

הנושא: שאלות לגילוי כשרון מתמטי ומה שמתגלה כשהן נשאלות

הוכן ע"י: רוני קרסנטי, שלמה וינר - האוניברסיטה העברית; רחל זורמן, מכון סאלד.

תקציר: במאמר מתואר מחקר המתמקד בניתוח קוגניטיבי של תשובות תלמידים לשאלות שהוגדרו ע"י המחברים כשאלות טובות לגילוי כשרון מתמטי, שהן שאלות בלתי שגרתיות. לטענת המחברים הערכת תלמידים על-ידי מתן משימות לא שגרתיות מלוות בניתוח קוגניטיבי, עשויה לעזור במערכת החינוך לגלות ולטפח תלמידים מוכשרים אשר הולכים לאיבוד במערכת כפי שהיא היום.

מילות מפתח: מחקר בחינוך מתמטי, כשרון מתמטי, פתרון בעיות לא שגרתיות, אומדן, אורך.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 15, תשרי תשנ"ה, ספטמבר 1994, עמודים 22-28.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 8 עמודים.

שאלות לגילוי כשרון מתמטי ומה שמתגלה כשהן נשאלות

1. תקציר

המחקר דלהלן דן באפשרות לאבחן יכולת מתמטית על-ידי שימוש בשאלות מסוג מסוים, ועל-ידי התשובות באמצעים קוגניטיביים. בסיטואציות מסוימות - כגון קבלה למוסדות אלה ואחרים, איוש משרות, איתור מחוננים ועוד - יש צורך לקבוע את מידת הכשרון המתמטי של נבדקים. במילים "כשרון מתמטי" אין כוונתנו רק לבקיאות בתחומי ידע מתמטיים נרכשים, אלא גם, ובעיקר, לתכונות, כגון מקוריות, יצירתיות, בהירות ואלגנטיות העשויות להתגלות תוך כדי פתרון בעיה במתמטיקה.

ברור כי חשיפה של תכונות אלה היא אפשרית רק אם הבעיה אשר אותה אנו מציבים בפני הנבדק אינה מוכרת לו. אך בכך לא די. השאלה היא: מה צריך להיות (או לא להיות) בבעיה מתמטית כדי שהיא תוגדר כאמצעי טוב לגילוי כשרון מתמטי? הניסיון לענות על כך מוביל בהכרח למחשבה על התהליכים המתרחשים אצל אדם כשהוא מתמודד עם משימה מתמטית. בנושא זה עסקו חוקרים רבים; נזכיר את קרוטצקי (Krutetskii 1976), פסיכולוג סובייטי שהניח בסיס פסיכולוגי תיאורטי לאיפיון של יכולות מתמטיות, ואת שונפלד (Schoenfeld 1985) שהציע תיאוריה של פתרון בעיות במתמטיקה. חוקרים אחדים התייחסו לסכימות והשפעתן על פתרון בעיות מתמטיות, ביניהם הינסלי, הייז וסימון (Hinsley, Heyes and Simon 1982) ומאיר (Mayer 1982). לא נרחיב את הדיבור על מושג הסכימה, ורק נציין כי בהקשר של משימות מתמטיות אפשר להניח שאדם שפתר מספר מסוים של בעיות מאותו טיפוס, מפתח חכמת פתרון לגבי טיפוס זה. שונפלד (Schoenfeld 1982) טוען, כי הפעלת סכימות שגורות היטב באופן מוצלח, עדיין אין בה כדי להעיד על חשיבה מתמטית.

מן האמור לעיל עולה, כי למעשה מבחן סטנדרטי ובו שאלות מסוג המוכר כבר לנבחן אינו יכול לשמש כלי יעיל לקביעת איכות החשיבה המתמטית שלו. נכון יותר יהיה לאפיין מבחנים מסוג זה (וביניהם גם מבחן הבגרות) כבודקים את יעילות הלמידה מצד אחד, וכאמצעי לניבוי הצלחה עתידית במערכת החינוך, מצד שני. נזכיר את מבחן ה-SAT המפורסם, אשר מטרתו המוצהרת היא ניבוי הישגים אקדמיים, ובתור שכזה הוא אכן יעיל ביותר (Hills 1964; Stanley 1977-8). העיקרון המנחה בבניית מבחנים כאלה דומה לעיקרון שהנחה את בינה וסימון בתכנון את מבדקי האינטלגנציה הראשונים: המבדקים שנבחרו יצגו כישורים הנדרשים להצלחה במשימות בית ספריות. ציון גבוה במבדקים אלו בישר ציונים גבוהים בבית הספר ובמכללה (ראה Terman and Merrill 1960). גישה מעשית זו שונה לחלוטין מגישתו התיאורטית של פיאז'ה, אשר התעניין בתהליכים הקוגניטיביים המתרחשים בשעה שילד נדרש לבצע משימות שונות (Piaget 1970).

באופן דומה מנסה המחקר שיוצג כאן להתמקד בניתוח קוגניטיבי של תשובות תלמידים לשאלות שיוגדרו על-ידינו כשאלות טובות לגילוי כשרון מתמטי. המסקנה המתבקשת מן הספרות שצוטטה לעיל היא כי לצרכי קביעת יכולת מתמטית יש להשתמש בשאלות שלא זו בלבד שהנבדק לא נתקל בהן בעבר, אלא שגם לא נתקל **בשכמותן**, דהיינו הן אינן משתייכות לסוג מוכר וידוע של בעיות. במילים אחרות: שאלה בעלת פוטנציאל גילוי של כשרון מתמטי היא שאלה **בלתי שגרתית**.

