הנושא: **בסיס אינטואיטיבי למשפט היסודי של האלגברה**

הוכן ע״י: נצה מובשוביץ-הדר, אורית זסלבסקי, אלה שמוקלר, המחלקה להוראת המדעים, הטכניון.

תקציר: מתוך הכרה בחשיבות במשפט היסודי של האלגברה ומתוך מודעות לעובדה שכל ההוכחות של המשפט דורשות ידע מתמטי שאינו נלמד בבית הספר העל יסודי מתעוררת השאלה כיצד ניתן להביא תלמידים לידי הכרות ראשונה עם המשפט וליצור בכך מסגרת מתאימה לדיון בפתרון משוואות פולינומיאליות? במאמר מוצג רקע הסטורי ומתמטי של המשפט היסודי של האלגברה, סקירה של דרכי טיפול בהוכחות המשפט המוצעות ע״י חוקרים אחרים ותאור של תוכנית התנסות אישית לתלמידים שעשויה להביא לכך שרעיונותיה העמוקים של ההוכחה יחשפו בפני התלמידים ולהביא לכך שתלמידים שלמדו מבוא למספרים מרוכבים יבינו את מהותו של המשפט.

מילות מפתח: אלגברה, מחשב, מחשבון גרפי, המשפט היסודי של האלגברה, פולינום, שורשים, פתרון משוואה, פתרונות, הסטוריה של המתמטיקה, מספרים מרוכבים (קומפלקסיים).

החומר פורסם במסגרת: על״ה 16, אדר ב׳ תשנ״ה, מרץ 1995, עמודים 56-66.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 16 עמודים.

בסיס אינטואיטיבי למשפט היסודי של האלגברה[1]

תקציר

מתוך הכרה בחשיבות במשפט היסודי של האלגברה ומתוך מודעות לעובדה שכל ההוכחות של המשפט דורשות ידע מתמטי שאינו נלמד בבית הספר העל יסודי מתעוררת השאלה כיצד ניתן להביא תלמידים לידי הכרות ראשונה עם המשפט וליצור בכך מסגרת מתאימה לדיון בפתרון משוואות פולינומיאליות? במאמר מוצג רקע היסטורי ומתמטי של המשפט היסודי של האלגברה, סקירה של דרכי טיפול בהוכחות המשפט המוצעות על ידי חוקרים אחרים ותאור של תוכנית התנסות אישית לתלמידים שעשויה להביא לכך שרעיונותיה העמוקים של ההוכחה יחשפו בפני התלמידים ולהביא לכך שתלמידים שלמדו מבוא למספרים מרוכבים יבינו את מהותו של המשפט.

1. מה הבעיה?

קיימות ארבע הוכחות שונות של גאוס (Gauss) למשפט היסודי של האלגברה. הוכחות נוספות ניתנו על-ידי מתמטיקאים שחיו אחריו. אחת מהן, המצטיינת ביופי ובבהירות, מקורה בעבודתו של קושי (Cauchy) במאה ה- 19. היא נשענת על תכונות של פונקציות בשדה המרוכבים. לרוע המזל, כל ההוכחות של המשפט היסודי של האלגברה הידועות כיום דורשות ידע מתמטי שאינו נלמד בבית הספר העל-יסודי ואפילו במכללות. וויליאם דנהם (William Dunham) מתאר באופן מרתק במיוחד את שלבי היכרותו עם המשפט היסודי של האלגברה [1]:

> "...קרוב לסוף של שנת הלימודים הזכיר המורה שלנו משהו שנשמע כתוצאה בעלת חשיבות יוצאת מן הכלל - המשפט היסודי של האלגברה. משפט עם שם כזה, שיערתי לעצמי, צריך להיות ... **יסודי**. לצערי, המורה הודיע לנו כי ברמה הנוכחית של התפתחותנו המתמטית לא יוכל להציג את המשפט ובוודאי לא לחקור אותו. יופי! חיכיתי ברצון לבאות. אולם גם השנה השנייה של לימודי האלגברה באה ועברה, והמשפט היסודי תפס מקום רק כהערה מטושטשת בתחתית של דף, אשר ממנה למדתי כי למשפט יש נגיעה לפירוק פולינומים ולהתרת משוואות פולינומיאליות . . .
>
> בשנה שלאחריה התחלתי לזהות במעורפל את המשפט היסודי של האלגברה כאומר שאפשר לפרק כל פולינום ממעלה n ל- n גורמים ליניאריים (אולי מרוכבים), ולפיכך למשוואה פולינומיאלית ממעלה n יש n פתרונות (אולי מרוכבים ואולי חוזרים על עצמם). כמובן שעד אז עסקנו מעט מאוד במספרים מרוכבים ועוד פחות בפתרונות מרוכבים של משוואות פולינומיאליות, כך שכל העניין נשאר מעורפל ומסתורי. בימים ההם התחלתי לחוש כי הממסד המתמטי מסווה מעינינו את מצב העניינים האמיתי באלגברה ומחזיק אותנו מחוסרי ידע. "טוב", חשבתי, "אני בדרך

[1] מאמר זה נכתב יחד עם אורית זסלבסקי ואלה שמוקלר ופורסם בגיליון 16 של כתב העת למורים למתמטיקה על"ה 16, 1995. זהו תרגום לעברית של המאמר: N. Movshovitz-Hadar, A. Shmukler and O. Zaslavsky (1994): Facilitating an Intuitive Basis for the Fundamental Theorem of Algebra via Graphical Technologies. *Journal of Computers in Mathematics and Science*

לקולג׳, שם בוודאי אלמד את הסיפור המלא״. כעבור ארבע שנים עדיין חיכיתי.

