

**הנושא: על חשיבה מתמטית, מחקר מתמטי ופיתוח תכניות לימודים - שיחה עם פרופ' שמשון א. עמיצור ז"ל**

שוחחה וערכה: אנה ספרד.

תקציר: בשיחה מתייחס פרופ' עמיצור ז"ל להיבטים שונים של הוראת המתמטיקה: למטרות העומדות לפנינו בתחום החינוך המתמטי, לאינטואיציה, להוראת תהליכים לעומת הוראת מושגים, למחקר בחינוך מתמטי וליחסי הגומלין בין מחקר בחינוך מתמטי לבין פיתוח תכניות לימודים.

מילות מפתח: חינוך מתמטי, מחקר בחינוך מתמטי, אינטואיציה, פיתוח תכניות לימודים, חשיבה לוגית.

החומר פורסם במסגרת: עלי"ה 15, תשרי תשנ"ה, ספטמבר 1994, עמודים 7-12.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 7 עמודים.

## על חשיבה מתמטית, מחקר מתמטי ופיתוח תכניות לימודים - שיחה עם פרופ' שמשון א. עמיצור ז"ל

פרופסור עמיצור היה מתמטיקאי מן השורה הראשונה, הידוע בעולם בזכות תרומותיו הרבות לתחום האלגברה. הישגיו זיכו אותו בפרסים ובתוארי כבוד, וביניהם פרס ישראל (הראשון, בשנת 1953) ופרס רוטשילד (1969). גם לאחר פרישתו לגמלאות, המשיך פרופסור עמיצור בפעילותו המחקרית.

לציבור המורים בארץ ידוע פרופסור עמיצור כאחת הדמויות המרכזיות בתחום פיתוח תכניות לימודים במתמטיקה. בשנות השישים המוקדמות הוא היה בין יוזמי הרפורמה שהובילה תחילה ל"תכנית הניסוי", לאחר מכן ל"תכנית החדשה", ולבסוף ל"תכנית המאוחדת" הקורמת עור וגידים בימים אלה. בשיחה דלהלן הוא מתייחס לשאלות העשויות לעניין את כל העוסקים בחינוך מתמטי: מורים, חוקרים ומפתחי תכניות לימודים.

### על חשיבה מתמטית ועל למידת מתמטיקה

**שאלה:** מה הן, לדעתך, המטרות העיקריות העומדות לפנינו בתחום החינוך המתמטי?

**תשובה:** כדי להשיב על השאלה, יש לתת איפיון מדויק לתוצר שרוצים לקבל. בשיעורי המתמטיקה אנו מלמדים שני דברים: עובדות וחשיבה (לוגית). צריך לבדוק כיצד משיגים את שתי המטרות האלה. לא בטוח, שאפשר להשיגן בפעולה אחת. עובדות מלמדים בדרך אחת וחשיבה מקנים בדרך אחרת ונוסף לכך, ללא כל ספק, דרכים שונות מתאימות לאוכלוסיות שונות: לתלמיד אחד לימוד עובדות עשוי להיות דבר קל למרות שהחשיבה הלוגית קשה לו, ואילו לתלמיד אחר התמונה עשויה להיות בדיוק הפוכה.

**שאלה:** ושתי היכולות האלה אפשר להפרידן, לדעתך?

**תשובה:** הפרדה מוחלטת לא תיתכן. נראה לי, שאנחנו מדברים על מעין שתי עקומות נורמליות המכסות בחלקן זו את זו, וליתר דיוק - עקומה אחת עם שתי פסגות. יש אדם היודע לעשות חשבונות אריתמטיים בקלות יחסית, אבל כשהוא מגיע לפתרון בעיה במתמטיקה ונדרש לקצת חשיבה לוגית, הוא נתקל בקשיים. אך יש גם מטרה שלישית - שהיא משנית במובן מסוים, וזוהי יכולת תרגום בעיה למתמטיקה ולהיפך. אין לערבב בין יכולת זו לבין יכולת חשיבה. החשיבה הדדוקטיבית באה לידי ביטוי כשאנו נדרשים להוכיח דבר כלשהו בעוד שעניין התרגום הוא כעין בעין לשונית ואנשים שונים נבדלים בכישורים הלשוניים שלהם.

**שאלה:** ומעבר לכל אלה יש גם יכולת ראיית מבנים מופשטים זהים - בתוך תופעות שונות לגמרי וגם יכולת זו קשה להשגה.

**תשובה:** יכולת זו נדרשת רק בשלב הבא, אחרי המודל. זוהי אולי היכולת הרביעית, שנרכשת מאוחר יותר.

**שאלה:** הסכמת, שיש תלמידים המסוגלים לעשות כל שמוטל עליהם במתמטיקה אבל בעצם אין להם הבנה מתמטית מעמיקה. והראיה: הם נתקעים כאשר מקבלים שאלה לא סטנדרטית.

