

הנושא: **הוראת המתמטיקה - מחשבות ותופעות מיומנו של מורה חוקר**

הוכן ע"י: שלמה וינר, בשיתוף עם רסלאן שאקר, האוניברסיטה העברית בירושלים.

תקציר: המאמר מדווח על מחקר שבו נבדקה תפיסת המושג שיפוע של תלמידים במגזר הערבי והיהודי ברמות שונות. במחקר זה התייחסו ליכולת התלמידים לעבור מההיבט הגרפי להיבט האלגברי ולהיפך והיכולת לעבור מההיבט האלגברי להיבט הגרפי ובחזרה לאלגברי. במאמר מובאות השאלות שנכללו בשאלון, תשובות התלמידים וניתוח התשובות.

מילות מפתח: הוראת מתמטיקה, מחקר בחינוך מתמטי, אלגברה, משוואת קו ישר, שיפוע, ייצוג גרפי, ייצוג אלגברי.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 14, ניסן תשנ"ד, מרץ 1994, עמודים 12-20.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 15 עמודים.

הוראת המתמטיקה - מחשבות ותופעות מיומנו של מורה חוקר

הקדמה

מתוך כוונה להרחיב את מגוון הנושאים, האוכלוסיות והגישות המתוארים במדור זה, אכתוב אותו מפעם לפעם בשיתוף עם אדם נוסף. התואר "חוקר" הנלווה אל השם "מורה" הוא תוספת המתקבלת כתוצאה מהתייחסותו של המורה לפעילותו. הפעילות הבסיסית של ההוראה נתפסת כהעברת החומר ובחינה עליו. מורה המנסה, נוסף על כך, גם להבין את התהליכים המתרחשים בכיתה, את מחשבת התלמיד והתנהגותו המתמטית ואת מחשבתו שלו והתנהגותו כמורה - הופך בזאת לחוקר. תנאי הכרחי לחקירה הוא מודעות ועירנות לתופעות. כשאלה ישנן, אפשר לחכות לתופעות שיתגלו מעצמן במהלך פעילויות כיתתיות שונות או לנקוט יוזמות מיוחדות כדי ליצור אותן. הפעם מדובר ביוזמה שנועדה לברר תפיסות של תלמידים במגזרים שונים (ערבי ויהודי), ברמות שונות (תלמידי 5 יחידות ו-3 יחידות) בנושא בסיסי של תכנית הלימודים.

1. מושג השיפוע

מושג השיפוע הוא מושג מרכזי בפרק הפונקציה הליניארית ותיאורה הגרפי. פרק זה נלמד כבר בחטיבת הביניים ומוזכר שוב ושוב בחטיבה העליונה. הוא יכול להיחשב גם כנושא בגיאומטריה אנליטית מבלי שמונח זה יופיע במפורש, שכן מדובר במשוואת ישר או הצגת ישר. דהיינו, אנחנו נותנים ייצוג אלגברי ל"ייצור" גיאומטרי. בספרי המתמטיקה הנפוצים כיום אפשר למצוא הגדרות כמו:

1. שיפוע של ישר שמשוואתו $y = mx + n$ מוגדר בתור m
2. אם $P = (x_1, y_1)$ ו- $Q = (x_2, y_2)$ הן שתי נקודות על ישר אז שיפועו ניתן לחישוב על-ידי

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{התבנית}$$

הגדרות אלה הן טכניות לחלוטין ואינן מנסות לקשור את המושג למשמעות המילה שנבחרה כשם של המושג. למילה "שיפוע" יש משמעות יום-יומית ברורה ואם היה נעשה ניסיון מצד מחברי הספרים לקשור את המושג הטכני למושג היום-יומי, הם היו יכולים להרחיב את הדיבור בנקודה זו. אמנם ניצב בפני מחברי הספרים קושי אובייקטיבי לקשור את המושג הטכני למושג היום-יומי. הקשר הוא בכך שהמושג הטכני נותן את טנגנס הזווית שיוצר הישר הנידון עם הכיוון החיובי של ציר ה- x כאשר קנה המידה של ציר ה- x זהה לקנה המידה של ציר ה- y . עבור שיפוע חיובי (במובן הטכני), ככל שהוא גדול יותר כך גם שיפוע הישר (במובן היום-יומי) גדול יותר; דהיינו, הזווית שבין הישר והכיוון החיובי של ציר ה- x גדולה יותר. מכיוון שהפונקציות הטריגונומטריות הן נושא הנלמד רק בכיתה יא, אין אפשרות להשתמש במושג טנגנס זוית כדי לקשר בין המושג הטכני של שיפוע לבין המשמעות היום-יומית של המילה "שיפוע". עובדה זו מסבכת מאוד כל ניסיון הסבר בנקודה זו וכנראה שבגללה נמנעים מחברי הספרים (והמורים בעקבותיהם) מלהציע הסבר כלשהו לשימוש במילה "שיפוע" כמציינת מקדם ה- x במשוואה $y = mx + n$. מאידך גיסא ידוע (ראה למשל: Davis & Vinner, 1986), כי המשמעות היום-יומית של מילים שנבחרו לשמש כמונחים טכניים דוחקת לפעמים את המשמעות הטכנית ואנשים מייחסים למונח הטכני את משמעותו היום-יומית (דוגמאות בולטות לכך: קבוצה, שאיפה לגבול, משיק ועוד). כך, למשל, התברר כי בכיתה מסוימת אשר בה התבצע שיתוף פעולה בין מורה לחוקרת (במקרה זה היו המורה והחוקרת שתי "ישויות נפרדות") סברו 7 תלמידים מתוך 33 כי שיפוע של ישר הוא גודל הזווית שיוצר הישר עם ציר ה- x (ראה סימה בן דוד, 1986). בעקבות ממצא זה ומתוך רצון לבדוק היבטים נוספים של מושג השיפוע, הוחלט להעביר שאלונים לתלמידי החטיבה העליונה במגזר הערבי ובמגזר היהודי, ברמות של 5 ו-3 יחידות לימוד. התלמידים נבחרו משני בתי ספר כמפורט בטבלה הבאה:

המגזר היהודי	המגזר הערבי	
36	32	י 5 יחידות
23	29	יא 3 יחידות
16	38	יב 3 יחידות
75	99	סה"כ

הסיבה לכך שהתלמידים נדגמו משכבות גיל שונות היא טכנית. היה סביר יותר מבחינת נקיון מערך המחקר לדגום משכבת גיל אחת, בהנחה שמטרתנו העיקרית היא להשוות בין תפיסות תלמידי 5 יחידות לתפיסות תלמידי 3 יחידות.