הן שונפלד (Schoenfeld 1985) והן קרוטצקי (Krutetskii 1976) בנו מאגר של שאלות כאלה לצורך מחקרם. מחקרים אלה תרמו להבנה של נקודה משמעותית נוספת: מידת הכשרון המתמטי נקבעת לא רק על סמך נכונות התשובה, כי אם גם על-ידי איכות החשיבה המתגלה במהלך הפתרון. הדוגמה הבאה, הלקוחה ממחקרו הנזכר של קרוטצקי, ממחישה זאת היטב. מספר תלמידים נתבקשו להשיב על השאלה הבאה:

שלושה חברים מבקרים בספריה בימים שונים. אחד מדי 3 ימים, השני מדי 4 ימים והשלישי מדי 5 ימים. הפעם האחרונה אשר בה שהו יחד בספריה הייתה ביום שלישי. בתוך כמה ימים ייפגשו שוב כולם בספריה ובאיזה יום בשבוע יאירע הדבר?

תלמיד כיתה ז' פתר מיד שאלה זו על-ידי רישום של סדרת מספרים עוקבים החל מ-1, וסימון כל מספר שלישי בקו, כל מספר רביעי בנקודה וכל מספר חמישי בצלב. כך הגיע לתשובה הנכונה: 60 יום. הוא ספר את ימי השבוע והגיע ליום שבת. לעומתו, תלמידת כיתה ז' חשבה מעט, ואז אמרה: "אז זו תהיה הכפולה המשותפת המינימלית!" היא חישובה $3 \times 4 \times 5 = 60$, חילקה 60 ב-7 וקיבלה 8 ושארית 4, והכריזה: "רביעי, חמישי, שישי, שבת - שמונה שבועות מיום שבת". הערכה של שתי תשובות אלה באמת מידה פסיכומטרית (נכון/לא נכון) עשויה להציג תמונה של שני תלמידים שווים ביכולתם. אולם תהליכי הפתרון כאן הם ברמות שונות לחלוטין, וחושפים איכות חשיבה מתמטית שונה. דוגמה זו

מדגישה ביתר שאת את חשיבותו של הניתוח הקוגניטיבי. מטרתו של מחקרנו הוא, אפוא, לברר מה אפשר להפיק מן השילוב של שימוש בשאלות לא שגרתיות וניתוח התשובות באמצעים קוגניטיביים.

2. שיטה

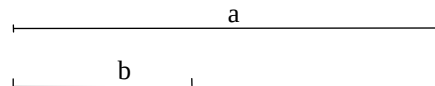
לצורך המחקר השתמשנו במבחן ששימש לאבחון יכולות מתמטיות אצל תלמידים לצורך קבלה לבית ספר מסוים (בית ספר זה שם דגש על טיפוח כישורים מעולמות תוכן שונים). בעת מילוי השאלון למדו התלמידים בכיתות ט ו- י ממקומות שונים בארץ. הם ניגשו למבחן המיון מרצונם וללא קיומו של קריטריון שהגביל את השתתפותם. מספר הנבחנים היה 268.

לכל אחת מ- 18 השאלות במבחן ערכנו ניתוח מטלה (analysis task) וכך נבחרו 3 שאלות, שאותן הערכנו כבלתי שגרתיות ולפיכך מתאימות למטרתנו. לכל אחת משלוש השאלות נערכו שני סוגי ניתוחים: קוגניטיבי וסטטיסטי. הניתוח הקוגניטיבי כלל, מלבד ניתוח המטלה, קטגוריזציה מפורטת של התשובות, צמצום הקטגוריות ודירוגן על-פי איכות החשיבה המתמטית המשתקפת מהן. בדירוג זה השתמשנו לצורך הניתוח הסטטיסטי.

מפאת קוצר היריעה נסקור כאן רק את תהליך הניתוח של אחת משלוש השאלות שהיא לדעתנו הפחות שגרתיות מבין שלושתן. כינינו אותה בשם "שאלת האומדן" וזו לשונה:

נועה אמדה את אורכו של קטע a ואיילת אמדה את אורכו של קטע b.

לאחר מדידה התברר, כי ההפרש בין האומדן של נועה והאורך האמיתי הוא 2 ס"מ, וההפרש בין האומדן של איילת והאורך האמיתי הוא 1 ס"מ.



סמן את ההיגד הנכון ונמק:

האומדן של נועה טוב יותר, כי _____

האומדן של איילת טוב יותר, כי _____

האומדנים של שתיהן טובים באותה מידה, כי _____

אי אפשר להשוות את טיב האומדנים, כי _____

3. ניתוח המטלה (test analysis) בשאלת האומדן

בשאלה זו מתמודד התלמיד עם מושג טיב האומדן. מושג זה נמצא בשימוש יומיומי אבל יש לו גם משמעות טכנית מדויקת המוגדרת על-ידי היחס בין גודל הטעות לגודל הנאמד. כאשר אנו מבקשים מן התלמיד לבחור בין ההיגדים השונים, אנו בודקים למעשה אם הוא מודע למשמעות הטכנית הזו ואם הוא מסוגל לבנות אותה לעצמו כאשר היא לא הייתה ידועה לו קודם. אם אנו מניחים ששאלות מטיפוס זה אינן מוכרות לתלמיד, הרי שנדרש ממנו לתת פירוש מדויק למונח משמעותו כללית, סתמית או אפילו עמומה בשפת יום יום. למעשה, נדרש מן התלמיד לבצע ניתוח מושגי שהוא מעבר לנתונים המיידיים של השאלה. במילים אחרות, כדי להבין את השאלה על התלמיד להציע לה פירוש שאיננו עולה בתודעתו באופן ישיר ומיידי עם קריאתה. כדי להתמודד בהצלחה עם המטלה הנדרשת בשאלה, על התלמיד לבצע את מהלכי החשיבה הבאים: עליו להתבונן בקטעים a ו- b ולהגיע למסקנה שאורך קטע a הוא יותר מפעמיים אורכו של b; עליו לערוך השוואה בין הטעויות באומדנים של נועה ושל איילת יחסית לאורך הקטע שכל אחת מדדה, דהיינו להשוות בין טעות של 2 ס"מ בקטע a ובין טעות של 1 ס"מ בקטע b. לאור מסקנתו בדבר היחס בין אורכי הקטעים, עליו להסיק שטעותה של נועה קטנה יותר באופן יחסי, ולכן אומדנה טוב יותר.

* המבחן נערך על-ידי מכון סאלד, ובפיתוחו השתתף צוות מומחים מן המחלקה להוראת המדעים במכון ויצמן, בראשותה של ד"ר נורית זהבי.

4. קטגוריות התשובות לשאלת האומדן (חלוקה מפורטת)

בצמוד לכל קטגוריה מצוין מספר התלמידים שמוינו אליה, וכן חלקם היחסי (באחוזים) מתוך כלל התלמידים. (N=268)

- * **קטגוריה א:** בחירה באומדן של נועה כטוב יותר, מפני שהיחס בין הטעות לאורך הקטע קטן יותר אצלה. (37 תלמידים, 13.8%)
דוגמאות אופייניות לנימוקים שניתנו:
1. "טעותה יחסית לאורך הקטע היא קטנה יותר מאשר טעותה של איילת יחסית לאורך הקטע"
2. "קטע b קטן מחצי קטע a ולכן איילת הייתה טועה ביותר מ-2 ס"מ ביחס לקטע a".
- * **קטגוריה ב:** בחירה בהיגד שהאומדנים טובים באותה מידה, משום שהתלמיד סבור שהקטע a שווה לפעמיים קטע b ולכן הפרופורציה בין הטעות לאורך הקטע זהה. (19 תלמידים, 7.1%)
דוגמאות אופייניות:
1. "קטע a גדול מקטע b פי 2 (ועכשיו ע"פ אומדן שלי) ולכן הטעות שלהן משותפת כי 1 ס"מ (של איילת) $2 \times$ (כדי להגיע ל-a) יהיה שווה 2 ס"מ כמו האומדן של נועה".
2. "אני חושב ש- $b = 2a$ ולכן אני חושב שהן טובות באותה מידה".
- * **קטגוריה ג:** בחירה בהיגד שאי אפשר להשוות בין האומדנים, בנימוק שהיחס בין הקטעים אינו נתון. (17 תלמידים, 6.3%)
דוגמאות אופייניות:
1. "אי אפשר לדעת את היחס בין שני האורכים ולכן לא יודעים באיזה אחוז טעות נועה ובאיזה טעותה איילת".
2. "אין אנו יודעים במדויק מהו היחס בין אורכי הקטעים".
- * **קטגוריה ד:** בחירה בהיגד שאי אפשר להשוות בין האומדנים, בנימוק שאורכי הקטעים אינם נתונים. (34 תלמידים, 12.7%)
דוגמאות אופייניות:
1. "אי אפשר להשוות את טיב האומדנים כי איננו יודעים את האורך המדויק של הקטעים".
2. "לא ידועים לנו אורכי הקטעים ואי אפשר לחשב את מידת הסטייה של האומדן יחסית לאורך הקטע".
- * **קטגוריה ה:** בחירה בהיגד שאי אפשר להשוות בין האומדנים, בנימוק שאפשר להשוות אומדנים רק כאשר אומדים אותו קטע או קטעים שווים. (44 תלמידים, 16.5%)
דוגמאות אופייניות:
1. "אי אפשר להשוות את טיב האומדנים כי הקטעים a, b אינם שווים באורכם"
2. "האורך של הקטעים אינו שווה. במקרה שהקטעים שווים, רק אז אפשר להשוות השוואה הוגנת".
3. "כל אחת התייחסה באומדנה לקטע שונה באורכו כך שאי אפשר להשוות בין השניים!".
- * **קטגוריה ו:** בתשובת התלמיד יש אזכור כלשהו של מושג היחס בין האומדנים לאורך האמיתי, אולם באופן מעורפל ולא ברור. (17 תלמידים, 6.3%)
(בקטגוריה זו - וכן בבאה אחריה - אין חשיבות להיגד שבו בחר התלמיד. המיון נעשה על-פי קריטריון המאפיין את הנימוק, במקרה זה קריטריון אי-הבהירות).
דוגמאות אופייניות:
1. "אי אפשר להשוות את טיב האומדנים כי הם אינם באותו אורך והיחס של ההפרש בין האומדנים לאורך הקטע לא שווה".
2. "אי אפשר להשוות את טיב האומדנים משום שהאורכים עצמם לא שווים, ואין אנו יכולים לדעת מהו האחוז של כל מרחק באומדן של כל אחת מהן".
3. "האומדנים של שתייהן טובים באותה מידה, כי לנועה היו חסרים אמנם 2 ס"מ אך הקטע שלה ארוך יותר. לעומת זאת, איילת אמדה את הקטע שלה יותר במדויק".
- אפשר לראות בתשובה האחרונה כי אצל התלמיד משמשות בערבוביה שתי תפיסות: מצד אחד יש לו מושג מעורפל על כך שהערכת אומדן צריכה לקחת בחשבון את היחס לאורך הקטע, אך מצד שני הוא

עדיין רואה טעות אבסולוטית קטנה יותר כאומדן מדויק יותר.