במסגרת הכשרתי במתמטיקה - במיוחד בקורסים באלגברה ליניארית ובאלגברה מופשטת - חקרנו מושגים כמו חבורות, ערכים עצמיים, תחומי שלמות, אולם אף אחד מהפרופסורים לאלגברה לא הזכיר את המשפט היסודי. זה היה מתסכל מאוד - כמו לקרוא את Moby Dick מבלי להיתקל אף פעם בלווייתן. ההסוואה נמשכה במשך כל לימודי בקולג׳, ו״הכוכב העליון״ של משפטי האלגברה נשאר מעורפל כמו קודם.

לבסוף, בקורס מתקדם באנליסה של פונקציות מרוכבות, כשראיתי סוף סוף הוכחה של המשפט היסודי, הבנתי את הבעיה: ההוכחה של המשפט היא ממש מפלצתית. בכלליותה המלאה היא דורשת תוצאות מתוחכמות מקדימות לגבי פונקציות מרוכבות. ברור כי ההוכחה המלאה היא מעל להישג ידה של המתמטיקה האלמנטרית.״

מתוך הכרה בחשיבות המשפט היסודי של האלגברה מתעוררת אפוא השאלה: איך אפשר להביא תלמידים לידי היכרות ראשונה עם המשפט היסודי של האלגברה, וליצור בכך מסגרת מתאימה לדיון בפתרון משוואות פולינומיאליות? האם אפשר לעשות משהו כדי שגם תלמידי תיכון יוכלו ״לטעום״ את טעמו של משפט מפתח זה?

לדעתנו אפשר:

א. להסיר מההוכחה של המשפט את המעטפת הכבדה של הפרטים הטכניים ולחשוף את רעיונותיה העיקריים, כך ש״המפלצת״ תהפוך ליפהפייה.

ב. להביא תלמידים (שלמדו פרק מבוא על מספרים מרוכבים) להבנת מהותו של המשפט, כך שהוא יהפוך מ״דבר מעורפל ומסתורי״ לנושא ברור לגמרי.

בדברים שלהלן נציג רקע היסטורי ומתמטי של המשפט היסודי של האלגברה, סקירה קצרה של דרכי טיפול בהוכחת המשפט המוצעת על-ידי חוקרים אחדים, ופרטים על תוכנית התנסות אישית לתלמידים שעשויה להביא להשגת שתי המטרות הנזכרות לעיל.

2. רקע היסטורי ומתמטי

משוואה פולינומיאלית ממעלה *n* היא משוואה בעלת הצורה הכללית $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = 0$ כאשר x הוא משתנה (נעלם) מרוכב, המקדמים a_k ($k = 0 , 1 , 2, ... , n$) הם מספרים מרוכבים קבועים ו- a_n שונה מ- 0. אלגברה של בית הספר התיכון עוסקת בהתרת משוואות פולינומיאליות ממעלה ראשונה ושנייה אשר בהן המקדמים והמשתנה הם מספרים ממשיים. רק לעיתים רחוקות נשאלות שאלות כלליות לגבי פתרון משוואות ממעלה גבוהה מ- 2, כגון: האם לכל משוואה פולינומיאלית ממעלה n עם מקדמים ממשיים קיים פתרון ממשי? התשובה היא חיובית עבור n אי-זוגי: **לכל משוואה פולינומיאלית ממעלה אי-זוגית בעלת מקדמים ממשיים קיים פתרון ממשי** (אחד לפחות). הוכחת עובדה זאת מבוססת על תכונות של פונקציות ממשיות ואפשר להציגה במסגרת המתמטיקה של בית הספר ללא שימוש במספרים מרוכבים (ר׳ להלן

Teaching, Vol. 13, No. 3, pp. 339-364.

סעיף 8).

המצב שונה לגמרי במשוואות פולינומיאליות ממשיות[2] ממעלה זוגית. לכל n זוגי ($n = 2k$) קיימת משוואה פולינומיאלית ממשית ממעלה n (אחת לפחות) אשר אין לה אף פתרון ממשי אחד (לדוגמה $x^{2k} + 1 = 0$). למשוואות ריבועיות ($n = 2$) ממשיות שאין להן פתרונות ממשיים, קיים, כידוע, זוג מספרים מרוכבים $a \pm bi$ צמודים זה לזה המהווים פתרונות של המשוואה. האם התכונה הזאת נשמרת למשוואות פולינומיאליות ממשיות ממעלה זוגית כלשהי? שאלה זו שקולה לשאלה הבאה: האם לכל פולינום עם מקדמים ממשיים קיים תלת-איבר עם מקדמים ממשיים אשר הפולינום מתחלק בו ללא שארית?

מתמטיקאים אחדים (Girard ו- Descartes במאה ה- 17, D'Alembert ו- Euler במאה ה- 18) טיפלו בבעיה, אבל התשובה השלמה הושגה רק במאה ה- 19 כאשר עברו לתחום המספרים המרוכבים. היה זה גאוס (Gauss) שבתחילת המאה ה- 19 הוכיח את המשפט אשר ברבות הימים זכה לתואר הכבוד - **המשפט היסודי של האלגברה:**

לכל משוואה $c_0 + c_1z + c_2z^2 + \ldots + c_nz^n = 0$ **כאשר z הוא משתנה מרוכב והמקדמים c_k** ($k = 0,1,2, \ldots ,n$) **הם מספרים מרוכבים קבועים, יש פתרון (אחד לפחות) בשדה המספרים המרוכבים.** (מכאן ואילך נתייחס למשפט זה בשם המקוצר **מיש"א** ה**מ**שפט ה**י**סודי **ש**ל ה**א**לגברה.)