אבל השוואה זו היא רק מטרה משנית. מכיוון שמושג השיפוע נלמד לראשונה בחטיבת הביניים בכיתה ט, אבל מוזכר שוב ושוב בכל הכיתות של החטיבה העליונה, אין סיבה להניח שדגימת תלמידי 3 יחידות מכיתות יא, יב תשפיע לרעה על התוצאות שלהם. יש בהחלט סבירות גם להשערה ההפוכה.

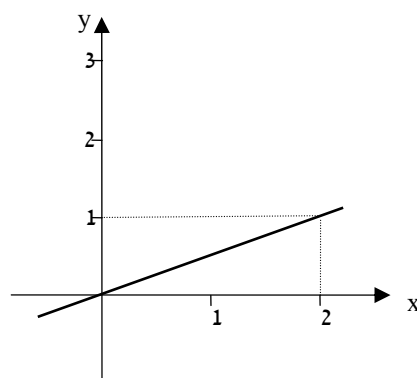
חיברנו שאלון שהיה אמור לבדוק יכולות כלליות בהקשר המיוחד של מושג השיפוע: היכולת לעבור מההיבט הגרפי להיבט האלגברי, היכולת לעבור מההיבט האלגברי להיבט הגרפי והיכולת לעבור מההיבט האלגברי להיבט הגרפי ולחזור להיבט האלגברי. להלן השאלות, התוצאות וניתוחן.

2. המעבר בין ההיבט הגרפי להיבט האלגברי

חמש שאלות מתוך שבע נועדו לבדוק את היכולת של התלמיד לעבור מישר נתון במערכת צירים למשוואתו, להתייחס לישרים שונים בעלי אותה משוואה במערכות צירים עם קנה מידה שונה לציר ה- x ולציר ה- y כאל שווים ולהתגבר על הנטייה לכאורה של המשמעות היום-יומית לדחוק את המשמעות הטכנית של המושג (נטייה שהתגלה בעבודתה של סימה בן דוד באופן ספציפי לגבי מושג השיפוע ובחיבורים אחרים לגבי מושגים אחרים).

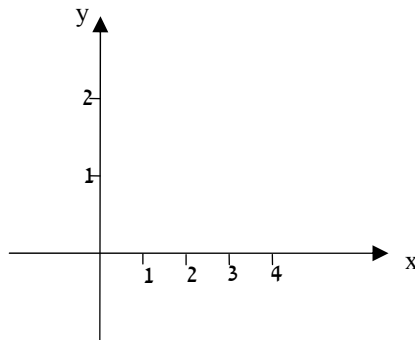
השאלות היו:

1. במערכת צירים להלן (שים לב כי קנה המידה על ציר ה- x שונה מזה שעל ציר ה- y) נתון ישר:



מהי משוואת הישר?

2. במערכת הצירים הבאה שרטט את הישר המתאים למשוואה שמצאת בתשובה בשאלה הקודמת.



3. מה שיפועו של הישר המשוורטט בשאלה 1?

4. מה שיפועו של הישר ששרטטת בתשובה לשאלה 2?

5. איזו מבין הטענות היא הטענה הנכונה?

א. השיפוע של אחד הישרים גדול מהשיפוע של הישר השני.

ב. שני השיפועים שווים.

הסבר את תשובתך!

השאלות האלה נחשבות בעינינו כשאלות בסיסיות ביותר שאין צורך להתכונן או לחזור על חומר כדי לענות עליהן. הידע הנדרש כאן הוא הידע שעל כל תלמיד מתמטיקה החל מכיתה י, לאחר שרענן את ידיעותיו מחטיבת הביניים, להביא איתו לכל שיעור מתמטיקה. אופיין הלא שגרתי של חלק מהשאלות או של כולן (הכל תלוי, כמובן, בסוג התרגול שעבר התלמיד) אינו צריך להיות מכשול או מלכודת למי שמסוגל לחשוב ברמה בסיסית של המושג הנידון.

ניתוח התשובות הביא למיון לקטיגוריות כדלהלן. אנו מביאים כאן את התוצאות של כלל האוכלוסיה $N = 174$.

שאלה 1

קטיגוריה I: תשובה נכונה (62%)

את התשובות הנכונות חילקנו לשתי קטיגוריות משנה:

קטיגוריה Ia: תשובות אשר הסתמכו על כך שמשוואת הישר הנתון היא מהטיפוס $y = ax$ וכל

מה שצריך לעשות כדי למצוא אותה הוא לקבוע את a . לדוגמה: $A = (2, 1)$, $a = \frac{0-1}{0-2}$ ולכן

משוואת הישר היא: $y = \frac{1}{2}x$, או על סמך חישוב בעל פה, תשובה מידית: $y = \frac{1}{2}x$.

(אחוז התשובות בקטיגוריה זו הוא 38)

קטיגוריה Ib: תשובות שאינן מסתמכות על כך שמשוואת הישר היא מהטיפוס $y = ax$ ויוצאת מהצורה הכללית של משוואת ישר: $y = ax + b$. כדי לקבוע את משוואת הישר הנתון

צריך למצוא הן את a והן את b . בקטיגוריה זו אפשר להבחין בין שני סוגי תשובות. בראשון, התלמיד באמת אינו יודע כי $b = 0$ למרות שהישר הנתון עובר דרך הראשית.

במקרה זה הוא מבצע חישוב מפורט, כמו:

$$y = ax + b \quad A(2, 1)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x + b$$

$$1 = \frac{1}{2} \cdot 2 + b$$

$$1 = 1 + b \Rightarrow b = 0$$

ומסכם: ולכן משוואת הישר היא $y = \frac{1}{2}x$.

סוג שני של התשובות הוא מהטיפוס: משוואת הישר היא $y = ax + b$; $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$; ולכן

משוואת הישר היא: $y = \frac{1}{2}x$. כאן מתגלה אולי סגנון טיעון מתמטי. התלמיד לא ביצע

למעשה שום חישוב כדי לקבל ש: $b = 0$.

יש להניח שדבר זה היה ברור לו מלכתחילה. למרות זאת התלמיד מתייחס ל- b כשהוא מציין את משוואת הישר וזאת מתוך רצון להיות כללי בהתחלה ומפורש בהמשך. סגנון זה מצוי בין מתמטיקאים ומורים למתמטיקה כשם שמצוי גם הסגנון שבו מדלגים על שלבים ואין מפרשים ומפרטים. אנו מצינים תופעה זו מבלי לנקוט עמדה כלפיה. שני הסגנונות לגיטימיים, לכל אחד חסרונותיו ויתרונותיו. ייתכן גם שבין נותני התשובות מהסוג הראשון לעיל, אשר בהן בוצעו חישובים מפורטים לקבלת $b = 0$, נמצאים תלמידים שהיה ברור להם מראש כי $b = 0$ ובין אחרים שהדבר אינו ברור להם (אין לנו ספק שיש תלמידים שהדבר לא ברור להם משום שטעו בחישובים וקיבלו b השונה מ-0. הם אינם נכללים כמובן בקטיגוריה Ib).