* **קטגוריה ז:** בתשובת התלמיד אין ניסיון לתת פירוש מדויק למונח "טיב האומדן". המשמעות הניתנת למונח היא סתמית ומעורפלת כמשמעות הגולמית של המונח "אומדן" בחיי יום יום. (14 תלמידים, 5.2%).

דוגמאות אופייניות:

1. "אי אפשר להשוות את טיב האומדנים, כי אומדן פירושו למדוד **בערך** את הכמות, לפי מראית עין" (הדגשה במקור).
2. "האומדן נועד להראות ערך יחסי, לכן אם יש הפרש של 1 או 2 ס"מ אין הדבר עקרוני".
3. "אי אפשר להשוות את טיב האומדנים, כי כל אחד יכול לאמוד קטע זהה באופן שונה".
4. "אומדן הוא דבר לא מדויק ולכן אין אומדן טוב יותר או פחות - רובם לא מדויקים".
5. "האומדנים של שתייהן טובים באותה מידה, כי שתייהן טעו בחישוב ושתי התשובות **אינן נכונות**" (הדגשה במקור).

* **קטגוריה ח:** בחירה באומדן של איילת כטוב יותר, מאחר שההפרש בין אומדנה ובין האורך האמיתי קטן יותר. כאן יש ניסיון לתת פירוש טכני למונח "טיב האומדן" (ההפרש בין האומדן לגודל האמיתי) אבל ההגיון של פירוש זה הוא לקוי. (54 תלמידים, 20.2%).

דוגמאות אופייניות לנימוקים שניתנו:

1. "היא הייתה יותר קרובה לתוצאה האמיתית - לאורך האמיתי של הקטע".
2. "ההפרש בין האומדן שלה לאורך האמיתי יותר קטן, כך שהיא דייקה יותר מנועה".
3. "ההפרש בין המדידות היה 1 ס"מ בעוד שאצל נועה תחום השגיאה גדול יותר - 2 ס"מ".
4. "למרות שהקטעים אינן שווים, הפרש של 1 ס"מ בין האומדן לאורך האמיתי הוא קטן יותר ומדויק יותר".

* **קטגוריה ט:** אין תשובה/תשובה שאי אפשר למיין. (32 תלמידים, 11.9%)

5. קטגוריות התשובות ורמות חשיבה

הרצון לשמר ככל האפשר את קשת התשובות על איכויותיהן השונות והניואנסים המבדילים ביניהן, הוביל בהכרח למספר רב של קטגוריות. ואכן, בסעיף הקודם תוארו 9 קטגוריות אשר לפיהן מיינו את התשובות מיון ראשוני. אולם מיון זה כמות שהוא אין די בו כדי לדרג את התלמידים על-פי איכות חשיבה מתמטית. זאת משום שבין הקטגוריות לא מתקיים סדר היררכי לפי קריטריון זה. כדי להפיק תועלת מקטגוריות אלו במונחים של אבחון כשרון מתמטי, היה עלינו, אפוא, לקבוע את רמת החשיבה המאפיינת כל קטגוריה, לאחד קטגוריות המשקפות רמת חשיבה דומה וליצור סולם מדורג על-פי הקריטריון של איכות חשיבה מתמטית. תהליך זה יתואר להלן.

בניתוח המטלה הזכרנו כי טיב האומדן נקבע על-ידי היחס בין השגיאה לגודל האמיתי, וכי התמודדות על השאלה מאלצת את התלמיד להציע פירוש למונח "טיב האומדן" (בלשון השאלה "אומדנה של מי טוב יותר?"). ברצוננו לטעון כי תלמיד מגלה איכות חשיבה גבוהה יותר ככל שפירושו למונח "טיב האומדן" קרוב יותר למשמעות הטכנית של מונח זה. במובן מסוים, בכל הפירושים המוצעים לעיל יש "יסוד לגיטימי", אבל אנחנו נוטים לייחס תבונה לבן שיחנו אם הוא מגלה במילים שאנו אומרים לו את כוונותינו ואת הרעיונות שהדריכו אותנו כשניסחנו את הדברים. כך, למשל, נוכל לקבל כלגיטימי את הפירוש שטיב האומדן הוא ההפרש בין ערך האומדן לערך האמיתי, אלא שפירוש זה מביא למצבים אבסורדיים ולכן אנחנו דוחים אותו. באותו אופן יש יסוד לגיטימי בטענה שאומדן הוא דבר לא מדויק ואין טעם להשוות בין אי-דיוק אחד לאי-דיוק אחר; אבל לדעתנו דווקא חשוב להשוות בין מידת אי-דיוק אחת למידת אי-דיוק אחרת, ומכיוון שאנו מקנים עדיפות למערכת המושגים שלנו ביחס לזו של התלמיד, אנחנו טוענים שרמת חשיבתו נמוכה יותר. (קרוב לוודאי שהרלטיביסט יתנגד לגישה זו, והתנגדותו בהחלט נראית לנו לגיטימית).