מהמיש"א נובע בפרט כי לכל משוואה פולינומיאלית עם מקדמים **ממשיים** קיים פתרון בשדה המספרים המרוכבים. אם החלק המדומה של הפתרון שווה ל- 0, אז הפתרון הוא למעשה מספר ממשי. אם הפתרון שקיומו מובטח על-ידי המיש"א, הוא מספר מרוכב לא ממשי $z = a + bi$, $b \neq 0$, אז אפשר להוכיח שהמספר המרוכב הצמוד לו $z = a - bi$ מהווה גם הוא פתרון של אותה משוואה ממשית. מכאן ש**לכל משוואה פולינומיאלית בעלת מקדמים ממשיים יש פתרון ממשי, אחד לפחות, או לפחות שני פתרונות מרוכבים (צמודים זה לזה).**

זה הוא המיש"א למשוואות פולינומיאליות ממשיות. ממנו נובע שלכל משוואה פולינומיאלית ממשית ממעלה n יש לכל היותר n פתרונות. כאמור, הבעיה היא שאת המיש"א ואת המשפטים הנובעים ממנו קשה להוכיח בכלים העומדים לרשות תלמידי תיכון, אבל אפשר להציגם בפני התלמידים ולבסס את התחושה האינטואיטיבית שהם אכן נכונים. במאמר זה ברצוננו להציע דרך לכך. אבל לפני כן נתייחס להצעות אחרות לטיפול בבעיה.

3. הצעות לטיפול בבעיה

וויליאם דנהם [1] מציע להפנות את התלמיד המעוניין בהוכחת המיש"א אל ההיסטוריה של המתמטיקה ולהפגיש אותו עם ההוכחה של אוילר לגבי קיום פתרונות למשוואות פולינומיאליות ממשיות ממעלה רביעית וחמישית. בהמשך, כשנתייחס אל ההצעה הזאת נקרא לה: גישה היסטורית-פרטנית לטיפול בבעיה. קלרק קימברלינג (Clark Kimberling) [2] רואה את מקור

[2] מכאן והלאה "משוואה ממשית" פירושו "משוואה בעלת מקדמים ממשיים"

הבעיה לא בכך שהתלמיד אינו יכול להבין את ההוכחה של המשפט, אלא באי-יכולתו של התלמיד לפתור כל משוואה פולינומיאלית. הוא מציע לצייד תלמידים בתוכנת מחשב הפותרת כל משוואה פולינומיאלית בשיטה נומרית. כך, לדעתו, נוכל להקנות לתלמידים את המיש"א באופן מעשי דרך תרגול מתאים. לגישה זו נקרא בהמשך: גישה טכנולוגית-נומרית.

הצעתנו לטיפול בבעיה, בדומה לגישתו של קימברלינג, קשורה גם היא לשימוש במחשב, אבל היא מבוססת לא על תכנות אלא על גרפיקה ממוחשבת. הצעתנו, בדומה לזאת של דנהם, קשורה גם היא בבדיקה של מקרים פרטיים, אבל מבוססת על ניתוח איכותו של גרף הפולינום ולא על פתרון אלגברי של המשוואה. בהמשך כשנתייחס אל הגישה ללימוד פולינומים הנשענת על צפייה בגרפים באמצעות מחשב, נקרא לה גישה איכותית-אינטואיטיבית.

4. לימוד איכותי של פולינומים - מהו?

במאמרים קודמים (מס' 5, 6 ברשימת הספרות) הראינו איך אפשר לנצל גרפיקה ממוחשבת כדי לבנות פונקציות ריבועיות מפונקציות ליניאריות ולחקור את תכונותיהן, וכיצד לגשת לכלל הפונקציות הפולינומיאליות ולחקור באופן איכותי תכונות שלהן, כגון מבנה, צורות גיאומטריות, נקודות קיצון, נקודות התאפסות וכו'. מהות השיטה היא גילוי וחקירת עובדות הקשורות לפולינומים על סמך תצפיות בגרפים שלהם שהמחשב מספק, צבירת מידע, דיווח עליו, העלאת השערות, ולבסוף בדיקתן או הפרכתן.

נקדים את שאלת הביקורת האפשרית: הגרפים של פונקציות נגזרים מתכונותיהן. האם אין סכנה שתלמיד יבלבל בין סיבות לתוצאות כשהוא גוזר תכונות מהסתכלות בגרפים? נשיב כי אימצנו גישה של מדעי הטבע לחדור לעצם הדברים דרך צפייה בתופעות החיצוניות. מובן מאליו שבמתמטיקה כל השערה המושגת בדרך כזאת כפופה בהמשך לניתוח דדוקטיבי אשר יאמת או יפריך אותה.

כאן מתעוררת בצדק שאלת ביקורת שנייה: האם אין סכנה חינוכית בידע המתקבל על בסיס תצפיות במקרים פרטיים אשר איננו יכול לעבור בהמשך ניתוח דדוקטיבי קפדני בגלל מגבלות היכולת של התלמידים? דעתנו היא שאפשר להקטין את הסכנה עד מאוד. הידע הנרכש דרך התנסות אישית הופך לידע חווייתי ואסוציאטיבי שיש לו פוטנציאל קיומי גבוה. התעסקות בתמונות וויזואליות עשויה להביא ליצירת תמונות מנטליות במוח התלמיד. בסך הכל נוצר בסיס אינטואיטיבי לידע מדויק שנכונותו מובטחת הודות לקיומה של הוכחה דדוקטיבית (אף כי תלמיד איננו יודע על כך באותו רגע). הידע המדויק יכול להירכש מיד אחרי רכישת הידע האינטואיטיבי, או בשלב יותר מאוחר, או לא להירכש לעולם. גם במקרה האחרון סביר להניח שהידע האינטואיטיבי ישמור על ערכו.