אחוז התשובות בקטיגוריה Ib הוא 24.

קטיגוריה II: תשובה לא נכונה הנובעת מטעויות חישוב (3%).

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{2 - 1} = -\frac{1}{2} \quad \text{דוגמה:}$$

$$1 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + b \quad \text{נציב את הנקודה (2, 1) ונקבל}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 2 \quad \text{מכאן: } b = 2 \text{ ולכן משוואת הישר היא}$$

קטיגוריה III: תשובה לא נכונה הנובעת משיבוש בנוסחת השיפוע (5%).

$$a = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{2}{1} = 2 \quad \text{דוגמה:}$$

$$y = 2x + b \quad \text{נציב את (2, 1) ונקבל: } 1 = 2 \cdot 2 + b \quad \text{ולכן } b = -3$$

$$y = 2x - 3 \quad \text{משוואת הישר היא}$$

קטיגוריה IV: תשובה לא נכונה הנובעת מליקויים בחשיבה האלגברית (19%).

דוגמה 1: הנקודה היא (2, 1) ואם נציב נקודה זו במשוואת הישר נקבל: $2 = \frac{1}{2} \cdot 1 + b$

מכאן: $b = 1\frac{1}{2}$ ומשוואת הישר היא $y = \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$

בתשובה זו בולטים שני דברים. הראשון - התלמיד אינו יודע לעבור מהנקודה בגרף אל ייצוגה האלגברי. השני - הוא קובע ששיפוע הישר הוא $\frac{1}{2}$ מבלי לתת לכך הסבר (ייתכן שניחש וייתכן שהעתיק משכך).

$$1 = 2x + b$$

דוגמה 2: משוואת הישר $y = ax + b$

$$1 = 2x + 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

ולכן משוואת הישר היא $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

לתלמיד לא ברורים תפקידי האותיות ולכן אינו מבצע נכון את ההצבות. הוא מציב $a = 2$ במקום $x = 2$. כמו כן הוא מניח מראש ללא כל הסבר כי $b = 0$. מהשוויון $x = \frac{1}{2}$ הוא מקבל

$a = \frac{1}{2}$, ועוד יותר תמוה: $b = \frac{1}{2}$ זאת בסתירה למה שכתב קודם: $a = 2, b = 0$.

דוגמה 3: שיפוע הישר שווה ל-0 כי הישר עובר דרך הראשית.

$$y = ax + b$$

$$1 = 2 + b$$

$$\text{ולכן } b = -1$$

משוואת הישר היא $y = x - 1$

בתחילת התשובה מכריז התלמיד איזו הכרזה שאחר כך אינו מסתמך עליה כלל. הוא זוכר שמשוואה שווה ל-0 כאשר הישר עובר דרך הראשית אבל השחזור שלו מוטעה. בהמשך, כשהוא מציב $x = 2$ הוא מתעלם מ- a (ה- a נשמט). כך הוא מגיע למשוואה: $1 = 2 + b$.

קטיגוריה V: תשובות סתמיות חסרות משמעות וגיבובי מילים (9%).

דוגמאות:

1. משוואת הישר נקבעת לפי הזווית.

2. משוואת הישר היא $y = 2x + 1$.

3. לפי הזווית רואים כי שיפוע הישר הוא 1 ולכן משוואת הישר היא $y - 1 = 1(2 - x)$

$$\text{ולכן: } y - 1 = 2 - x$$

$$y = -x + 3$$

בשתי הדוגמאות האחרונות מנסה התלמיד להשתמש במספרים 2 ו-1. הוא יודע מן הסתם שצריך להשתמש בהם אבל בגלל זכירה משובשת אין ההצבה מובילה לתשובה הנכונה. בדוגמה הראשונה והשלישית מוזכר הקשר בין שיפוע לבין זווית. בראשונה - באופן סתמי ובשלישית - באופן שרירותי שגוי (התלמיד קובע כי "לפי הזווית" השיפוע הוא 1. הוא אינו מפרט וייתכן שמה שהדריך אותו היה איזה זיכרון לא מדויק של שרטוט שבו אכן היה שיפוע הישר 1).

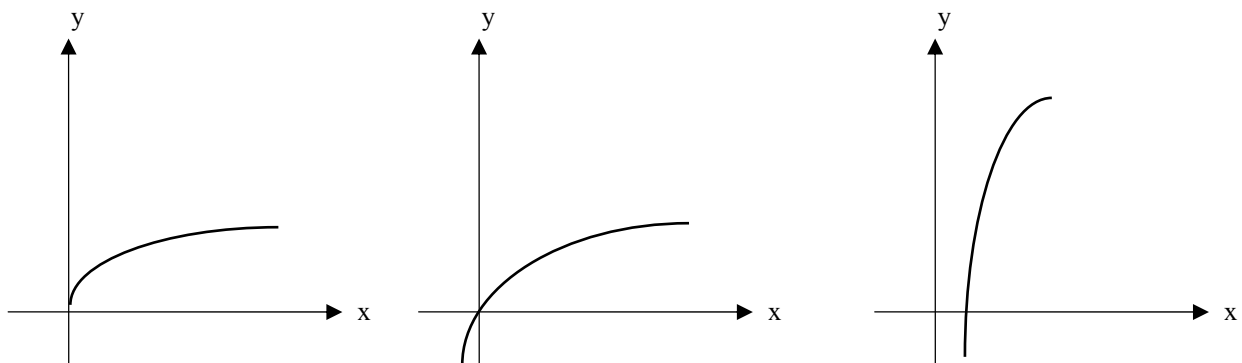
2% מכלל התלמידים לא השיבו על שאלה 1.

