסויים.
מספר החולים בזמן t - מספר החולים בזמן $t+1$
 t
(גם לגבי תשובה זו, אם נתעלם מקו השבר ניתן לסווג אותה לקטיגוריה II).
5. קצב התפשטות באוכלוסייה כלשהי זה בכמה זמן הכמות של המגיפה מוגדלת.
6. זהו הזמן הנדרש או הזמן העובר.
(בשתי התשובות האחרונות אין זכר למושג היחס בין שני גדלים שהוא בסיס המושג של קצב התפשטות).

קטיגוריה IV: הגדרה המחליפה את המילה "קצב" במילה "מהירות" - 3 תלמידים.

דוגמה: קצב התפשטות מגיפה הוא מהירות הגידול שלה.
(לכאורה, הגדרה זו בסדר שכן השאלה לא אסרה על שימוש במילים נרדפות. בכל אופן ניתן לצפות מתלמיד בשלב זה שבהסבר אמיתי הוא יימנע ממילים נרדפות. העובדה שרק 3 תלמידים מתוך 31 השתמשו במילים נרדפות מעידה כי מרביתם מבינים את "כללי משחק ההגדרה". זה כמובן אינו מבטיח שהם ייתנו הגדרה נכונה).

קטיגוריה V: תשובה בה נטענת טענה על קצב התפשטות מבלי שהמושג יוסבר - 3 תלמידים.

דוגמאות:

1. קצב התפשטות מגיפה תלוי בגודל אוכלוסייה בריאה וחולה בהנחה שהאוכלוסייה בשטח סגור.
2. כשהתפשטות המגיפה גדלה גדל גם מספר בעלי החיים החולים. הוא גדל בהשוואה למספר בעלי החיים הבריאים. מספר בעלי החיים הבריאים קטן עם התפשטות המגיפה.
(למרות שמספר התלמידים בקטיגוריה זו הוא קטן, יש בה משהו אופייני. אחוז מסוים של תלמידים לא קולט נכון את צרוף המילים "מה פרוש המושג קצב התפשטות מגיפה?". הוא מבין אותו בתור "מהו קצב התפשטות המגיפה?" ואת הצרוף הזה הוא מבין בתור "מה אפשר לומר על קצב התפשטות המגיפה?". מורים רבים, אני מניח, מכירים את התופעה שכשהם שואלים מהו C, באשר C מושג כלשהו, ומתכוונים להגדרת המושג, עונים להם תלמידים מסויימים בטענה על המושג).

5.2 ההגיון הביולוגי

הנושא של הגיון ביולוגי של מודלים מתמטיים פשוטים בביולוגיה נידון בהרצאה ונבדק במבחן מועד א', כמובן בשאלה אחרת. הוא לא היה זר לתלמידים הנבחנו אבל יש להניח שמעולם לא נתקלו קודם בשאלה הספציפית הזאת. להלן התפלגות התשובות לסעיף ב' בשאלה.

קטיגוריה I: תשובות הגיוניות או כמעט הגיוניות שיש בהן יסודות אנליטיים ברורים - 18 תלמידים.

דוגמה: בתחילת המגיפה - קצב התפשטות פרופורציוני למספר החולים. ההגיון - כיוון שבתחילת המגיפה יש יותר בריאים ופחות חולים ומי שמשפיע זה החולים כיוון שבבריאים זה לא תלוי. במילים אחרות, כיוון שבהתחלה יש מעט חולים ובריאים לא חסר, אז קצב התפשטות המחלה תלוי בחולים.

בסוף המגיפה קצב ההתפשטות פרופורציוני למספר הבריאים. ההגיון - כיוון שבסוף המגיפה יש מעט בריאים וחולים לא חסר אז במי שזה תלוי זה בבריאים כיוון שהם מעט מאוד יחסית למספר החולים.

בנקודת זמן כלשהי קצב ההתפשטות פרופורציוני הן למספר חולים והן למספר הבריאים. ההגיון - קצב המחלה תלוי גם במספר החולים וגם בבריאים באופן שווה ואם יש הרבה חולים אז קצב המחלה יתפשט מהר יותר. ככל שיש יותר בריאים - קצב המחלה יתפשט מהר יותר (כיוון שאם יש הרבה חולים אז יש סיכוי גדול יותר להדבקות. וכן ככל שיש יותר בריאים אז הסיכוי להדבקות גם כן יותר גדול).