5. ניסויים במחשב המכוונים למיש"א

נציע תוכנית בת חמש פעילויות במחשב אשר מיועדת להביא תלמיד לגילוי עצמי של המיש"א למשוואות פולינומיאליות ממשיות. הפעילויות תבוצענה על-ידי תלמידים העובדים בקבוצות או באופן יחידני במעבדה ממוחשבת לפי דפי העבודה שהכין המורה ובהדרכתו. כל תוכנת מחשב שמשרטטת גרף של פולינום עם מקדמים ממשיים לפי בקשת המשתמש, מתאימה למטרתנו. אפשר לנצל גם את המחשבון הגרפי.

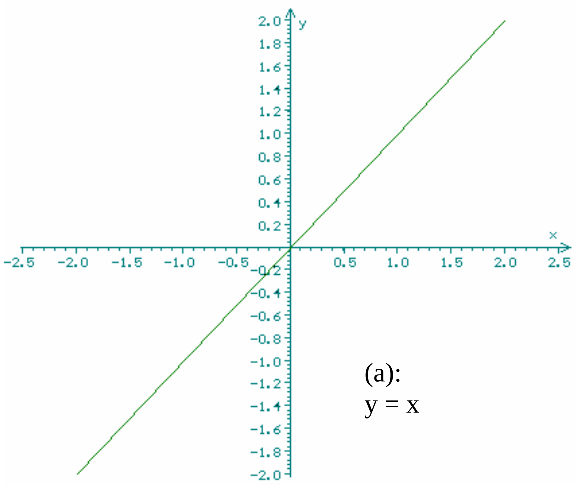
להלן תיאור תמציתי של תכנית חמש הפעילויות המוצעות לביצוע על-ידי התלמיד. כל פעילות מתחילה בהתנסות מסוימת ומסתיימת בהעלאת השערות כתוצאה ממתן תשובות לשאלות מסוימות, על בסיס ההתנסות. עם סיום סדרת הפעילויות התלמיד אמור להיות מסוגל לנסח, מיוזמתו ובכוחות עצמו, את המיש"א כהשערה סבירה שמבוססת על התנסויות שהצטברו במהלך סדרת הפעילויות.

יצוין כי כל פולינום בפעילויות הוא פולינום ממשי.

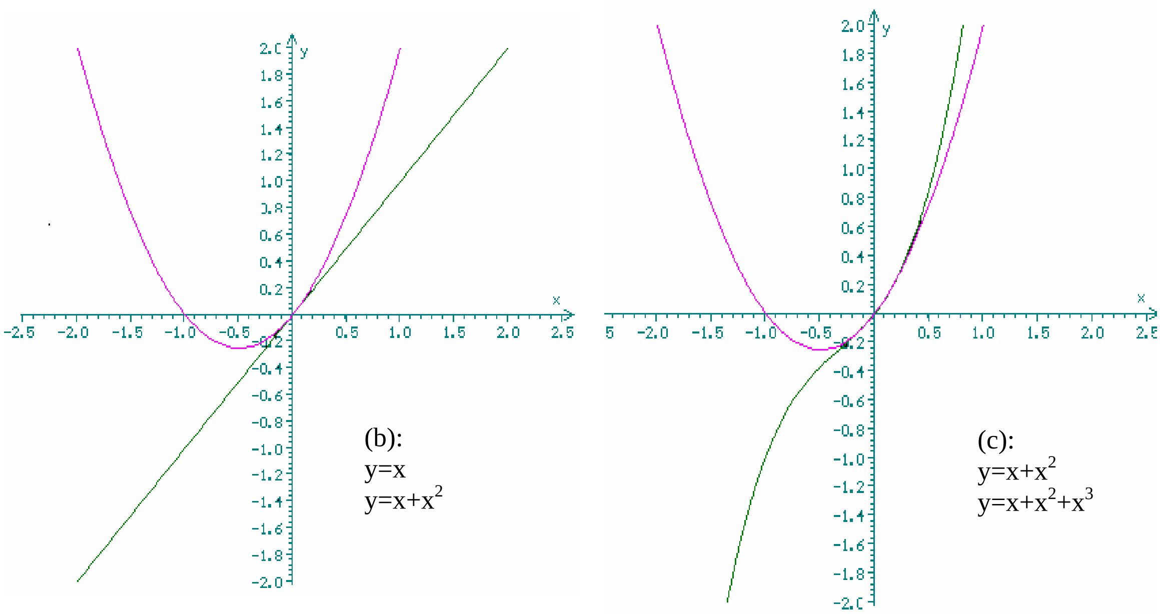
פעילות 1. בנייה של פולינום כסכום מונומים

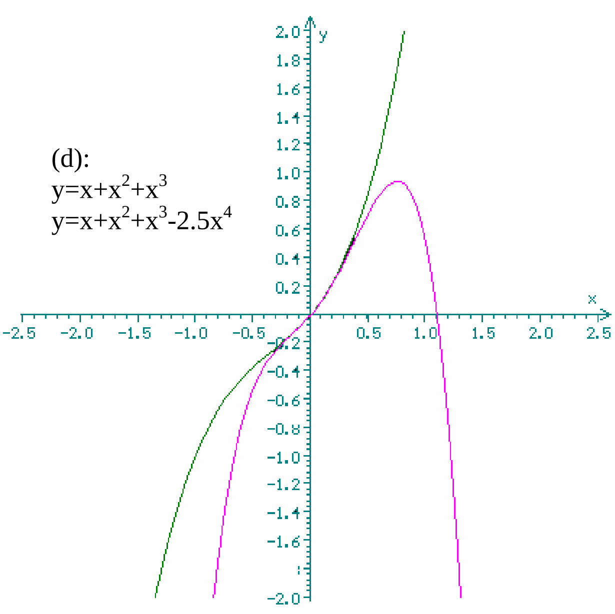
מטרות הפעילות: להפנים את המושגים הבסיסיים: "מונום", "פולינום" ולהכיר את מבנה הפולינום כסכום מונומים.