בהתאם לגישתנו, קטגוריה א היא האיכותית ביותר. כאן נבחר אומדנה של נועה כטוב יותר משום שאצלה היחס בין הטעות לערך האמיתי קטן יותר. אולם אם נתבונן בקטגוריה ב נראה שהיא איכותית לא פחות. תלמיד שבחר בהיגד שלפיו האומדנים טובים באותה מידה, משום שהוא סבור כי קטע a ארוך פי שניים מקטע b, וכך גם טעותה של נועה ביחס לטעותה של איילת, גם הוא מיישם אותו עקרון של הערכה על-פי היחס בין הטעות לאורך האמיתי. לתלמיד יש אולי בעיה אופטית, אבל מבחינה קוגניטיבית תשובתו שוות-ערך לתשובות תלמיד שבחר בהיגד הראשון. לפיכך דורגו שתי קטגוריות אלה יחד במקום הגבוה ביותר. הקטגוריה הבאה בתור מבחינת איכות חשיבה היא קטגוריה ג. כאן נבחר

ההיגד שאי אפשר להשוות בין האומדנים בנימוק שהיחס בין הקטעים אינו נתון. קיימת כאן הכרה בקשר בין הערכת אומדן ובין יחס, וסביר להניח שאם אכן היחס בין הקטעים היה נתון, היה התלמיד מסוגל להעריך מי אמדה טוב יותר. אלא שנתון זה אינו הכרחי - די בכך שמבחינים כי קטע a ארוך מקטע b יותר מפי 2 וזה מספיק כדי לקבוע שאומדנה של נועה טוב יותר. צעד נוסף זה לא נעשה על-ידי התלמיד. הוא נעצר בשלב זה ולא בדק (או שלא הצליח למצוא) דרכים להתגבר על העדר הנתון שהיה דרוש לו. קטגוריה ד דומה למדי לקטגוריה ג, אלא שהנימוק כאן הוא **שאינו** הקטעים אינם נתונים. התלמיד נעצר כמו במקרה הקודם ויש להניח שאילו אורכי הקטעים היו נתונים, הוא היה מסוגל להצביע על האומדן הטוב יותר והיה קובע זאת על-ידי חישוב היחס בין הטעות והערך האמיתי (ראה דוגמה 2 לקטגוריה ד). אומנם, ראיית האורכים כנתון הכרחי נתפסת כאיכותית פחות מראיית היחס כנתון הכרחי, שכן מה שדרוש כדי להשיב על השאלה הוא היחס בין האורכים. למרות זאת, מאחר שידעת אורכי הקטעים הייתה מאפשרת מציאת היחס ביניהם, דרגנו שתי קטגוריות אלה יחד במקום השני.

נתבונן כעת בקטגוריה ה (אפשר להשוות אומדנים רק כאשר אומדים אותו קטע) ובקטגוריה ו (איזכור של מושג היחס באופן מעורפל). הן אומנם שונות זו מזו, אך מבחינת איכות התשובה אפשר בכל זאת לדרגן באותה רמה: המשותף להן היא התחושה שבסיטואציה המתוארת השאלה "מציקה לתלמיד". הוא אינו מרגיש על קרקע בטוחה. אילו איילת ונועה היו אומדות אותו קטע לא הייתה לו כל בעיה - האומדן הקרוב יותר היה הטוב יותר. אולם העובדה שניתנו שני קטעים שונים מפריעה לו ומבלבלת אותו. התלמידים שמוינו לקטגוריה ה חיפשו מוצא מן הבלבול על-ידי אי התמודדות. הם פוסקים כי אי אפשר להשוות השוואה הוגנת ומסתפקים בזאת. אצל אלה שמוינו לקטגוריה ו הבלבול בא לידי ביטוי הן באמירות דומות והן בזריקת מונחים כגון הפרש, אחוז, דיוק וכד'. למעשה, אצל שתי קבוצות התלמידים אין קישור של מושג טיב האומדן לקביעת יחס הטעות, דהיינו מושג טיב האומדן **אינו מפותח דיו**. לרמת חשיבה זו אפשר לצרף גם את קטגוריה ז; גם כאן מושג טיב האומדן אינו מפותח - ניתנת לו פרשנות מילולית בעוד שלמשמעות הטכנית אין כל זכר.

לבסוף נותרה קטגוריה ח: בקטגוריה זו מעריך התלמיד את טיב האומדן לפי השגיאה האבסולוטית, דהיינו על-פי ההפרש בין האומדן לקטע האמיתי במקום על-פי היחס ביניהם. כאן באה לידי ביטוי תפיסה שגויה ידועה בספרות. קרפלוס ופיטרסון (Karplus and Peterson 1970) מכנים אותה בשם "אדיטיביות" (additive approach). קרפלוס ועמיתיו (Karplus et al. 1983) עמדו על מיסקונספציה זו בעבודותיהם בנושא חשיבה פרופורציונית. הם גילו כי אחוז מסוים של האוכלוסייה שבדקו משתמש בשיטה אדיטיבית לפתרון בעיות הדורשות שימוש ביחס. מעניין לציין, כי אחוז זה יורד בהרבה, לפי עדותם, כאשר בבעיה מעורבים מספרים מממדים שונים (כגון מספר סיבובי-ריצה ודקות, מספר סוכריות ומחיר בסנטים) לעומת בעיות שבהן מימד אחד בלבד, כגון אורך. בשאלת האומדן הנדונה כאן יש אכן רק מימד אחד - אורך - ונראה בהמשך כי הממצאים הסטטיסטיים עולים בקנה אחד עם ממצאיהם של קרפלוס ועמיתיו.