קטיגוריה II: תשובות שיש בהם יסודות נכונים אבל בולטת גם תפיסה מעורפלת. תשובות שניתן להסתכל עליהן כעל שלב מעבר מהחשיבה המושגית לכאורה והאנליטית לכאורה לחשיבה המושגית והאנליטית האמיתית. תשובות שהן בין הסבר טאוטולוגי - שהוא חזרה במילים אחרות על מה שאמור להיות מוסבר - לבין הסבר שיש בו יסודות מסבירים - 12 תלמידים.

דוגמאות:

1. בתחילה ככל שמספר החולים גדול יותר קצב ההתפשטות גדול יותר כיוון שהמגע עם החולים גדול יותר. בסוף, ככל שמספר הבריאים גדול יותר המגע של הבריאים עם החולים גדול יותר וקצב התפשטות המגיפה גדול. (שים לב שהתשובה מתייחסת לתנאים בהם קצב ההתפשטות גדול יותר. כאשר מדובר על כך שמשנתה y פרופורציוני למשתנה x נהוג לומר שככל ש- x גדל גם y גדל. בדרך כלל לא מוסיפים ואומרים שככל ש- x קטן גם y קטן. לא אכנס כאן למכלול הסיבות האפשריות לכך. אינני יודע האם העובדה כי התוספת הזאת נובעת באופן מידי מהאמירה הראשונה היא אחת מהסיבות האלה. על כל פנים, תלמידים רבים אינם מודעים לתוספת הזאת ואינם מזכירים אותה במצבים רלוונטיים כמו בשאלה שלנו. ואכן, בתחילת התפשטות המגיפה מספר החולים קטן. מאידך, העובדה שהם "מוקפים" בבריאים, וכל מגע של חולה עם בריא עלול לגרום להדבקה, עושה לסבירה את ההשערה שקצב ההתפשטות פרופורציוני למספר החולים. דבר דומה קיים לגבי השלב של סוף התפשטות המחלה. מה שמשפיע שם על קצב ההתפשטות הוא העובדה שיש מעט בריאים "המוקפים" בחולים. יש אם כך מעט מועמדים להדבקות וזה נותן סבירות להשערה שקצב ההתפשטות של המגיפה בשלב זה מוכתב על-ידי מספר הבריאים ולא על-ידי מספר החולים. אולם לומר על שלב זה כי "ככל שמספר הבריאים גדול יותר... קצב ההתפשטות המגיפה גדול" אינו מבטא את המצב למרות שהוא נכון מבחינה מתמטית. זו הסיבה שתשובות דלעיל מויינו לקטיגוריה II ולא לקטיגוריה I. יש בהן איזה יסודות של חשיבה אנליטית מצד אחד אבל מצד שני יש בהן גם איזו חזרה לא משמעותית של חלקים של ההשערה שאת ההגיון שלה מתבקש התלמיד להסביר).

2. ככל שיש יותר חולים קצב המחלה יהיה רב יותר ולמעשה חולים ידביקו אחרים איתם הם באים במגע וכך מספר החולים יעלה. בסוף המגיפה הבריאים יקבעו את הקצב. ככל שיש יותר פרטים בריאים המגיפה תתפשט פחות. ההגיון במודל השלישי מסתמך לדעתי על עקרון אחידות החומר ואחידות הזמן. בכל נקודה מסויימת אותה אבחר יתרחשו דברים זהים מבחינת התנהגות החומר בתנאים שווים. לכן אם נבחר בנקודת זמן מסויימת אנו נראה כי בנקודת זמן זו קצב ההתפשטות יהיה למעשה תלוי הן במספר החולים והן במספר הבריאים. לדעתי, אין הגיון בכך מכיוון שהחולים הם שקובעים את הקצב העיקרי. (שים לב כי בתשובה זו יש התייחסות לכך שבסוף התהליך קצב ההתפשטות איטי יותר: "ככל שיש יותר פרטים בריאים המגיפה תתפשט פחות". אני משער שהמילה "יותר" במקום השלישי במשפט השתרבה לשם בטעות והתלמיד התכוון ל"פחות". המילה "יותר" איננה מתיישבת עם טענות אחרות שמופיעות בתשובת התלמיד. מאידך, בדיון בהגיון של המודל השלישי יש הרבה יסודות מושגיים לכאורה או אנליטיים לכאורה. ההפניה לעקרון אחידות החומר ואחידות הזמן אינה רלוונטית. בשיעור הוזכר העקרון הזה כהנחה בסיסית

על תהליכים בטבע: דוגמאות שונות של אותו "חומר" מתנהגות באופן זהה באותם פרקי זמן הנמצאים בקטעים שונים של ציר הזמן אם התנאים זהים. עקרון זה אינו אמור להסביר דווקא את המודל השלישי. הוא רלוונטי באותה מידה לשני המודלים הראשונים. אזכורו בהקשר של המודל השלישי איננו מסביר שום דבר ספציפי למודל השלישי. לפיכך אני מתייחס אליו כאל יסוד מושגי לכאורה ואנליטי לכאורה.