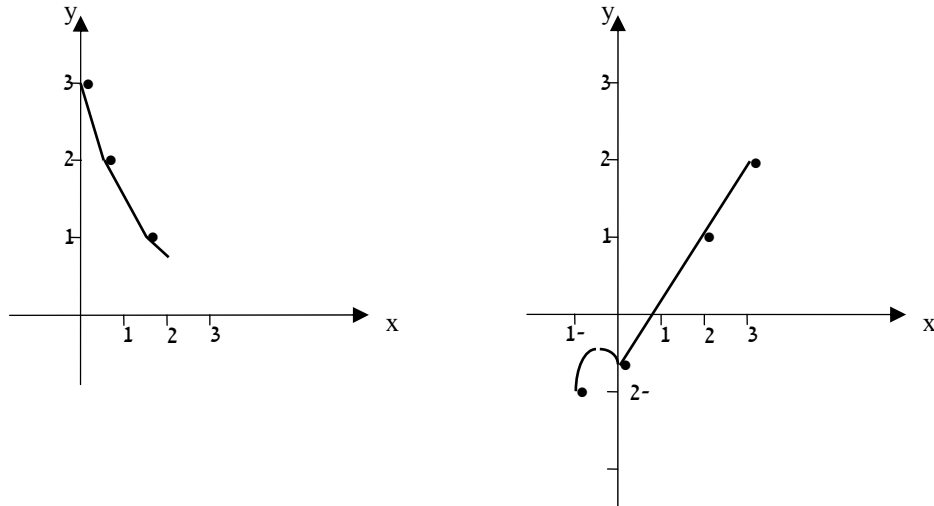
שאלה 2

קטיגוריה I: התלמיד שרטט את הישר של מערכת הצירים בשאלה הראשונה במערכת הצירים של השאלה השניה (69%)
בקטיגוריה זו באו לידי ביטוי שתי אסטרטגיות פתרון. האסטרטגיה הראשונה היתה להסתכל על המשוואה $y = \frac{1}{2}x$ כנתון פתיחה, למצוא שתיים או שלוש מנקודותיו ולהעביר דרכן ישר בעזרת סרגל או בלעדיו. האסטרטגיה השניה היתה להסתכל על המשימה כמשימה של שרטוט מפה. לפנינו צורה במפה ועלינו לשרטט אותה במפה עם קנה מידה אחר. כיוון שלא היה אפשר להבחין בין אלה שהשתמשו באסטרטגיה השניה לבין אלה שהשתמשו באסטרטגיה הראשונה כאשר הם מסתפקים במציאת שתיים מנקודות הישר, כללנו את כל התלמידים בקטיגוריה אחת. אין לנו ספק שהיו תלמידים שהשתמשו באסטרטגיה הראשונה, מכיוון שהיו שרטוטים כאלה אשר בהם סומנו שלוש נקודות על הישר ששרטט. תלמידים אלה לא היו מודעים לאסטרטגיה השניה שמבוססת על חשיבה מתחכמת יותר. הם הפעילו אלגוריתמוס פתרון שאינו מנצל נתונים נוספים המיוחדים לשאלה זו. מאידך גיסא היו כמה תלמידים שקבלו משוואה שגויה בשאלה 1 אבל שרטטו ישר נכון בשאלה 2.
אלה, ללא ספק, השתמשו באסטרטגיה השניה.

קטיגוריה II: תשובות שבהן שורטט ישר השונה מן הישר שבשאלה 1 (23%).
בין תשובות אלה בלטו ישרים שלא עברו דרך ראשית הצירים כי המשוואה שנרשמה בשאלה 1 היתה מוטעית וישרים שעברו דרך ראשית הצירים אבל באופן ברור לא עברו דרך הנקודה (1, 2). את אלה שבחרו באסטרטגיה הראשונה הנזכרת לעיל כדי לענות על השאלה אפשר במקרה זה "להאשים" לא רק בכך שבחרו באסטרטגיה לא מתחכמת אלא בכך שלא שמו לב כי אסטרטגיה זו מביאה אותם לסתירה. התמקדות בפרט טכני מסוים תוך איבוד הקשר עם המסגרת הכוללת אופיינית לצערנו להרבה מקרים בפתרון בעיות מתמטיות וזה מה שקרה לתלמידים ששרטטו ישר שאינו עובר דרך (0, 0) ו-(1, 2) בתשובה לשאלה 2. הדבר בולט עוד יותר בקטיגוריה הבאה.

קטיגוריה III: תשובות שבהן שורטט קו עקום (3%).
בקטיגוריה זו נכללים שרטוטים כמו:





שני השרטוטים האחרונים מעניינים במיוחד.

בימני בנה התלמיד טבלת ערכים: $(0, -1)$, $(-2, -1)$, $(-1, -2)$, $(3, 2)$, $(2, 1)$, $(4, 3)$. זאת טבלה נכונה ביחס למשוואה הנכונה. בגלל סימון מוטעה של נקודות בצד השלילי על ציר ה- x ובצד השלילי על ציר ה- y (בצדדים החיוביים הסימון על הצירים נתון מראש בשאלון) קיבל התלמיד נקודות שאינן על ישר אחד. בשלב זה נשכח ממנו לחלוטין שתשובתו צריכה להיות שרטוט של ישר. לעומת זה מופעלת אצלו הסכימה של העברת קו עקום כאשר כמה מנקודותיו נתונות. זה גם מה שקרה בשרטוט האחרון. התלמיד קיבל משוואה שגויה $y = -x + 3$ (ראה הדוגמה האחרונה בקטיגוריה V, שאלה 1). הוא בנה עבורה טבלת ערכים נכונה: $(-4, 1)$, $(-1, 2)$, $(0, 3)$, אבל טעה בסימון הנקודות במערכת הצירים. שוב, כמו במקרה הקודם, פעלה אצלו סכימת העברת עקום דרך כמה מנקודותיו תוך התעלמות, כנראה לא מודעת, מכך שעליו לקבל ישר ולא עקום. 5% מכלל התלמידים לא ענו על שאלה זו.

שאלה 3

שאלה זו נועדה לבדוק, יחד עם שאלות 4 ו-5, האם התלמיד יודע את ההגדרה האלגברית של מושג השיפוע או שהוא משתמש במשמעות היום-יומית של המילה כדי להגדיר את המושג (רמזים לכך היו בתשובות מסוימות לשאלה 1 קטיגוריה V ובעבודתה של סימה בן דוד שצוטטה לעיל).

קטיגוריה I: שיפוע הישר מוגדר בתור מקדם x במשוואת הישר או בתור $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ כאשר (x_1, y_1)

ו- (x_2, y_2) הן שתי נקודות על הישר (71%). בקטיגוריה זו נכללו גם תלמידים שמשוואת הישר שנתנו היתה שגויה.

השימוש בנוסחה $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ כדי לקבל את שיפוע הישר הוא בהחלט לגיטימי אבל מעיד על כך

שהתלמיד אינו מודע לכך שהחישוב הזה נותן את מקדם ה- x במשוואת הישר. מקדם זה כבר ידוע לו למעשה מכיוון שחישוב משוואה זו בתשובה לשאלה 1. אחוז התלמידים שאינם מודעים לנקודה זו הוא 38. אפשר לראות בתופעה זו את אותו הסוג של חשיבה לא מתוככמת, שאין בה התייחסות לנתונים מיוחדים של המצב, אשר עליו הצבענו בקטיגוריה I של שאלה 2.

קטיגוריה II: שיפוע הישר מוגדר בתור הנגזרת של $y = ax + b$ (2%). למרות שאחוז המשיבים בקטיגוריה זו קטן, החלטנו להקצות לו קטיגוריה נפרדת משום שהוא מאפיין כיוון חשיבה שכית. תכונה הנובעת מההגדרה המקורית של המושג תופסת את מקום ההגדרה המקורית. כך, למשל, טוענים תלמידים בהקשר אחר כי פונקציה עולה היא פונקציה בעלת נגזרת חיובית.