**תשובה:** יש כאן להבדיל בין מספר דברים הכלולים במונח "הבנה מתמטית". אנחנו מערבבים לעתים את הידע, את המיומנות בתרגום ואת יכולת החשיבה הלוגית. לתלמידים שדיברת עליהם יש הבנה של עובדות מתמטיות, אך ייתכן שהם חלשים בתרגום או בהסקת מסקנות. תלמידים כאלה יכולים, למשל, להיות טובים מאוד בחשבון דיפרנציאלי, אך אם הם חלשים בתרגום, הם יהיו פחות טובים, למשל, בסטטיסטיקה, ואם אין להם דמיון חזותי הם עלולים להיות גרועים בגיאומטריה. אנחנו מכירים מתמטיקאים דגולים שלא תיפקדו כגאונים כשהגיעו להוכחות משפטים בגיאומטריה.

**שאלה:** למה בדיוק אתה מתכוון כשאתה אומר "חשיבה לוגית"? יכולת ביצוע תהליכים דדוקטיביים?

**תשובה:** כן, שליטה בתהליך הדדוקציה. יש להתייחס גם לגורם חשוב נוסף והוא האינטואיציה. יכולת העברת רעיונות ממקום למקום. לאדם שיש לו חשיבה לוגית מפותחת אך אין לו אינטואיציה אין סיכויים רבים להצליח במתמטיקה, כי הוא לא ידע לאן ללכת והוא לא יודע במה לבחור כשיש לו הרבה מסלולי הליכה אפשריים.

**שאלה:** ומאין באה האינטואיציה הזאת?

**תשובה:** הוי, הלוואי שהייתי יודע.

**שאלה:** ובכל זאת, זה כל העניין. אני מניחה שלא היית מתמטיקאי לולא הייתה לך אינטואיציה.

**תשובה:** אני חושב שיש לי אינטואיציה בתחומים מסוימים ואין לי אינטואיציה בתחומים אחרים.

**שאלה:** מה התחומים שלך?

**תשובה:** התחום שלי הוא אלגברה. יש לי דוגמה טובה מאוד. עשיתי עבודה באנליזה. אחר כך מתמטיקאי מעולה שעוסק בתורת המספרים לקח אותן נוסחאות והצליח בקלות יחסית לפתור בעיות שאני עבדתי עליהן זמן רב ללא הצלחה. הייתה לו אינטואיציה שפעלה בכיוון אחר מזו שלי. נושא זה - של האינטואיציה על סוגיה השונים - הוא אולי אחד הנושאים המתאימים למחקר בחינוך מתמטי. מעניין לבדוק אם אומנם יש גוונים שונים לאינטואיציות שלנו.

**שאלה:** האינטואיציה מתבטאה ביכולת ראיית עובדות, מבנים והתנהגויות של מושגים "מראש", בלי לדעת כיצד אפשר להוכיח את קיומם. בוודאי יש לך אינטואיציה מאין זו - אינטואיציה שמובילה אותך לדעת בביטחון דברים, שלא ברור מאין הם באו.

**תשובה:** נכון, בהחלט יש דבר כזה, אבל זה לא תמיד נכון, ויש הרבה הפתעות שליליות.

**שאלה:** זה ברור. אך אין זה אפשרי בכלל שאתה יודע דבר שמעולם לא ראית?

**תשובה:** אני חושב שהאינטואיציה תלויה במידה מסוימת גם בהתנסות, בניסיון ... זאת אומרת, שעם השנים הניסיון עוזר לפתח אינטואיציה. ואשר לאנשים צעירים, ללא ניסיון רב (ואף לי עצמי בגיל צעיר), גם שם קיימת תופעת האינטואיציה, אבל לא ברור לי מאין בא כשרון זה.

**שאלה:** נעבור ללמידת מתמטיקה. אנו נוהגים להבחין כאן בין למידת תהליכים לבין למידת מושגים. זו הפרדה גסה מאוד, אך היא שימושית, לצרכים מסוימים. האם לדעתך יש איזה שהוא סדר שבו רצוי להקנות לתלמידים יכולות אלה? יש הטוענים שצריך לתת זכות קדימה ללמידת מושגים ורק לאחר מכן - רק לאחר שהתלמיד הבין את הרעיונות הבסיסיים - הוא ייחשף לטכניקות; שהרי טכניקה היא דבר משני, הנגזר מהמושגים.