5.3 מושג הפתרון של משוואה דיפרנציאלית

לא אדון כאן בסעיפים ג'-ה' של השאלה שהם שגרתיים פחות או יותר. סעיף ו' היה אמור לבדוק את מושג הפתרון של משוואה דיפרנציאלית אצל התלמיד. מתברר שמושג הפתרון של משוואה כלשהי, לאו דווקא משוואה דיפרנציאלית, הוא מושג לא פשוט. דנתי בכך ברשימה הקודמת (על"ה 12, 23-27. מרץ 1993). ציינתי שבהרבה מקרים בלימוד המתמטיקה נוצרים אצל התלמיד "תחליפי מושגים" במקום המושגים האמיתיים. אחד המקרים האלה הוא מושג הפתרון. כיוון שהמושג הזה קשור בתכנית הלימודים אל הפרוצדורה המובילה אליו, תופסת הפרוצדורה את מקום המושג אצל תלמידים לא מעטים. לפיכך, כאשר מבקשים מתלמידים לברר האם משהו הוא פתרון של משוואה נתונה ייטה חלק מהם לבצע פרוצדורה ולראות האם היא מובילה אל הדבר שלגביו הם אמורים לפסוק האם הוא פתרון או לאו. מושג הפתרון של משוואה דיפרנציאלית הודגש בשיעור וגם ניתנו כמה דוגמאות פשוטות שבהן נבדק האם משהו הוא פתרון של משוואה דיפרנציאלית נתונה או לא (דהיינו, בוצעו הצבות שאימתו או הפריכו טענות על כך שמהו הוא פתרון). לא ניתנו על כך תרגילי בית.

המשימה המוטלת על התלמיד בסעיף ו' לפי כוונתי היתה גזירת הפונקציה הנתונה

$$y = N \left(1 - \frac{1}{1 + e^{Nkx}} \right) \text{ והצבת הנגזרת והפונקציה במשוואה: } y' = Ky(N-y) \text{ . חישוב נכון (הדורש}$$

מידה לא מעטה של מיומנות טכנית) היה אמור להביא את התלמיד לתשובה שהפונקציה הנתונה היא אכן פתרון.

גם תלמידים שביצעו נכון את ההצבות אבל טעו בחישוב קיבלו את מלוא הנקודות.

להלן התפלגות תשובות התלמידים לסעיף ו'.

קטיגורית I: תשובות שבהן בוצעה גזירה והצבה כמו שצריך, יתכן עם טעויות חישוב - 5 תלמידים.

קטיגורית II: תשובות המבוססות על פתרון נכון של המשוואה בשיטה של הפרדת משתנים והצבת 0 במקום קבוע האינטגרציה - 2 תלמידים.

למרות שהתשובות בקטיגוריה זאת לא היו אינדקציה לתפיסה מושגית, הרי שמבחינת השאלה היו אלה תשובות מלאות. השאלה לא דרשה להגדיר את מושג הפתרון אלא לקבוע האם פונקציה מסוימת היא פתרון או לא. הדרך עליה התבססו התשובות היא לגיטימית בהחלט ומי שהלך בה השתמש בידע שאפילו לא הוצג בשיעור (אינטרמציה של פונקציות רציונליות פשוטות).

קטיגוריה III: כאן נכללו תשובות מכמה סוגים:

א. חישוב הנגזרת מבלי שהתלמיד הציב את y ו- y' במשוואה הדיפרנציאלית. הוא קיבל ביטוי

ב- x עבור y' וטען שביטוי זה אינו שווה ל- $ky(N-y)$.

2. פעולות אלגבריות חסרות משמעות שלא הביאו למצב שבו אפשר להכריע בשאלה האם לפנינו פתרון או לא.