קטיגוריה III: כשל השימוש בנוסחה $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (9%).

הרושם שהתקבל בתשובות אלה הוא שהתלמיד השתמש בנוסחאות משובשות כמו $\frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$

או $\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ וכדומה או נכשל בהצבת הנקודות.

קטיגוריה IV: שיפוע הישר מוגדר בתור המשוואה שלו (6%).

דוגמאות: 1. השיפוע הוא $\frac{1}{2}x$ 2. השיפוע הוא $y - \frac{1}{2}x$

תלמידים אלה זוכרים כנראה ששיפוע המשיק קשור איכשהו למשוואתו אבל אינם יכולים להוציא מתוך המשוואה את החלק הרלוואנטי למושג השיפוע.

קטיגוריה V: תשובות סתמיות שבהן משתמש התלמיד במונח "שיפוע" בצורה חסרת משמעות (6%).

דוגמאות:

1. השיפוע $a = 0$ כי הישר עובר דרך ראשית הצירים (זהו שיבוש של הכלל: כאשר הישר עובר דרך הראשית אז $b = 0$ במשוואה $y = ax + b$).

2. השיפוע הוא $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (כאן מדקלם התלמיד את הגדרת השיפוע כיוון שאינו מבין שעליו

לתת תשובה מספרית על השאלה הספציפית).

5% מהתלמידים לא השיבו כלל על השאלה למרות שכתבו משוואה בשאלה 1.

שאלה 4

הקטיגוריות בשאלה זו היו צריכות להיות זהות באופן עקרוני לאלו שבשאלה 3. זה היה נכון ברוב המקרים, אבל 9% מהתלמידים שהשיבו נכון על שאלה 3 נתנו תשובה שגויה בשאלה 4.

הדבר נבע מכך שתלמידים אלה השתמשו פעם נוספת בנוסחה $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ כדי לקבל את שיפוע

הישר. בפעם הנוספת הם בחרו שתי נקודות על הישר ששרטטו בתשובה לשאלה 2. שתי נקודות אלה לא היו זהות בהכרח לנקודות שהם בחרו בשאלה 3 ובמקרים מסויימים התלמיד גם טעה בקריאת הנקודות. כתוצאה מכך התקבלה תשובה השונה מזו שהתקבלה בשאלה 3. דבר זה לא הפריע לתלמיד משום שהסתירה, כנראה, נעלמה מעיניו. כאן חוזרת התופעה של תשובה הסותרת תשובה קודמת שעליה הצבענו בקטיגוריות II ו-III של שאלה 2.

שאלה 5

מלכתחילה היתה אמורה שאלה זו לחשוף את התלמידים הקושרים את מושג שיפוע הישר עם הזווית שהוא יוצר עם ציר ה- x . בדיעבד, נחשפו כאן כל התלמידים שאינם יודעים כי שיפוע הישר הוא אינווארינטה ("שמורה") ואינו תלוי במערכת הצירים שבה משורטט הישר.

קטיגוריה I: תשובות הטוענות כי השיפועים של שני הישרים שווים ומנמקות היטב טענה זו (65%).

הנימוקים הם מטיפוס:

1. השיפועים שווים למרות שקנה המידה בשתי המערכות שונה.
2. שני השיפועים שווים $\frac{1}{2}$.
3. שני הישרים עוברים דרך אותן הנקודות ולכן השיפועים שווים.
4. לשני הישרים אותה המשוואה: $y = \frac{1}{2}x$.
5. שני השיפועים שווים כי שני השרטוטים מייצגים אותה פונקציה.

קטיגוריה II: תשובות הטוענות כי השיפועים של שני הישרים שווים המתבססות על נימוק מוטעה (5%).

דוגמאות:

1. שני הישרים מקבילים ולכן השיפועים שווים.
2. השיפועים שווים כי שני הישרים לא נחתכים.
3. $a = 0$ בשני הישרים לכן השיפועים שווים.

קטיגוריה III: תשובות בלתי מנומקות הטוענות כי השיפועים של שני הישרים שווים (8%).

קטיגוריה IV: תשובות הטוענות כי השיפועים של שני הישרים שונים זה מזה מנומקות בנימוקים שונים ומשונים או לא מנומקות כלל, וכן תשובות סתמיות (19%).

דוגמאות:

1. השיפוע של הישר הראשון הוא $-\frac{1}{2}$ והשיפוע של הישר השני הוא 2.
2. לא נוכל לקבוע מה התשובה הנכונה כי משוואת הישר לא נתונה.
3. התשובה הראשונה היא הנכונה כי אם השיפועים שווים אז הישרים ניצבים או מתלכדים.
4. התשובה הראשונה נכונה כי קנה המידה שונה.
5. התשובה הראשונה היא הנכונה כי הזווית שונה.

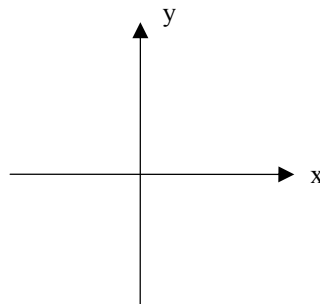
3% מהתלמידים לא השיבו על השאלה. מתמונת הקטיגוריות דלעיל עולה שרק על 65% מהתלמידים אפשר לטעון שמושג השיפוע ברור להם. על עוד 8% (קטיגוריה III) אי אפשר לטעון זאת, אבל גם אי אפשר לטעון את ההיפך. לגבי השאר (קטיגוריות II, IV) ואלה שלא השיבו), שהם 21%, אפשר לטעון שמושג השיפוע אינו ברור להם. רק 3% מהם (קבוצה חלקית של קטיגוריה IV) קשרו את מושג השיפוע לזווית שיוצר הישר עם ציר ה- x . זאת בניגוד להשערות המקורית ואנו נרחיב על כך את הדיבור בסעיף האחרון.

אם נרצה להעריך את הישגי התלמידים בביצוע המטלות בשאלות 1-5, לאור האמור בפסקה האחרונה נצטרך להביא בחשבון כי בין רבע לשליש מהם אינם שולטים במושג בסיסי ביותר. אם היה מדובר במושג מסובך, הרי שהתוצאה של בין רבע לשליש נכשלים היתה יכולה להיחשב להישג. כיוון שמדובר במושג בסיסי ביותר, יש להתייחס לממצא זה בחומרה. אל נשכח כיצד רגשה קהילת העוסקים בהוראת המתמטיקה בארצות הברית בראשית שנות ה-80 בעקבות הממצא ששליש מתלמידי קורס חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי באוניברסיטה מסוימת נכשל בשאלה הפשוטה הידועה כבעיית הסטודנטים והפרופסורים (תרגום למשוואה של ההיגד: על כל 6 סטודנטים באוניברסיטה הפלוגית יש פרופסור אחד. ראה: Rosnick & Clement, 1980).