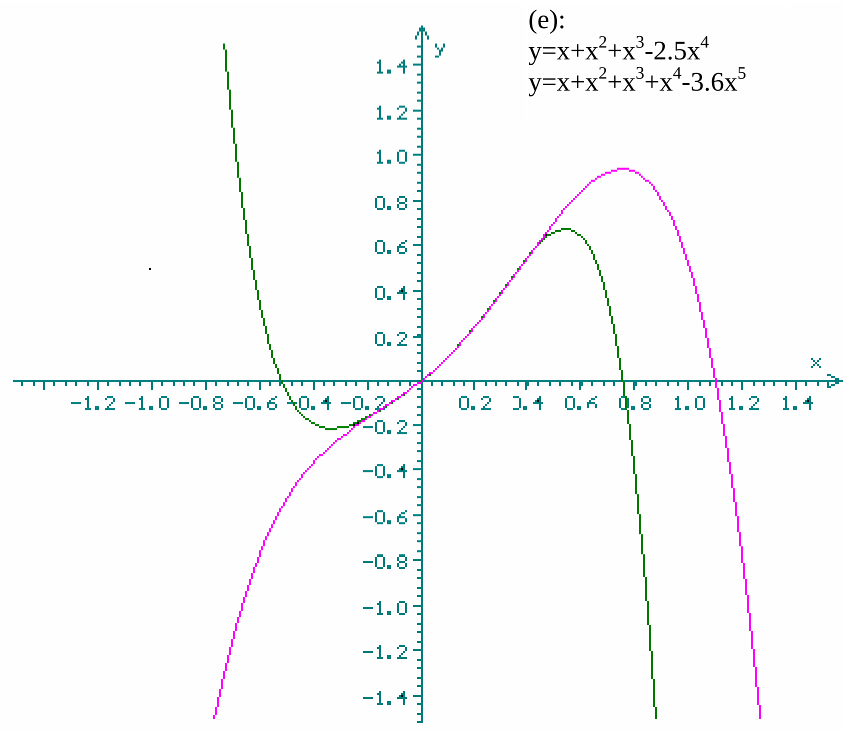
מהלך הפעילות: התלמיד בונה פולינום ממעלה n בתהליך של n צעדים כך שבצעד ה- k מבוצע חיבור של מונום ממעלה k לסכום מונומים ממעלה $1, 2, ..., k - 1$. בכל צעד התלמיד בוחן את השינויים שמתחוללים בגרף במעבר מהצעד הקודם אל הצעד הנוכחי (ר' דוגמה באיור מס' 1). על התהליך ה-n-שלבי הזה חוזרים עבור ערכי n שונים ועבור מקדמים שונים של המונומים המצטברים. איור 1 מדגים בנייה הדרגתית של פולינום כסכום מונומים.



איור 1: בנייה הדרגתית (בחמישה שלבים (a)-(e), של פולינום כסכום מונומים







שאלות המביאות להעלאת השערות (על-ידי בדיקה של מקרים פרטיים):

1.1 באיזה תחום של ציר ה- x חל שינוי משמעותי בגרף הפולינום ממעלה k - 1 כשמחברים אליו מונום ממעלה k?

1.2 האם יש הבדל בין שינוי שחל בגרף הפולינום הנ"ל כאשר k אי-זוגי לבין השינוי שחל בגרף כאשר k זוגי?

כפי שאפשר לראות בדוגמה המובאת באיור 1, הוספה לפולינום של מונום אשר מעלתו גבוהה ממעלת הפולינום איננה משפיעה הרבה על צורת גרף הפולינום בסביבת ראשית הצירים. השינוי

המשמעותי בצורת הגרף חל וגדל ככל שמתרחקים מהראשית. כאשר מוסיפים מונום ממעלה זוגית (חלקים (b) ו- (d) של איור 1), מקבלים פולינום בעל סימנים זהים כאשר $x \to \infty$ ו- $x \to -\infty$. כאשר מוסיפים מונום ממעלה אי-זוגית (ציור 1, חלקים (c) ו- (e)), מקבלים פולינום בעל סימנים נגדיים כאשר $x \to \infty$ ו- $x \to -\infty$.

פעילות 2. השוואת פולינומים ממעלות שונות (המיוצגים כסכום המונומים)

מטרות הפעילות: ללמוד על ההבדלים בין התנהגותם של פולינומים ממעלה זוגית לבין התנהגותם של פולינומים ממעלה אי-זוגית; לבחון ולקבוע את הקשר בין מעלת הפולינום לבין מספר נקודות אופייניות של הגרף שלו.

מהלך הפעילות: התלמיד מתבונן בגרפים של קבוצות נתונות של פולינומים ממעלה זוגית ומעלה אי-זוגית. הוא צובר נתונים על מספר נקודות החיתוך של כל אחד מהם עם ציר ה- x, מספר נקודות קיצון, וכיוון "ההתפשטות" של ענפי הגרף כאשר $x \to \infty$ ו- $x \to -\infty$.