**תשובה:** אני יכול להעריך שאני מבין מושג שלמדתי, אבל אך ורק תוך כדי פעילויות איתו אני מוצא את כל המוקשים והעידונים שיש בו, ורק תוך העשייה הוא מתבהר לחלוטין. למשל, תלמיד הלומד מהו גובה במשולש והוא חש שההגדרה ברורה לו. ואז פתאום נתקל במשולש קהה זווית ומתברר לו שהגובה הוא דבר אחר ממה שחשב. אין זה עניין של חוסר הבנה, זו שאלה של ניסיון במקרה הזה. נדמה לי שמוטב להניח לניסיון לעשות את שלו ולהביא לידי הבנת המושג. אין לחשוב שרק הצורה המילולית של ההגדרה תוכל לתת את זה.

## על מחקר בחינוך מתמטי

**שאלה:** נעבור אל נושא אחר: המחקר בחינוך מתמטי. מתי נחשפת לראשונה לנושא זה?

**תשובה:** בתחילת שנות השישים.

**שאלה:** ומה גרם לך להיכנס לתחום זה?

**תשובה:** השתתפתי בתכנית (של פרופ' פרנקל המנוח) של בקורי מורי אוניברסיטאות בכתות בבתי הספר התיכוניים. במסגרת זו נתקלתי בבעיות של תכניות לימודים מסורתיות ובפער שביניהן לבין המתמטיקה כפי שנראתה לי. החלטתי לנסות להכניס שינויים בתכניות לימודים ובשיתוף עם המפקח דאז מרכוס נפגשתי עם מורים רבים. כשאתה פוגש מורים שונים אתה נתקל בדרכי חשיבה שונות, ובתפיסות שונות של מושגים, ואתה מתחיל להעריך את החשיבות של חקירת העמדות הללו.

**שאלה:** האם הן שונות מאלה של מתמטיקאים?

**תשובה:** לא. יש הבדלים בין המורים לבין עצמם. אצל מורים תמצא מגוון שלם של דרכי חשיבה ותפיסות מושגים, כך גם אצל המתמטיקאים עצמם. רציתי להבין יותר בנושא זה כדי לדעת איך לפנות לכל אחד. למעשה, אפשר להניח שהתלמיד הוא בבואה של מערך המורים הגבוה יותר. לכן,

אם נדע יותר על דרכי החשיבה של מורים, נדע יותר גם על התלמידים. בתקופה זו ישבתי גם לשמוע הרצאות של פסיכולוגים על הלמידה. מהרצאות אלה יצאתי מאוּכָּזב מפני שדיברו שם גבוהה גבוהה על סוגי מושגים, על דרכי חשיבה, על עקרונות החשיבה, אבל לא הסבירו מה עושים עם זה, כיצד ליישם את התיאוריה למעשה.

הטענה שיש סוגים שונים של חשיבה היא, כמובן, עניין של הרגשה והרגשה זו קיימת גם בין המתמטיקאים. אנחנו יודעים שיש כאלה בעלי חשיבה גיאומטרית מבריקה ויש כאלה בעלי יכולת אנליטית יוצאת מן הכלל ואף כאלה בעלי חשיבה לוגית פעילה. אלה ואלה לא תמיד שומעים אחד את השני ואינם מתקשרים בקלות. למעשה בכל מתמטיקאי יש כל הכשרונות הללו אך במשקלות שונים. באותה תקופה, נוסף לניסויים בתכניות לימוד אלטרנטיביות במתמטיקה, היה לנו הרעיון לנסות למצוא את העקרונות להבחנות השונות ולהעביר אותם למורים, כדי לעזור להם להבין את המצבים השונים שהם עשויים לעמוד בפניהם בכיתה. רצינו לעזור להם לראות שיש תלמידים כאלה ותלמידים אחרים ורצינו להתאים את ההוראה ליכולות של התלמיד.

**שאלה:** אמרת, שהייתה זו ההתעסקות שלך עם תכנית לימודים אשר הביאה אותך להתעניין במחקר. האם היית מעורב במחקר עצמו?

**תשובה:** לא, לא הייתי מעורב. בסך הכל ניתחתי את התגובות של מורים שאיתם דיברתי. היו אלה מורים טובים, מורים שהתנדבו ללמד לפי שיטה חדשה ותכנית חדשה. הם הציגו לפנינו את הבעיות העומדות לפניהם בכיתה.