המעבר מההיבט האלגברי להיבט הגרפי וחוזר חלילה

היכולת לעבור מהיבט אחד של מושג להיבט אחר שלו מאפשרת לפתור בעיות שונות ומגוונות. כמו חמש המטלות הקודמות, כך גם שתי המטלות הבאות, הן מטלות פשוטות ביותר. אפשר להסתכל עליהן כחלק מהאוריינות (literacy) הבסיסית של המושג. מי שאינו מסוגל לבצע אותן, אין לו למעשה שליטה בסיסית במושג ואפשר לומר כי הוא מגלה ☐ צרות (illiteracy) במה שנוגע למושג הנידון. להלן השאלות הבודקות את היכולת לעבור מההיבט האלגברי להיבט הגרפי וחוזר חלילה.

6. במערכת הצירים הבאה שרטט ישר ששיפועו שלילי.



7. נתון כי שיפוע ישר מסוים $y = ax + b$ הוא שלילי.

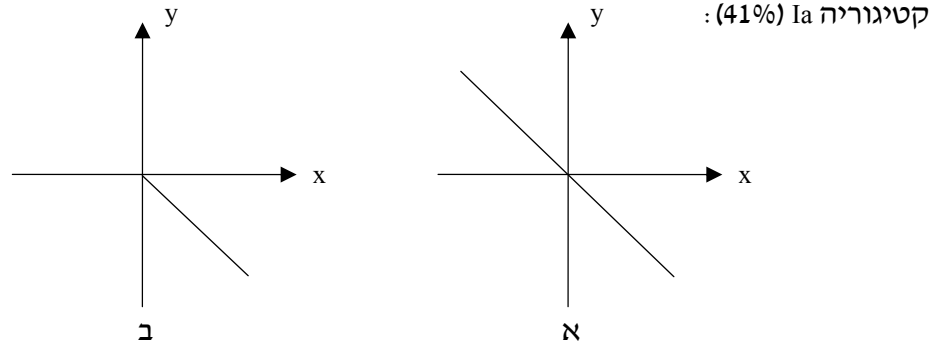
נתון גם שהנקודות $(1, y_1)$ ו- $(3, y_2)$ נמצאות על הישר הזה. מה נכון? (נמק תשובתך)

א. $y_1 < y_2$ ב. $y_1 > y_2$ ג. $y_1 = y_2$ ד. אי אפשר לדעת כי a ו- b אינם נתונים

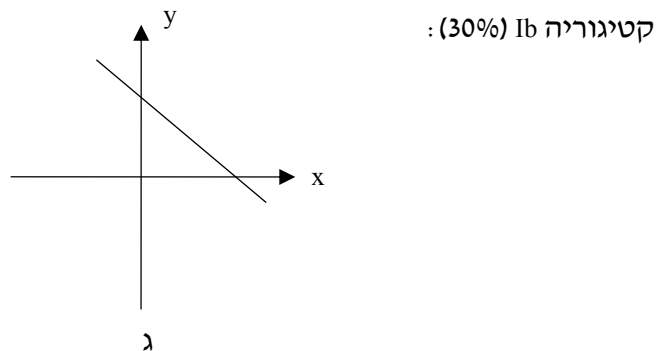
שאלה 6 באה לבדוק אם ברור לתלמיד כי שיפוע שלילי פירושו שהישר הנידון יוצר זווית קהה עם הכיוון החיובי של ציר ה- x . במילים אחרות, היא באה לבדוק אם יש אצל התלמיד אסוציאציה תמונתית למונח "שיפוע שלילי". כדי לענות על שאלה 7, על התלמיד לעבור לתמונה המתאימה למונח "ישר ששיפועו שלילי", להבין שהנקודה $(3, y_2)$ נמצאת מימין לנקודה $(1, y_1)$ ולפיכך היא יותר נמוכה ממנה במערכת הצירים המתאימה. ה- y של נקודה נמוכה קטן יותר מה- y של נקודה גבוהה ולכן $y_1 > y_2$. להלן קטיגוריות התשובות על שאלות 6 ו-7.

שאלה 6

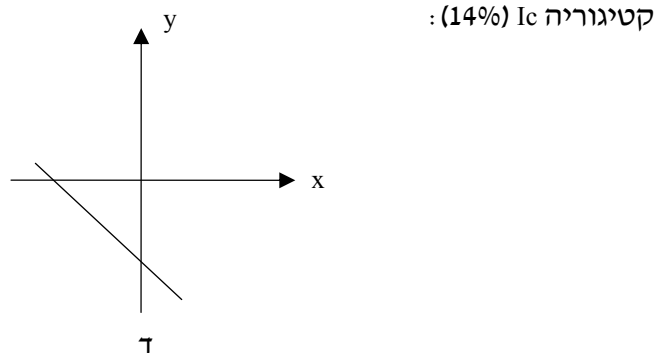
קטיגוריה I: התלמיד שרטט ישר ששיפועו שלילי (84%).
את מכלול השרטוטים בקטיגוריה זו ברצוננו לחלק לקטיגוריות משנה המשקפות תמונות
מנטליות שונות (או פרוטוטיפים שונים) הנלווים למושג השיפוע השלילי.
קטיגוריות המשנה אינן נבדלות זו מזו מבחינת נכונות השרטוט. כל השרטוטים נכונים.
ייתכן שהן נבדלות זו מזו מבחינת עושר התמונה המנטלית או הכלליות שלה (לעומת
צמצומה או המוגבלות שלה).



התמונה האופיינית בקטיגוריה זו היא של ישר העובר דרך ראשית הצירים.
בשרטוט ב משורטטת קרן הנמצאת בתחום ה- y השלילי, מה שמעלה חשד לגבי נכונות
התשובה. יתכן שהתלמיד מייחס לשיפוע השלילי את זה של y שלילי. כיוון שאין לנו אפשרות
לאמת חשד זה נתנו לתלמידים שהציגו שרטוט כזה להנות מהספק.