שאלות המביאות להעלאת השערות:

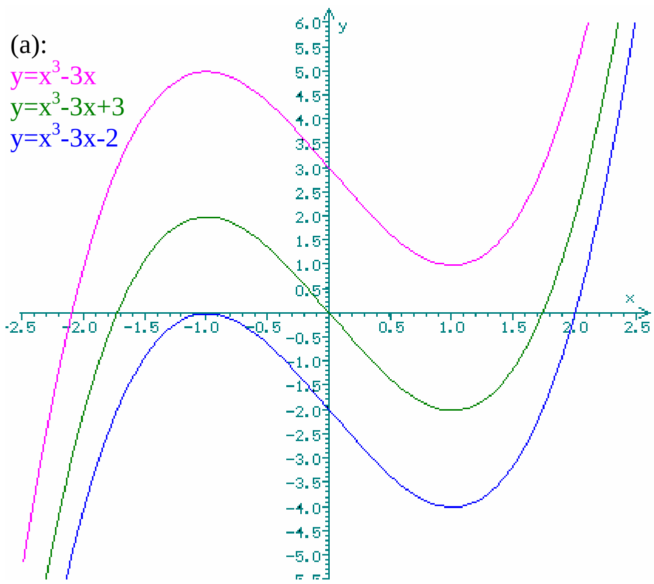
2.1 מה אפשר לשער ביחס לתחום, טווח ורציפות של פונקציה פולינומיאלית ממעלה זוגית? וממעלה אי-זוגית?

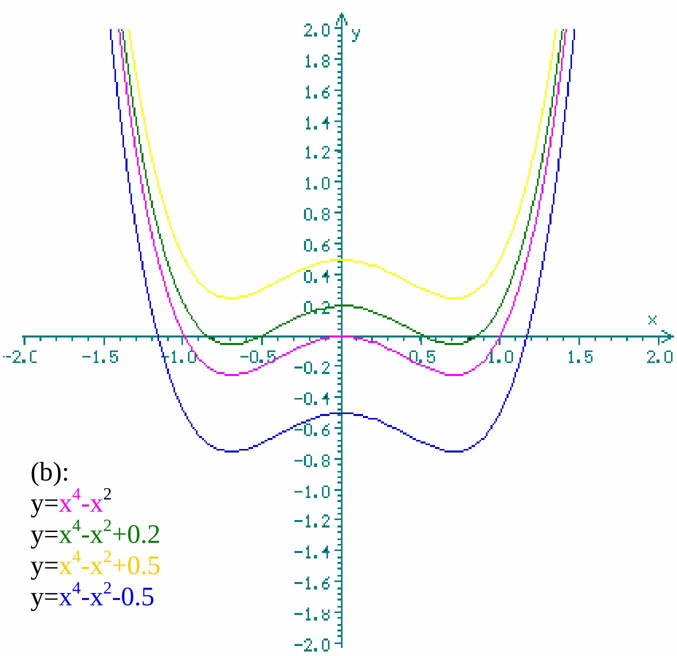
2.2 מה אפשר לשער ביחס לקשר בין מעלת הפולינום לבין מספר נקודות החיתוך של הגרף שלו עם ציר ה- x ? מה אפשר לשער ביחס לקשר בין מעלת הפולינום לבין מספר נקודות הקיצון שלו?

2.3 האם לכל פולינום ממעלה אי-זוגית יש שורש ממשי, אחד לפחות?
האם לכל פולינום ממעלה אי-זוגית יש נקודת קיצון, אחת לפחות?

2.4 האם לכל פולינום ממעלה זוגית יש שורש ממשי, אחד לפחות?
האם לכל פולינום ממעלה זוגית יש נקודת קיצון, אחת לפחות?

איור 2 המורכב משני חלקים : (a)ו-(b), מדגים מבחר של תצפיות אפשריות במסגרת פעילות 2.





איור 2: שתי קבוצות גרפים של פולינומים ממעלה שלישית (a) ורביעית (b).

על סמך התצפיות אפשר לשער, בהתאם לשאלות לעיל, את התכונות הבאות של פולינומים:

א. תחום של כל פולינום הוא כל ציר ה- x. טווח של פולינום ממעלה אי-זוגית הוא כל ציר ה- y, וטווח של פולינום ממעלה זוגית הוא קרן של ציר ה- y.

ב. מספר נקודות חיתוך של גרף הפולינום עם ציר ה- x שווה למעלתו או קטן ממנה. אם k הוא מספר נקודות קיצון של פולינום ממעלה n, אז $k \le n - 1$.

ג. לכל פולינום ממעלה אי-זוגית יש שורש ממשי, אחד לפחות. קיימים פולינומים ממעלה אי-זוגית ללא נקודות קיצון.

ד. לכל פולינום ממעלה זוגית יש נקודת קיצון, אחת לפחות. קיימים פולינומים ממעלה זוגית ללא שורשים ממשיים.

פעילות 3. בנייה של פולינומים כמכפלות של פונקציות קוויות וריבועיות

מטרת הפעילות: ליצור פולינום באמצעות כפל פונקציות קוויות וריבועיות; להכיר את המושגים הבסיסיים הקשורים למבנה הפולינום כמכפלה כזאת: "ריבוי השורש"; "שורש פשוט ושורש מרובה"; "שורש מרוכב וריבויו".

מהלך הפעילות ושאלות המביאות להעלאת השערות:

פעילות 3.1 התלמיד כופל מספר פונקציות קוויות בעלות הצורה $(x + b)$ עם ערכים שונים של b (ר' דוגמה באיור (3(a).