**שאלה:** כלומר, שוחחתם ביוזמתם?

**תשובה:** כן, הם היו היוזמים. הם הגיבו על החומרים שפיתחנו: אם זה מתאים או לא מתאים, מה טוב ומה חלש בכיתות השונות.

**שאלה:** האם התכוונת להפוך את זה למעין מחקר זוטא על המורים?

**תשובה:** לא, לא התכוונתי לשום מחקר, התכוונתי לנסות לעורר עמדות חיוביות כלפי תכניות לימודים. מתמטיקאים חושבים שאפשר לשנות פרק מסוים או לשנות טכניקה של הוראה, אך השאלה היא איך נראה הדבר בעיני המורים העובדים גם תחת אילוצים אחרים (למשל, חברתיים). ניסינו ליישם את הרעיונות שלנו והגענו למסקנה שאכן אפשר לשנות. תחילה ניסינו עם תלמידים טובים. כפי שאמרתי לך פעם, הבטחתי לעצמי שהתלמידים לא יפסידו מניסיונות שאולי לא יצליחו, ובתמיכת משרד החינוך אירגנו את הבחינות של התלמידים שהשתתפו בניסוי לפי החומר שהם למדו ולפי הרמה שהגיעו אליה. ערכנו פגישות שבועיות עם המורים, וקיבלנו מהם תגובות מאוד מעניינות. היו מורים שבאמת הרגישו היטב את המערכת והבעיות שלה. אבל אנחנו קבענו נושאי לימוד, חומר ההוראה. חלק מהמורים הסתייגו מגישתנו וגם נתנו להם אפשרות להתווכח. היו וויכוחים קשים, היו אפילו צעקות בישיבות האלה... , ובסופו של דבר הגענו לפשרות, אך לפעמים, גם לכפיה על המורים לצורך ניסוי.

**שאלה:** אתם תיעדתם בצורה כלשהי את הישיבות?

**תשובה:** לא, לא תיעדנו ואני מצטער על כך היום. לא תיעדנו וגם לא חשבנו על הצורך בתיעוד.

**שאלה:** אתה קורא מאמרים המציגים מחקר בתחום החינוך המתמטי?

**תשובה:** אם מכריחים אותי. בתחילה, ניסיתי לקרוא כל מיני מאמרים ומצאתי רק זוטות: איך להוכיח בדרך פשוטה את הדבר הזה, ראיות שאפשר ללמד בבית הספר נושא מסוים... זה לא עניין אותי במיוחד. אלה היו פרטים קטנים. המערכת הכללית היא שעניינה אותי וזאת לא מצאתי. אבל קראתי. באותה תקופה קראתי די הרבה.

**שאלה:** התקופה הזאת, אלה שנות השבעים בערך?

**תשובה:** כן, משהו כזה.

**שאלה:** מאז חל שינוי במחקר החינוכי. אילו עכשיו היית מסתכל במה שקורה, לא היית מכיר את התחום. אינני אומרת שזה היה יותר לטעמך, אבל זה שונה.

**תשובה:** הנה, לפני כשנה וחצי שמעתי הרצאות בכינוס הבינלאומי שהתקיים בירושלים.

**שאלה:** הכינוס התמקד בהוראת מדעים יותר מאשר בהוראת מתמטיקה.

**תשובה:** נכון. לפעמים נדמה היה לי שהמרצים איבדו את הנקודה המרכזית, החשובה ביותר. מישו גילה תופעה, אך במקום לבדוק מה מקורותיה הוא מנסה למצוא טכניקות לתיקון המצב. ייתכן שהתופעה הזאת טבעית ולא צריך לתקן אותה, אלא יש לנצל אותה. קיימת גם שאלה של שיטות. יש לי ספקות בקשר לשימוש בסטטיסטיקות ובראיונות עם תלמידים. לבסוף, יש נקודה אחת קשה וחשובה מאוד במערכת המחקר החינוכי. התלמידים אינם חומר נסיוני שאת יכולה להשתמש בו ולזרוק אותו אחר כך. המתמטיקה שהם לומדים במסגרת הניסוי היא בשבילם המתמטיקה היחידה. דבר זה מגביל מאוד את תהליך המחקר. לכן בניסויים שלנו דאגנו להבטיח שהתלמידים לא יפסידו בגלל הניסויים.

**שאלה:** זה כמו הניסויים ברפואה.

**תשובה:** נכון, בדיוק כמו הניסויים ברפואה, אלא שברפואה אפשר עדיין להשתמש בבעלי חיים במקום בבני אנוש. פה אנשים הם החומר שיש לפגוע, וזה מחייב לפתח שיטות כאלה שלא תשפיענה על חייהם.