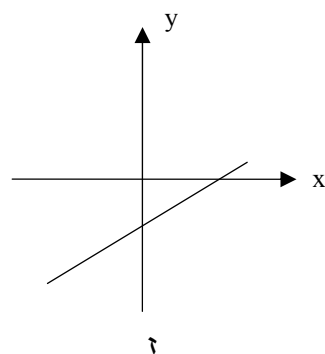
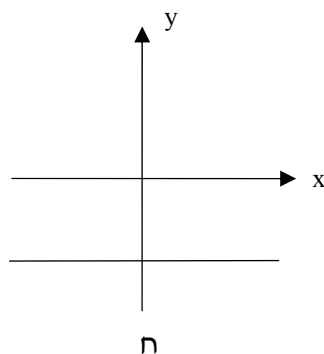
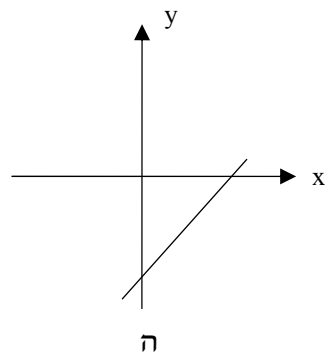
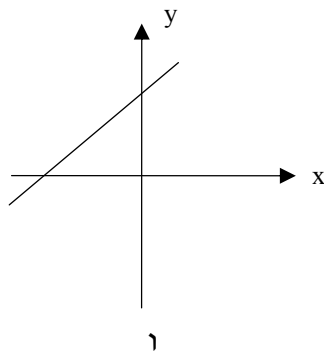


שרטוט זה הוא שרטוט כללי שכן אין בו התנאי המיוחד $b = 0$ במשוואת הישר $y = ax + b$.
עבור $b \neq 0$ יכול התלמיד לבחור בין $b < 0$ לבין $b > 0$. רוב התלמידים בוחר $b > 0$ והעדפה זו
היא בהחלט טבעית לחשיבתנו. "מספר טיפוס", אם אפשר להתבטא כך, הוא מספר חיובי.

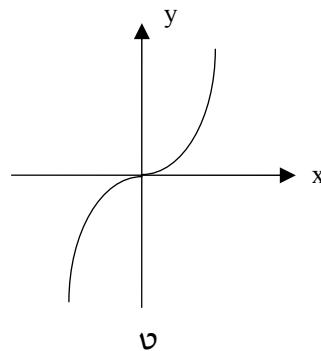


ייתכן שבשרטוטים אלה בא לידי ביטוי ניסיון של התלמיד להראות כי בחשיבתו, $b \neq 0$ אינו
גורר בהכרח $b > 0$, שכן קיימת גם האפשרות $b < 0$. התלמיד מנסה להראות לנו שהוא מודע
לאפשרות זו.

קטיגוריה II: התלמיד שרטט ישר ששיפועו חיובי אבל בשרטוט יש יסודות המתקשרים איכשהו למונח "שלילי" (ה- b שלילי, ה- x שלילי, ה- y שלילי (8%).



קטיגוריה III: התלמיד הציע שרטוט שאין בו שום יסוד הנקשר למונח "שלילי" ולמונח "ישר" (1%).



למרות שיש רק תלמיד אחד בקטיגוריה זו, בחרנו להציג אותה בנפרד ולא להבליע אותה בקטיגוריה אחרת. כאן מיוצגת התנהגות, שלצערנו הרב היא אופיינית למצבים מסוימים. לתלמיד אין שמץ של מושג מה התשובה אבל הוא מעדיף להשיב בניחוש פראי. ישנו סיכוי מסוים שיצליח והוא אינו מפסיד כלום בכך שהוא נותן תשובה מגוחכת. ההופעה של העקום שבשרטוט מקורה אולי בגרפים שראה התלמיד בתקופה שקדמה לשעה שבה הוא השיב על השאלון. 7% של התלמידים לא השיבו כלל על השאלה.

שאלה 7

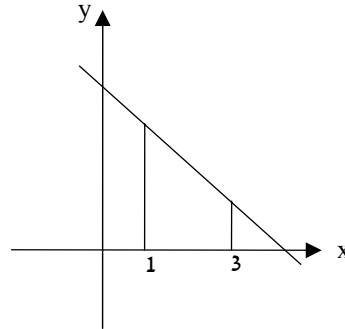
קטיגוריה I: התלמיד בחר באפשרות הנכונה $y_1 > y_2$ ונימק נכון את בחירתו (37%)

דוגמאות לנימוקים:

1. $a < 0$ פירושו ככל ש- x גדל y קטן.

2. הפונקציה יורדת.

3. לפי השרטוט:



כשניתחנו את המשימה שמציגה שאלה 7, אמרנו כי על התלמיד לעבור מההיבט האלגברי להיבט הגרפי וחזרה. הדבר בולט בנימוק 3 אבל אינו בולט בנימוקים 1, 2. אנחנו משערים, כי הטענות על הפונקציה היורדת או על כך שכש- x גדל y קטן קשורות באופן לא מפורש לתמונות מנטליות מתאימות, כך שאכן נעשה מעבר מההיבט האלגברי להיבט הגרפי וחזרה.

קטיגוריה II: התלמיד בחר באפשרות הנכונה $y_1 > y_2$ אבל לא נימק (9%).

קטיגוריה III: התלמיד בוחר באפשרות לא נכונה (עם או בלי נימוק) או באפשרות הנכונה עם נימוק חסר שחר (51%).

ובפירוט:

א. $y_1 < y_2$ (13%)

1. הנקודה $(3, y_2)$ תמיד יותר גדולה מהנקודה $(1, y_1)$ מפני שזה שיפוע שלילי וככל שמתקרבים ל-0 אז הנקודה קטנה.

2. השיפוע הוא $\frac{3-1}{y_2-y_1}$ ולכן $y_2 > y_1$.

ב. $y_1 > y_2$ (6%)

1. $y_1 > y_2$ כי השיפועים שונים. השיפוע של הנקודה $(1, y_1)$ גדול יותר מהשיפוע של הנקודה $(3, y_2)$.

ג. $y_1 = y_2$ (2%)

1. לפי דעתי $y_1 = y_2$ מפני ששניהם נעלמים ויכול להיות שהם שווים.

ד. אי אפשר לדעת, כי a ו- b אינם נתונים. (20%)

1. התשובה הנכונה היא תשובה ד, כי שתי הנקודות לא נתונות.

2. התשובה הנכונה היא ד, כי הנקודות האלה לא חותכות את שיפוע הישר.

3. כדי למצוא שיפוע של ישר אנו צריכים לדעת כמה שווה a וכמה שווה b וכך היינו מציבים את ה- x שיש לנו. היינו מוצאים את y_1 ו- y_2 . אחרי שנמצא נוכל לדעת את היחס ביניהם.

3% של התלמידים לא השיבו על שאלה זו. תשובות רבות בקטיגוריה III מדגימות התנהגות מושגית לכאורה אשר עליה דובר בהרחבה במדור זה בעל"ה 13.