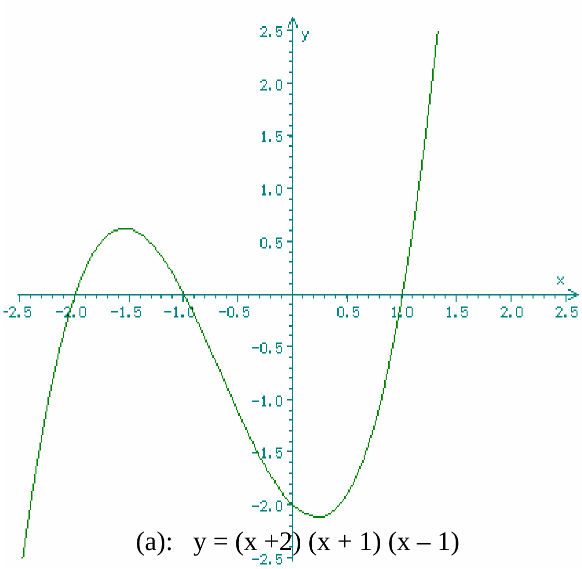
שאלה: איך אפשר לאפיין את התנהגות הגרף של המכפלה, בנקודות החיתוך עם ציר ה- x?

פעילות 3.2 התלמיד מוסיף למכפלה עוד גורם השונה מכל גורמיה הקודמים (איור (3(b).

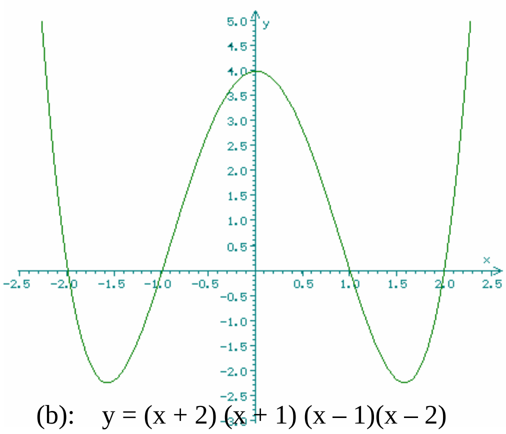
שאלה: איך משתנה הגרף?

פעילות 3.3 התלמיד מוסיף למכפלה גורם זהה לאחד מגורמיה הקודמים (איור (3(c).

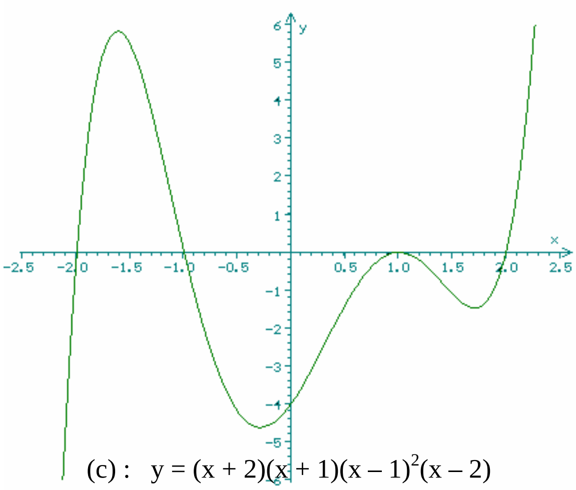
איור 3:
בנייה הדרגתית,בשישה שלבים (a)-(f), של פולינום
כמכפלת גורמים ליניאריים וריבועיים