**שאלה:** לא לרעה, מכל מקום.

**תשובה:** אסור גם להניח שיש השפעה לטובה. זהו עקרון יסודי, שכן אם את מניחה שיש השפעה לטובה, אז המחקר שלך הוא מגמתי.

**שאלה:** קיים מחקר "נקי", חופשי לגמרי ממגמתיות כלשהי, חוץ מאשר במתמטיקה?

**תשובה:** בוודאי שיש מחקרים שאינם מגמתיים.

**שאלה:** אנשים תמיד באים עם הנחות מסוימות.

**תשובה:** זו אינה מגמתיות. מחקר טוב אינו מגמתי. אני מכיר מחקרים מגמתיים, פוליטיקאים מנצלים מחקרים כאלה כל הזמן. כשכתבנו את התכנית שלנו, רצינו להגיע למטרה מסוימת, לכן אפשר לומר שכתבנו במגמה מסוימת. השאלה היא איך לנתח את התוצאות, ואם נהיה מגמתיים בניתוח או לא. בדרך כלל אנחנו אכן מגמתיים, במידה מסוימת. אם מורה לא הצליח בהוראת חומר חדש, אנחנו אומרים, לעתים, שהמורה לא היה מוכן להכניס את השינויים כי הוא בעצמו מגמתי. אלה קשיים שצריך להתגבר עליהם, וצריך לדעת איך ...

**שאלה:** ומה בדבר מטרות המחקר בחינוך מתמטי? יש לו תפקיד מוגדר היטב, לדעתך?

**תשובה:** ראשית, יש מטרות תיאורטיות. למשל, אנו יכולים להתעניין בשאלה אם אנשים שונים נבדלים ביניהם בתהליכי חשיבה, או מה יחסי הגודל בין קבוצת האנשים המעדיפים לעבור מפרט לכלל לבין קבוצת אלה המעדיפים את המעבר ההפוך בלימודי המתמטיקה. אלה מטרות תיאורטיות: להכיר מצבים, להכיר חוקים של חשיבה. אבל יש גם מטרות יישומיות. תפקידו של מחקר הוא, למשל, לעזור לי לענות על השאלה, כיצד להכין מורים למצבים שיצטרכו לעמוד בפניהם כאשר יישמו רעיונות חדשים. המחקר אמור לתת לי מידע שיאפשר להזהיר את המורים בפני כל מיני בעיות העשויות להיווצר בכיתה, בעיות שצצות לא משום שהתלמיד אינו מגלה הבנה, אלא מפני שהוא חושב אחרת.

**שאלה:** אם כך, ברור לי שאתה מחייב מחקר.

**תשובה:** אני לא מחייב מחקר המנסה למצוא תשובה לשאלה איך ללמד נושא נתון, או האם זהו חומר שאפשר ללמדו או אי אפשר ללמדו.

**שאלה:** אבל זה עתה הדגשת שיש מקום למחקר. נראה לי שהמחקר, בעיניך, אמור להיות מכוון בעיקר אל מורים. האם אני טועה?

**תשובה:** כן, אל מורים, אך גם למתכנני תכניות לימוד. לפי תוצאות המחקר הם יתכננו תכניות לימוד. אבל לא רק תוצאות מחקר, שכן מפתחי תכניות מושפעים גם ממטרות אחרות. למעשה, המחקר מציג את האילוצים שעליהם לקחת בחשבון בבואם להשיג מטרות מסוימות. אני קיצוני, אני שואף לתכניות לימודים לפי תהליך מסוים, ותפקידו היחיד של המחקר הוא לומר לי באיזה מידה אני יכול להשיג את אשר קבעתי לעצמי, או באיזה מכשירים עלי להשתמש כדי להשיג את המטרות שלי. המחקר לא יכתיב לי את התכנים. אני לא רוצה לוותר על נושאים משום שהמחקר אומר לי שניסו ללמד אותם והתלמידים לא הבינו.

## על יחסי גומלין בין מחקר בחינוך מתמטי לבין פיתוח תכניות לימודים

**שאלה:** זה מביא אותי לשאלה של קריטריונים לקביעת תכנית לימודים במתמטיקה. לפי מה אתה מחליט מה ללמד ומה לא?

**תשובה:** זו בעיה די סבוכה. לבעיה שני היבטים: ההיבט של הידע שרוצים להקנות וההיבט של יכולת החשיבה שרוצים לפתח. על מרכיב הידע העובדתי אני יכול להתווכח ולהגיד שאני רוצה נושא זה ואני לא רוצה נושא אחר. המרכיב השני הוא פחות גלוי לעיין, אך ידוע כבר הרבה זמן: לחלק מהתלמידים, מתמטיקה מספקת את ההזדמנות היחידה לתרגול המחשבה - בדיוק כמו ששיעורי ההתעמלות מספקים להם הזדמנות לתרגל את גופם. תלמידים אלה לא יקבלו את התרגול המחשבתי הזה בקריאת ספר בהיסטוריה ואף לא בקריאת ספר בפיסיקה. השאלה היא, כמובן, האם יש העברה ממקצוע אחד לשני. קרוב לוודאי שההעברה קיימת אצל לפחות חלק מהתלמידים. איך מגלים אותה? זוהי שוב אחת הבעיות המצריכות מחקר.