התמונה המצטיירת בסיכום סעיף זה היא ש- 51% עד 60% מן התלמידים אינם מסוגלים לבצע משימה הדורשת חשיבה מורכבת פשוטה. בצירוף "מורכבת פשוטה" אנחנו מתכוונים לכך שהחשיבה דורשת התייחסות למושגים נוספים שאינם נזכרים באופן מפורש בשאלה. אם יסוד זה אינו מופיע בחשיבה הרי מדובר בחשיבה ברמה נמוכה ביותר. כללית, משימה בהבנת הנקרא שאינה דורשת התייחסות לנושאים שאינם נזכרים במפורש בטקסט היא משימה טריוויאלית. כל זה נאמר לגבי המילה "מורכבת". אשר למילה "פשוטה", כוונתנו היא שהאסוציאציות הנדרשות לביצוע המשימה הן מידיות. לא נדרשת כל תחבולה מחוכמת: לאחר שהופיעו האסוציאציות הנדרשות, אין שום מהלך מסובך בדרך לתשובה הסופית. מדובר למעשה בצעד חשיבה יחיד שאמור להביא את התלמיד אל התשובה. ובכן, לצערנו, עוד דוגמה המעידה על דלות החשיבה המתמטית של חלק גדול מהתלמידים שבשבים לימודי המתמטיקה הם פתרון שאלות סטריאוטיפיות מתוך מאגרים קנוניים ששיאם הוא מאגר השאלות של בחינות הבגרות. אם נשווה את האמור כאן למה שאמרנו בסוף סעיף 2, אנו רואים כי מספר הנכשלים כמעט נכפל כאשר אנחנו מציגים לתלמידים מטלה קצת יותר מורכבת, אם כי עדיין פשוטה. גם במחקר שהזכרנו בסוף הסעיף ההוא (Rosnick & Clement, 1980) התברר כי כאשר עוברים למטלה קצת יותר מורכבת (לבנות משוואה להיגד: "על כל 2 עוגות גבינה נמכרות במגדנייה מסוימת 5 עוגות תפוחים"), נכפל מספר הנכשלים. כשצינו בסעיף הראשון את הרכב האוכלוסיה במדגם שלנו, עשינו זאת למען שלמות המידע. לא התכוונו לערוך השוואות בין תתי-האוכלוסיות השונות. אחת ההשערות הסבירות בעינינו לגבי הבדלים בין תלמידי 5 יחידות ו- 3 יחידות היתה שכשמדובר במשימות פשוטות מהסוג שהופיע בשאלון שלנו, ניתקל ב"אפקט הרצפה", דהיינו המשימות הן פשוטות עד כדי כך שלא ימצא הבדל בין תלמידי 3 יחידות ו- 5 יחידות, כשם שאין לצפות להבדלים במטלות של הבנת טקסט פשוט בין תלמיד חלש לתלמיד חזק. למעשה, מדובר כאן ביכולת לקרוא. גם בנקודה זו טפחה המציאות על פנינו. היו הבדלים בין תלמידי 5 יחידות לתלמידי 3 יחידות והבדלים אלה היו מובהקים בחלק מהמקרים ברמה של 0.01 או 0.02.

4. הדילמה

הזכרנו בסעיף 1, כי שיערנו שאחוז לא מבוטל של התלמידים יקשר באופן זה או אחר (מוטעה או נכון) את מושג השיפוע של ישר אל הזווית שיוצר הישר עם הכיוון החיובי של ציר ה- x. התברר, כי רק אחוז מבוטל של תלמידים (3%) עשה זאת ובאופן מוטעה. ההשערה שלנו התבססה על נתונים שהיו לנו לגבי מושגים אחרים (ראה: Davis & Vinner, 1986), וכן על עבודתה של סימה בן דוד, (1986). כשניסינו לברר את הסיבות לכך שהשערנו התבדתה, עלו שני הסברים המשלימים זה את זה. התברר, כי הכיתה שעליה נעשו התצפיות בעבודתה של סימה בן דוד (כיתה י מסוימת) למדה בחטיבת ביניים באותו בית ספר מקצוע שנקרא "שרטוט טכני". במסגרת לימודים זו דובר רבות על שיפוע הישר בהקשר של הזווית שהוא יוצר עם הכיוון האופקי. השרטוט הטכני לא נעשה במסגרת מושגים של מערכת צירים, כך שלא הודגשה ההגדרה האלגברית של שיפוע ישר. באופן טבעי קלט חלק מהתלמידים את התמונה הנלווית למילה "שיפוע" ותמונה זו הפכה להיות דומיננטית בקביעת משמעות המונח "שיפוע ישר" גם בהקשר האלגברי. מאידך גיסא, לתלמידים במדגם שלנו הוצג שיפוע הישר באמצעות הגדרה פורמלית. לא מחברי הספר, וכנראה שגם לא המורים, טרחו להסביר לתלמידים את הקשר בין ההגדרה הפורמלית למשמעות המילה "שיפוע". התלמידים, שגישת חלק מהם היא "ראש קטן", גם הם לא טרחו לקשר בין ההגדרה הפורמלית למשמעות היום-יומית של המילה. עקב כך, נוצר נתק בין ההקשר המתמטי של שיפוע ישר להקשר היום-יומי של המונח. נתק זה אינו מפריע לתפקוד התלמיד בלימודי המתמטיקה שלו, אבל מונע הפנמה של המושגים המתמטיים ויוצר ניכור כלפיהם. מצד שני, הוא גם מונע תפיסות מוטעות הנוצרות כאשר התלמיד מנסה לקשר בין המונח הטכני לבין המשמעות היום-יומית. מצב זה מציג דילמה למורה: האם לטרוח ולקשר בין המונח הטכני לבין המשמעות היום-יומית האינטואיטיבית ואז להסתכן בהיווצרותן של תפיסות מוטעות,

"הוראת המתמטיקה - מחשבות ותופעות מיומנו של מורה חוקר", שלמה וינר

על"ה 14, ניסן תשנ"ד, מרץ 1994
האוניברסיטה העברית ירושלים

או לא להעלות כלל את הנושא (בבחינת "מה תעירו ומה תעוררו את האהבה עד שתחפץ", שיר השירים ח4). כשאין מעלים את הנושא, נמנעים אמנם מתפיסות מוטעות אבל יוצרים תנאים לניכור מסוים בין התלמיד ובין המושג המתמטי. כמו בכל דילמה רצינית, קשה להמליץ כיצד לנהוג. ההחלטה תלויה מן הסתם במורה, בתלמיד ובהקשר המיוחד שבו מתרחשים הדברים.

רשימת ספרות

- בן דוד, סימה (1986), **תוכנית הלימודים החדשה במתמטיקה בכיתות י, 3 ו-4 יחידות לימוד - תיאור תהליך**, עבודת מסטר, האוניברסיטה העברית, החוג להוראת המדעים.
- Davis R. and Vinner, S. (1986). The notion of limit - some seemingly unavoidable developmental stages, *Journal of Mathematical Behavior* 5(3), 281-303.
- Rosnick P. and Clement, J. (1980). Learning without understanding: the effect of tutoring strategies on Algebra misconceptions, *Journal of Mathematical Behavior* 3, 3-27.