$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = kn(N-n) \text{ לדוגמה:}$$

$$\frac{1}{n} \frac{1}{N-n} \Delta n = k \Delta t$$

3. נסיון כושל לפתור את המשוואה $y' = ky(N-y)$ ולהשוות את התוצאה לפונקציה הנתונה. למשל:

$$\int \frac{dy}{Ny - y^2} = \int k dx$$

$$\ln(Ny - y^2) = kx + d$$

$$Ny - y^2 = e^{kx} e^d$$

או למשל:

$$\frac{dy}{dx} = ky(N - y)$$

$$\int \frac{dy}{y(N - y)} = \int k dx$$

$$(N - 2y) \ln(yN - y^2) = kx + c$$

סה"כ התשובות בקטיגוריה זו - 20.

קטיגוריה IV: תשובות שהן מושגיות לכאורה אבל מילוליות (לעומת חישובים אלגבריים אנאליטיים לכאורה בקטיגוריה III) - 2 תלמידים.

דוגמה: גזירה של הפתרון של ד"ר בְּרָגְבּוּל תתן את הפונקציה המקורית של ד"ר רגינה הַרְחוּם. מכאן שפתרונו של ד"ר בְּרָגְבּוּל נכון.

(התלמיד לא חישב את הנגזרת. הפונקציה המקורית של ד"ר רגינה הַרְחוּם היתה כמובן פיקציה של התלמיד. הרי לא היתה לד"ר הַרְחוּם שום פונקציה. ייתכן שהתלמיד זכר משהו באופן משובש מההוראה שיש לגזור ולהציב במשוואה המקורית).

קטיגוריה V: אין תשובה - 2 תלמידים.

6. סיכום

השאלה שהוצגה לעיל נועדה לאלץ תלמידים לגלות חשיבה מושגית במידה שחשיבה כזאת התפתחה אצלם. לא כל סעיפיה היו מושגיים. סעיפים ד', ה' היו שגרתיים ביחס למה שנעשה בשיעורי ובתרגילי הבית. תוצאות הניתוח של תשובות התלמידים אינן נתונות במונחים של ממוצע וסטיית תקן. הן אמורות לחשוף יכולת חשיבה שלימודי המתמטיקה אמורים להקנות. אם התוצאות הן עגומות או מעודדות זה כבר ענין של עמדה. באשר לרכישת המושג קצב התפשטות מחלה רק שניים רכשו אותו באופן מתמטי מלא אבל ל- 12 יש קירוב די טוב למושג. ל- 11 יש מושג משובש ועוד 6 תלמידים מעוררים ספקות לגבי כושר החשיבה שלהם בהקשר זה.

מאידך, כאשר מדובר בקשירת המודל המתמטי לסיטואציה הביולוגית, מצליחים 18 תלמידים להפגין חשיבה אנליטית אמיתית. על עוד 12 ניתן לומר שהם נמצאים בדרגה שהיא קצת יותר מאשר חשיבה אנליטית לכאורה, אבל קצת פחות מאשר חשיבה אנליטית אמיתית. לעומת זאת כשמדובר במושג הפתרון של משוואה דיפרנציאלית, ניתן לומר ש- 24 תלמידים אינם מסוגלים לתת תשובה מניחה את הדעת בגלל ליקויים מסוגים שונים.

המסקנה המרכזית והלא מפתיעה היא שיכולת החשיבה תלויה בסוג השאלה. לא ניתן לדבר על יכולת חשיבה מושגית ויכולת חשיבה אנליטית במנותק מהקשר ספציפי. לתלמידי הביולוגיה יש יכולת חשיבה מושגית ואנליטית כאשר מדובר בהקשר ביולוגי והם מאבדים יכולת זאת כשהם עוברים להקשר מתמטי מעורב (סעיף א') או טהור (סעיף ו'). אם היתה ניתנת לי ולתלמידים הזדמנות נוספת, אפשר היה לנצל את הניתוח שנערך כאן כדי לשפר את הבנת התלמידים בנושאים מסויימים. במקרה זה, לצערי, כמו במקרים דומים בחינוך, אין הזדמנות נוספת והלקח שהופק ינוצל בהוראה לתלמידים אחרים שמן הסתם גם איתם נכשל בנקודה זו או אחרת.

אגב, הציון הממוצע על שאלה זו בסקלה של 100 היה 73 וסטיית התקן - 15, תוצאה שמערכת החינוך יכולה בהחלט לישון איתה בשקט. תוצאות הניתוח הקוגניטיבי צריכות, לדעתי, לגרום לה, לפחות, לקצת נדודי שינה.