מבחינת רמת החשיבה קשה לדרג קטגוריה זו לעומת שלוש הקודמות שהוגדרו יחד כתפיסות לא מפותחות של מושג האומדן. אמנם כאן מדובר בתפיסה מוטעית ולא בלתי מפותחת, אך גם בטעות זו יש לדעתנו מימד של התפתחות, מאחר שהיא מאפיינת גילאים צעירים יותר: אם תיתן לילד 2 סוכריות ולחברו 4 סוכריות, מה סביר יותר שיאמר - יש לו 2 סוכריות יותר ממני, או: יש לו פי שניים ממני? הוא יבחר באפשרות הראשונה. בקביעה זו אנו מסתמכים גם על דברי אינהלדר ופיאז'ה (Inhelder and Piaget, 1958) המציינים את היכולת להשתמש ביחס כמרכיב חיוני בחשיבה פורמלית, שמתפתח עם הגיל. מבחינה קוגניטיבית קשה אפוא לקבוע איזו משתי התפיסות איכותית פחות, ולכן מצאנו לנכון לאחדן באותה רמת חשיבה, אחרונה בדירוג לפי איכויות חשיבה. (כשמדובר בהתפלגות בכל זאת הושארה קטגוריית האדיטיביות בנפרד, כדי לא להחמיץ את המידע על אחוז התלמידים שמוינו אליה - מאחר שזו תפיסה שגויה ידועה).

באופן זה נבנה סולם איכותי, המכיל 3 קטגוריות מרכזיות וקטגוריה נוספת של התלמידים שלא השיבו על השאלה או שאת תשובותיהם לא היה אפשר למיין. (בסוף המאמר נתייחס למקצת מתשובות אלה).

בטבלה 1 מוצגת התפלגות התלמידים לפי הקטגוריות דלעיל.

ראויה לציון העובדה, שבקטגוריית החשיבה האדיטיבית נמנו 23% מכלל התשובות שמוינו. ממצא זה דומה מאוד לממצאם של קרפלוס ופיטרסון (Karplus & Peterson, 1970) המצביע על 25% משתייכים לקטגוריה זו מקרב מדגם בן 75 תלמידים בכיתות ח-י בפרברים.

טבלה 1. התפלגות התשובות בשאלת האומדן (N = 268)

קטגוריה	תיאור קצר של הקטגוריה	מס' תלמידים	אחוז מכלל התלמידים	אחוז מתוך התשובות שמוינו *
א	תפיסה נכונה של מושג האומדן	56	20.9%	24%
ב	קישור בין הערכת אומדן ובין יחס או אורך אך הימנעות מיישום	51	19%	21%
ג(1)	תפיסות לא מפותחות של מושג האומדן	75	28%	32%
ג(2)	חשיבה אדיטיבית	54	20.2%	23%
	סך כל התשובות שמוינו	236	88%	100%
ד	אין תשובה, תשובות שאי אפשר למיין	32	12%	

6. השוואה בין הערכת התלמידים על-פי הסולם האיכותי שנבנה במחקר ובין הערכתם באמת מידה פסיכומטרית ובמסגרת מערכת החינוך

תחילה נסביר מהי אמת המידה הפסיכומטרית שאלה אנו מתייחסים. כפי שכבר צוין, השאלונים שבהם השתמשנו לצורך המחקר שימשו במקורם לצרכי קבלת תלמידים לבית ספר מסוים, והם נערכו ונבדקו על-ידי מכון סאלד. אמת המידה של מכון סאלד היא זו המכונה כאן "פסיכומטרית", מפני שאינה מתייחסת לאיכות חשיבה אלא לקיומם או אי-קיומם של סממנים מתאימים בתשובה שבשבילים ניתן ניקוד על-פי מפתח מוגדר היטב. בשאלת האומדן כפי שנבדקה על-ידי בודקי המכון היה אפשר לצבור עד 2 נקודות: נקודה לסימון ההיגד הנכון (ההיגד הראשון) ונקודה לנימוק שבו הייתה התייחסות לאחד מן המושגים "יחס", "אחוז שגיא", "שגיא יחסית", וכד'. כך למשל, התשובה הבאה - "אי אפשר להשוות את טיב האומדנים כי לא ידועים לנו אורכי הקטעים ואי אפשר לחשב את מידת הסטייה של האומדן יחסית לאורך הקטע" - זכתה בנקודה אחת, ואילו הבאה - "האומדנים של שתיהן טובים באותה מידה, כי אורך הקטע שאמדה נועה ארוך מעט מהקטע שאמדה איילת, ולכן סביר שתהיה לה סטייה מעט יותר גדולה" - לא זכתה באף נקודה.

בטבלה 2 מוצגת התפלגות תשובות התלמידים בשאלת האומדן על-פי שני הקריטריונים יחד - האיכות והפסיכומטרי.