**שאלה:** אתה מתכוון להעברה (טרנספר) לתחומים רחוקים ממתמטיקה, או בתוך מתמטיקה עצמה?

**תשובה:** לשניהם: הן בתוך מתמטיקה והן לתחומים רחוקים ממתמטיקה. למשל, בפיסיקה ובכימיה שבהם משתמשים במערכות מתמטיות.

**שאלה:** אני מבינה שאתה מתכוון בעיקר לחשיבה לוגית-דדוקטיבית.

**תשובה:** חשיבה לוגית, ואפילו חשיבה פורמלית.

**שאלה:** ואיך אתה קובע תכנים? לפי הערכותיך בדבר ההשפעה הצפויה של הנושאים השונים על חשיבתו של תלמיד?

**תשובה:** אני מוכרח לומר כאן שבמקרה שלנו האינטואיציה פעלה הרבה יותר מאשר החשיבה. לא היה לנו שום בסיס להערכות מעין אלה, ולכן נאלצנו להיעזר באינטואיציה של האנשים שלנו. ידענו, למשל, שמקצוע הגיאומטריה משמש ושימש את כל המתמטיקאים והוא סחף תלמידים רבים ועורר את עניינם במתמטיקה. מצד שני ידענו, שאחוז הכישלונות הגדול ביותר הוא בגיאומטריה. לכן, היינו צריכים לחלק את התלמידים לכאלה שילמדו את הגיאומטריה וכאלה שלא ילמדו אותה.

**שאלה:** למה בכלל ללמד גיאומטריה? רק בגלל השפעתה המשוערת על דרכי החשיבה?

**תשובה:** אילו הייתי יודע שתלמיד זה או אחר אינו מסוגל ללמוד את הנושא, ייתכן שלא הייתי מלמד אותו; אולם לא הוכח לי שיש תלמידים שאינם מקבלים שום דבר מלימודי הגיאומטריה.

**שאלה:** מכל מקום, האם נכון לומר שהסיבה העיקרית להוראת הגיאומטריה היא, בעיניך, תרומתה האפשרית למנגנוני החשיבה ולא דווקא הצורך בידיעת עובדות גיאומטריות?

**תשובה:** אכן, לא הידע. כדי להקנות ידע אין צורך בכל המערכת של הגיאומטריה האוקלידית. לשם כך די בגיאומטריה חזותית רגילה. ידע מקבלים מתוך תרגילים בסטריאומטריה, בעזרת תרגילים בטריגונומטריה ובאמצעות שאלות אחרות מסוגים אלה. את העובדות אפשר ללמד בלי לפתור אף בעיה שדורשת חשיבה.

אשר לדרכי בחירת התכנים של תכנית לימודים, אם את קובעת שתלמידך זקוקים לשפה ולטכניקה כדי לטפל באינפורמציה במדעים, אז את יודעת שאת צריכה ללמד את הדברים הללו. אילו המחקר היה מביא לי את אחוז האנשים שיש להם חשיבה מסוג זה או אחר, כי אז יכול להיות שהיינו משנים את מערכת התכנים כך שהיא עדיין תשאף אל המטרות שקבענו, אך תלך בדרכים שונות.

**שאלה:** זה בדיוק מה שהתבקש לשאול. אמרת קודם שמחקר אינו יכול להכתיב תכנים. מצד שני, אם אתה מכוון אל פיתוח דרכי החשיבה, מחקר הוא זה שיעזור לך באיתור תכנים העשויים לתרום כאן תרומה רבה במיוחד.

**תשובה:** אתן לך דוגמה. אנשים עולים על הר והם צריכים להגיע לפסגה. לפני המסע עורכים בדיקות רפואיות כדי לבדוק את יכולתם לעמוד במאמץ. כתוצאה, יודעים שיש קבוצת אנשים שאפשר להרין אותם למעלה, ויש קבוצת אנשים שאפשר למשוך אותם כלפי מעלה צעד אחר צעד, ויש קבוצת אנשים שחייבים לנוח כל חצי שעה, ולבסוף יש קבוצת אנשים שיידרש לה זמן רב

מאוד להגיע למעלה. מחקר רפואי יכול לספק מידע על יכולתם של אנשים לעמוד במאמץ, אבל המטרה נשארה אותה מטרה: להגיע לפסגה.

**שאלה:** כל זה נכון בתנאי שברור לך, כי העפלה לפסגת ההר המסוים היא מטרה רצויה. ואולם ייתכן שבעיני אחרים המטרה היא שונה: הם רוצים לאמן את האנשים ולהעניק להם מיומנויות פיסיות מסוימות. הטיפול על ההר נועד להגביר את כושרם. במקרה זה, גם את ההר צריך לבחור לפי מה שאומר המחקר הרפואי, הלא כן?

**תשובה:** יכול להיות, כי את הגדרת מטרה אחרת בעלייה להר, אצלי נקבעה מטרה שונה. יש תכנים מקובלים במתמטיקה, לפחות אם מדובר בתלמידי תיכון ולא תלמידי אוניברסיטה. את תלמידי התיכון צריך להכין לקראת לימודים עתידיים, לקראת חברה מסוימת, לקראת חיים בתוך סביבה טכנולוגית מתקדמת. כל אלה קובעים את המטרות בשבילי.

**שאלה:** דווקא גיאומטריה היא דוגמה מובהקת של תחום שרבים הסכימו לוותר עליו בעקבות מחקרים. מכיוון שמוסכם היה על כולם, כי המטרה העיקרית בהוראתה היא פיתוח חשיבה דדוקטיבית, וכיוון שמחקרים של הזוג ון-הילה ורבים אחרים הראו שאין הגיאומטריה מביאה את האפקט הצפוי, יש עכשיו נטייה בכל העולם לזרוק את הגיאומטריה מתכניות לימודים.

**תשובה:** גם אנחנו בהתחלה חשבנו על זה, אך הגענו למסקנה שזה עוול גדול. אני הכרתי את שיטות הזוג ון-הילה ופעם שלטתי היטב בכל פרטי תורתם. עכשיו אינני כל כך בטוח בנכונות תורתם. אני לא בטוח שאותם תלמידים שלא פיתחו אינטואיציה דרך הגיאומטריה, היו יכולים לפתח אותה במקום אחר. את הבדיקה הזאת ון-הילה לא עשו.

### מתמטיקה לכול - למה וכיצד?

**שאלה:** נראה לי, שאינך מפקפק בכך שכולם צריכים ללמוד מתמטיקה. למה?

**תשובה:** אכן, אני לא מפקפק בכך. אני מאמין שכל אחד צריך ללמוד מתמטיקה, כמו שכל אחד צריך ללמוד לקרוא, וזאת משום שהאינפורמציה בחיינו היום מגיעה דרך השפה המתמטית. אנחנו צריכים להכין את הצעירים לחיים בחברה המודרנית והשפה המתמטית היא אחת השפות שבהן מדברת החברה המודרנית. הבעיה היא, שגם חשיבה לוגית אנו רוצים להקנות דרך המתמטיקה, כי טרם הוצג תחליף לכך וכפי שאמרתי כבר, אין לי אפשרות להבדיל בין התלמידים שאיתם אני יכול להגשים את המטרה הזאת ובין אלה שאיתם אכשל.

**שאלה:** בתהליך של קביעת תכניות לימודים, מי לדעתך, צריך לשחק את התפקיד המרכזי? מתמטיקאים? חוקרים? מורים?

**תשובה:** המתמטיקאים, חד-משמעית. הניסיון שלי מראה שמורים וחוקרים מפחדים מתוצאות. זאת אומרת ...

**שאלה:** הם יודעים ששום דבר לא ילך?

**תשובה:** כן. הם יודעים שכל דבר שהם יעשו יביא תוצאה בלתי משביעה רצון ותגובות שליליות מצד גורמים רבים במערכת. והם אינם יודעים להכריח את המערכת ללכת במסלול שנקבע. אחר-כך הם יתנו לך כל מיני הסברים תיאורטיים למה זה לא הולך ומדוע זה לא פעל, אבל הניסיון שלנו מראה, שכשהיו לנו מורים טובים, הם היו מוכנים לעשות כל ניסוי, אפילו הקשה ביותר.

**שאלה:** אתה מצביע בעיקר על הבעיה של התנגדות המורים. נראה לך, שחידושים מסוימים אינם מצליחים בעיקר בגלל אי-נכונות של מורים לשתף פעולה?

**תשובה:** כן. וגם התנגדות החוקרים. היה על החוקרים למצוא את הגורמים שבגללם אי אפשר היה להשיג את היעדים שבהם נכשלו. הם לא עשו את זה, אך אילו סיפקו את המידע החסר, כי אז ייתכן שהיה נמצא פתרון אחר.