טבלה 2. התפלגות התשובות בשאלת האומדן על-פי הסולם האיכותי ועל-פי הבדיקה הפסיכומטרית

קטגוריה	ניקוד מכון סאלד		
	0	1	2
א. תפיסה נכונה של מושג האומדן	4	15	37
ב. קישור בין הערכת אומדן ובין יחס או אורך, אך הימנעות מיישום	16	35	-
ג. (1) תפיסות לא מפותחות של מושג האומדן	64	10	1
(2) חשיבה אדיטיבית	54	-	-
ד. אין תשובה, תשובות שאי אפשר למיין	32	-	-

מעיון בטבלה עולה, כי יש התאמה די טובה בין דירוג התלמידים על-פי הקריטריון האיכותי שנבנה במחקר ובין דירוגם על-פי אמת המידה של מכון סאלד. ממצא זה הוא בהחלט מתקבל על הדעת; בין מבחני האינטלגנציה של בינה וסימון ובין משימות פיאז'טיאניות קיים מיתאם גבוה (ראה 1960, Terman and Merrill), כך שההנחה, שמדידה פסיכומטרית עשויה לעלות בקנה אחד עם מדידה קוגניטיבית, יש לה על מה להסתמך.

מעניין לעמת את הממצא שלעיל עם ממצאים נוספים שהתקבלו בעזרת עיבודים סטטיסטיים של הנתונים.

* להוציא קטגוריה ד

1. בדקנו מהו המיתאם בין דירוג התלמידים על-פי הסולם האיכותי שבנינו ובין דירוג התלמידים על-פי הניקוד שצברו במבחן המיון **כולו**, כפי שנבדק על-ידי מכון סאלד. כאן המקום לציין, כי המבחן כלל שני חלקים: בחלק הראשון נבדק **הידע** המתמטי של התלמיד והוא כלל 11 שאלות פתוחות. בסך הכל היה אפשר לצבור בחלק זה עד 11 נקודות - נקודה לכל שאלה. בחלק השני נבדקה **החשיבה** המתמטית של התלמיד, והוא כלל 7 שאלות פתוחות. בסך הכל היה אפשר לצבור בחלק זה עד 9 נקודות (נקודה לכל שאלה, פרט לשתי שאלות - אחת מהן שאלת האומדן - שבהם אפשר לצבור 2 נקודות).

התברר, כי בשביל שאלת האומדן המיתאם בין הדירוג שלנו ובין הציון בחלק א של המבחן (ידע) היה נמוך ולא מובהק, הן אצל תלמידי כיתות ט והן אצל תלמידי כיתות י. לעומת זאת המיתאם בין הדירוג שלנו ובין הציון בחלק ב של המבחן (חשיבה) היה גבוה למדי ומובהק. ($r = 0.37$, $p < 0.01$) אצל תלמידי כיתות ט, ($r = 0.53$, $p < 0.01$) אצל תלמידי כיתות י; המיתאם בין הדירוג שלנו ובין הציון הכללי של המבחן (חלקים א + ב) היה 0.19 ($p = 0.017$) אצל כיתות ט ו-0.43 ($p < 0.01$) אצל כיתות י.

2. בשביל התלמידים שהתקבלו בסופו של דבר לבית הספר, בדקנו את המיתאם בין דירוגם על-פי הסולם האיכותי שבנינו ובין דירוגם על-פי הציון במתמטיקה בתום השנה הראשונה ללימודיהם שם. בשאלת האומדן התברר, כי המיתאם היה נמוך ולא מובהק בשתי קבוצות הגיל.

דיון בממצאים

במבוא כבר ציינו כי מבחן סטנדרטי אינו יכול לשמש כלי יעיל לקביעת איכות חשיבה מתמטית, וכי שאלה בעלת פוטנציאל גילוי של כשרון מתמטי צריכה להיות שאלה בלתי שגרתית. כזו היא שאלת האומדן. המיתאם הנמוך בין דירוג איכותי על-פי שאלה זו ובין ציון חלק א של מבחן המיון אינו מפתיע אפוא כלל, שהרי חלק זה של המבחן בודק ידע מתמטי נרכש באורח סטנדרטי למדי. באותו אופן המיתאם הגבוה יחסית עם הציון בחלק ב של מבחן המיון עולה בקנה אחד עם ציפיותינו, ואף עם מטרת מתכנני המבחן שראו בחלק זה אמצעי לגילוי חשיבה מתמטית שאיננה תלויה בידע טכני בלבד. המיתאם הנמוך יחסית עם כלל המבחן מובן לאור העובדה שלשאלות הידע יש משקל נכבד, אולם יש למיתאם זה משמעות מעבר לכך: מבחן המיון תוכנן כך שהצלחה בו תנבא הישגים עתידיים במערכת החינוך, ולכן הוא קרוב בתוכנו לזרם המרכזי בחינוך המתמטי. גילויים של איכות חשיבה מתמטית בשאלה שהיא בלתי-שגרתית לאו דווקא יבשרו הישגים במסגרת השכלונית של החינוך המתמטי. העובדה שהיה מיתאם נמוך ולא מובהק בין הסולם שבנינו בשאלת האומדן ובין הישגי התלמידים בבית הספר מחזקת עמדה זו. למערכת החינוך הממוסדת אין כלים נאותים להעריך חשיבה יוצאת דופן. אמנם אחוז התלמידים המגלים חשיבה כזאת אינו גבוה כנראה, אבל אפילו מטבלה 1 מתברר כי 19 תלמידים שלדעתנו גילו חשיבה ברמה גבוהה דורגו בצורה נמוכה יותר על-ידי אמת המידה הפסיכומטרית. בולט עוד יותר הממצא שלהלן. מספר קטן של תלמידים (פחות מ-2%) סימנו בתשובתם יותר מהיגד אחד (למעשה בדרך כלל את כל ארבעת ההיגדים) ונימקו כל היגד שבחרו בו, זאת למרות שההיגדים סותרים זה את זה! אחת התשובות למשל, הייתה: "האומדן של נועה טוב יותר, כי מבחינת אחוזים וביחס לאורך הקטע האומדן של נועה מדויק יותר. היחס בין ההפרש והאורך טוב יותר."