**שאלה:** האם בכל זאת, לדעתך, יש מקום גם לחוקרים בתהליך של קביעת תכניות לימודים?

**תשובה:** כיועצים בלבד. אם ארצה לעסוק במסחר, אקח עורך דין, שיעץ לי בנושאים מסוימים; ואולם, הוא לא יגיד לי איך לנהל את המסחר.

**שאלה:** תנועת ה-New Math, שהחלה בסוף שנות החמישים בצרפת והתפשטה בהדרגה בעולם כולו, הייתה יזומה על-ידי מתמטיקאים ובוצעה במידה רבה על-ידם. והרי כולם מסכימים היום שזה היה כשלון חרוץ.

**תשובה:** עוד כשכתבנו את התכניות שלנו התנגדנו לפורמליזם המופרז שאיפיין את ה-New Math. נכון שאת המושג "קבוצה" ניסינו להכניס כבסיס, אבל מהר מאוד התחלנו להתנגד לרעיון המופשט (אני לפחות). הגדרת המושגים הללו - הקבוצה והפונקציה - גוזלת כל כך הרבה זמן. האינטואיציה בנושאים אלה פועלת הרבה יותר טוב מאשר החשיבה הפורמלית המדויקת.

**שאלה:** אני זוכרת אותך בוחן חומרי לימוד אלה או אחרים ופוסק בביטחון: "זאת מתמטיקה", "זאת לא מתמטיקה". תמיד תהיתי מה הקריטריונים שלך להבחנות אלה.

**תשובה:** אנסה להשיב באמצעות דוגמה. משהו מלמד אי-שוויונות והוא מצייר את הגרף. זה תרגול במתן ביטוי חזותי לתופעות מתמטיות. ואולם, אם אני רוצה לפתור אי-שוויון או להוכיח משפט מתמטי, אני לא יכול להשתמש רק בכלים אלה. בסופו של דבר, אני רוצה שהתלמיד ידע לפתור ולהוכיח תוך שימוש בכלים המתמטיים. כשאני אומר "זאת מתמטיקה" אז התהליך ברור לי למדי, אם כי אולי לא בפירוט, ואני יודע באיזה סוג חשיבה מדובר, באילו מטרות ובאיזה סוג של עובדות. כשמלמדים מתמטיקה, לעתים מראים לתלמידים תופעות מעניינות, אך לא בהכרח "מתמטיות" במלוא מובן המילה.

**שאלה:** כמו למשל הקשר בין היבטים אלגבריים להיבטים גרפיים?

**תשובה:** כן, צריך ללמד את זה בשביל לאפשר לתלמיד להכיר טוב יותר את הלשון המתמטית היום - יומית שאנחנו חיים בה.

**שאלה:** אינך מסכים, כי ההצגה החזותית משפיעה בצורה מאוד משמעותית על הבנת המושגים? רבים וטובים מאמינים היום, שיכולת התרגום בין ייצוגים מתמטיים שונים היא אחד המרכיבים המכריעים של הבנה מתמטית.

**תשובה:** נכון, אבל כשאני מדגיש יכולת זו בלבד, אני עלול לאבד צעדים חשובים אחרים בהתפתחותו המתמטית של התלמיד. לא די לגלות את כל העובדות בעזרת תיאורים גרפיים. יש לדעת להוכיח את העובדה בתהליכים חשיבתיים לוגיים ואף להוציא מהן מסקנות. לא מספיק בגילוי עובדות, כגון האם פולינום מסוג זה או אחר הוא זוגי או לא.

**שאלה:** הבנתי. אינך מסתפק במעין תצפית מעבדתית. אתה דורש שהתלמיד יתאמן גם בתהליכים דדוקטיביים, כמקובל במתמטיקה "של גדולים".

**תשובה:** כן, התצפית יכולה בהחלט לעזור לתלמיד. בדיוק כפי שראיית צורות עוזרת בגיאומטריה. זה בהחלט נכון. אני בעד השימוש בחוש הנוסף - חוש הראיה - שלא היה כל כך מקובל עד כה. אבל במתמטיקה עצמה, בסיכומו של דבר, אני צריך לדעת כיצד להסיק מסקנות מדברים ידועים על דברים לא ידועים, ופה לא די בייצוגים חזותיים. במתמטיקה אני לא מלמד רק עובדות, אני גם מלמד את החשיבה המיוחדת - את יכולת ההוכחה שאינה תלויה בציורים המופיעים במחשב שלי או במחשב שלך.