האומדן של איילת טוב יותר, כי מבחינה מספרית היא פספסה רק ב-1 ס"מ שהוא קרוב יותר למציאות מנועה.

האומדנים של שתייהן טובים באותה מידה, כי בשניהם לא היה ההפרש גדול מאוד. אי אפשר להשוות את טיב האומדנים כי אין אנו יודעים את אורך הקטעים ולכן לא נוכל לחשב את היחס בין חישוביהם והאורך האמיתי."

מה יכול להניע את התלמיד לרשום תשובה כזו? לא נראה לנו שיש כאן היסוס בין התשובות השונות. להיפך: בביטחון גמור התלמיד כותב נימוק משכנע למדי לכל אחד מההיגדים. ייתכן שהיה כאן פשוט רצון לזכות בניקוד גבוה יותר. מצד שני, נראה כי התלמיד ראה זאת כמעין אתגר להצליח למצוא היגיון בכל אחד מארבעת ההיגדים. התרשמנו שתלמיד כזה אינו נמצא במצב נחות דווקא יחסית לעמיתיו שסימנו רק את ההיגד הנכון - הוא פשוט בעל ראייה מיוחדת יותר, מקורית ואפילו יצירתית. אומנם, בסופו של דבר, נאלצנו להגדיר תשובות אלה ככאלה שאי אפשר למיין ועקב מספרן הקטן לא הייתה להן השפעה על הממצאים הסטטיסטיים. הבדיקה הפסיכומטרית פסלה את כל התשובות הללו (ניקוד אפס בשאלה) ובכך לדעתנו מחמיץ הכלי הפסיכומטרי אפשרות להעריך תלמידים כאלה כבעלי כשרון מתמטי אשר, לפי הבנתנו, הפן המקורי והיצירתי שלו הוא חשוב מאוד. לחיזוק תחושתנו בנוגע לתלמידים אלה, התבוננו בשאלות אחרות בשאלונים שלהם, ואכן גילינו תשובות יפות מאוד.

אם מערכת החינוך משתמשת רק בכלים פסיכומטריים ומבחנים סטנדרטיים (כגון מבחני הבגרות), לא מפליאה העובדה שיש תלמידים מוכשרים ובעלי חשיבה אחרת אשר הולכים לאיבוד במערכת זו. הערכת התלמידים על-ידי מתן משימות לא שגרתיות המלוות בניתוח קוגניטיבי, כדוגמת הניתוח המוצג במאמר זה, עשויה לעזור למערכת החינוך לגלות ולטפח גם תלמידים כאלה.

רשימת ספרות

- Hills, J. R. [1964] Prediction of College Grades for All Public Colleges of a State. *Journal of Educational Measurement*, 1: 155-159.
- Hinsley, D. A., J. R. Hayes, and H. A. Simon, From Words to Equations - Meaning and Representations in Algebra Word Problems. In M. Just and P. Carpenter (eds.), *Cognitive Processes in Comprehension*. Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum Associates. 1977.
- Inhelder, B. and J. Piaget [1958] *The Growth of Logical Thinking from Childhood to Adolescence*. New York, Basic Books.
- Karplus, R. and R. Peterson [1970]. Intellectual Development Beyond Elementary School. II: Ratio, a Survey. *School Science and Mathematics* 70(9): 813-820. Karplus, R., S. Pulo and E. K. Stage, [1983]. Early Adolescents' Proportional Reasoning on 'Rate' Problems. *Educational Studies in Mathematics*, 14: 219-233.
- Krutetskii, V. A. [1976]. *The Psychology of Mathematical Abilities in School Children*. Chicago, University of Chicago Press.
- Mayer, R. E. [1982] The Psychology of Mathematical Problem Solving. In F. K. Lester and J. Garofalo (eds.), *Mathematical Problem Solving: Issues in Research*. Philadelphia, The Franklin Institute Press.
- Piaget, J. [1970] Piaget's Theory. In P. H. Mussen (ed.), *Carmichael's Manual of Child Psychology*, 3rd ed. New York, Wiley.
- Schoenfeld, A. H. [1982]. Some Thoughts on Problem-Solving Research and Mathematics Education. In F. K. Lester and J. Garofalo (eds.), *Mathematical Problems Solving: Issues in Research*. Philadelphia, The Franklin Institute Press.
- Schoenfeld, A. H. [1985]. *Mathematical Problem Solving*. Orlando, Academic Press.
- Stanley, J. C. [1977-1978]. The Predictive Value of The SAT for Brilliant Seventh - and Eighth - Graders". *College Board Review* 106: 30-37.
- Terman, L. M. and M. A. Merrill [1960]. *Measuring Intelligence: A Guide to the Administration of the New Revised Stanford-Binet Tests of Intelligence*. Boston, Houghton Mifflin.