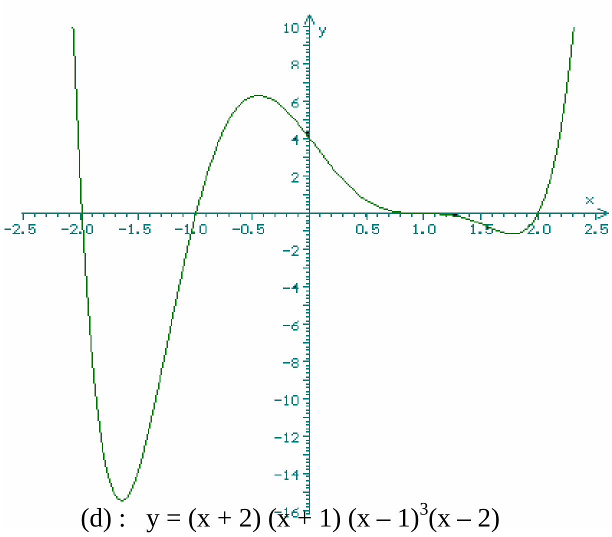
(a): $y = (x+2)(x+1)(x-1)$



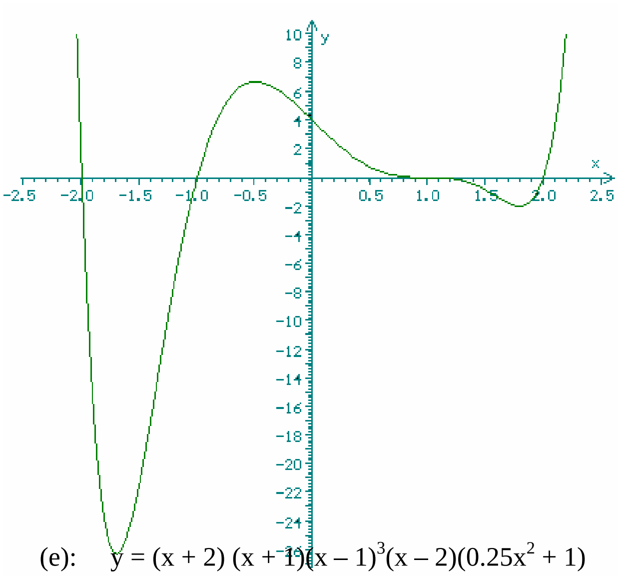
(b): $y = (x+2)(x+1)(x-1)(x-2)$



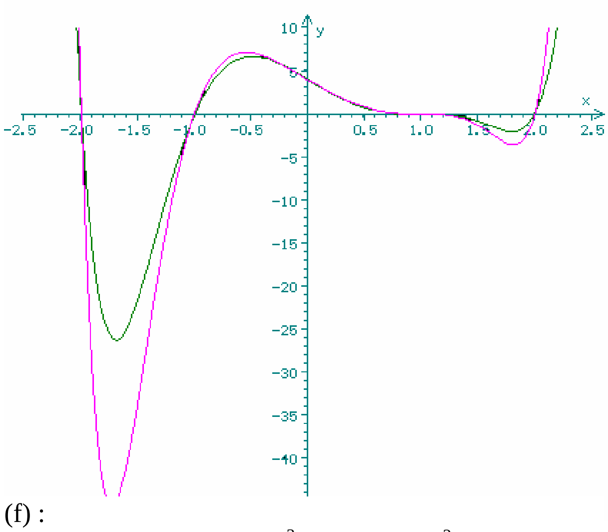
(c) : $y = (x+2)(x+1)(x-1)^2(x-2)$



(d) : $y = (x+2)(x+1)(x-1)^3(x-2)$



(e): $y = (x+2)(x+1)(x-1)^3(x-2)(0.25x^2+1)$



(f) :
$y = (x+2)(x+1)(x-1))^3(x-2)(0.25x^2+1$
$y = (x+2)(x+1)(x-1)^3(x-2)(0.25x^2+1)^2$

שאלות: באילו נקודות חיתוך של הגרף עם ציר ה- x צורתו השתנתה באופן עקרוני? האם לערך כלשהו של x מתאים הכינוי "**שורש כפול**"? אם כן - לאיזה ערך? מדוע הוא ראוי לכינוי זה?

פעילות 3.4 התלמיד ממשיך להוסיף אותו גורם למכפלה, ובוחן את השינויים המתחוללים בגרף (איור 3(d)).

שאלות: האם נקודות החיתוך של הגרף עם ציר ה- x משתנות? באיזו מהנקודות האלה צורת הגרף משתנה באופן הבולט ביותר? לאיזה שורש של הפולינום, המיוצג על-ידי הגרף, מתאים הכינוי "**שורש מרובה**" ומדוע? מהו "ריבוי השורש"? איך משפיעה הגדלת ריבוי השורש על צורת הגרף בסביבתו?

פעילות 3.5 התלמיד כופל פולינום בגורם ריבועי עם דיסקרימיננטה שלילית (איור 3(e)). הוא משווה את הפולינום המתקבל לאפס ומוצא את כל שורשיו, הן הממשיים והן המרוכבים.

שאלות: כמה שורשים ממשיים יש לפולינום המיוצג על-ידי המכפלה וכמה מרוכבים? מהו הקשר בין השורשים המרוכבים? כמה נקודות חיתוך עם ציר ה- x יש לגרף הפולינום? האם השורשים המרוכבים באים לביטוי הגרף?

פעילות 3.6 התלמיד מוסיף למכפלה גורם ריבועי אשר זהה לקודם ומגדיל בכך את הריבוי של השורשים המרוכבים (איור 3(f)).

שאלות: האם חל שינוי בצורת הגרף של הפולינום? אם כן, במה הוא מתבטא?

להלן **ההשערות הסבירות המושגות בפעילות 3** בהתאם לשאלות לעיל:

א. אם הפולינום נוצר כמכפלת גורמים ליניאריים ממשיים שונים, כל גורם יוצר שורש ממשי פשוט שבו הגרף חותך את ציר ה- x (איור 3(a)).

ב. תוספת של גורם ליניארי ממשי השונה מכל הגורמים הקודמים במכפלה מובילה להוספת שורש ממשי חדש ולשינוי צורת הגרף, בפרט להיפוך סימני הגרף משמאל לשורש החדש (ר' גרף 3(b) בהשוואה עם 3(a) ביחס ל- $x = 2$).

ג. תוספת למכפלה של הגורם $(x - c)$ אשר זהה לאחד הגורמים הקודמים איננה מוסיפה שורש חדש לאוסף שורשיו של הפולינום אבל היא משפיעה עקרונית על התנהגות הגרף בסביבת השורש $x = \mathrm{c}$. הגרף משיק לציר ה- x בנקודה $x = \mathrm{c}$ בהישארו באותו חצי המישור בסביבתה.
הגורם $(x - \mathrm{c})$ מופיע במכפלה במעלה 2 והשורש $x = \mathrm{c}$ נקרא **שורש מרובה עם ריבוי 2** או "שורש כפול" (בגרף 3(c), השורש $x = 1$ הוא שורש כפול).

ד. הוספה נוספת של אותו הגורם $(x - c)$ למכפלה משנה את צורת גרף הפולינום בסביבת השורש המרובה $x = c$: הגרף החדש עובר בנקודה $x = c$ מצד אחד של ציר ה- x לצידו השני עם השקה. שורש $x = c$ כעת הוא שורש מרובה עם ריבוי 3.
כמו קודם, הוספת הגורם $(x - c)$ מלווה בהיפוכו של הגרף משמאל ל- $x = c$ ושינוי צורתו (ר' גרף 3(d) בהשוואה עם 3(c) ביחס לשורש $x = 1$).

ה. הכנסת גורם ריבועי עם דיסקרימיננטה שלילית למכפלה המייצגת את הפולינום מובילה

להופעת זוג שורשים מרוכבים צמודים זה לזה. לדוגמה, לפולינום באיור 3(e) יש שני שורשים מרוכבים $x = \pm 2i$ הבאים מהמשוואה $0.25x^2 + 1 = 0$. שורשים מרוכבים אינם נראים במפורש באיור הגרף, בניגוד לשורשים ממשיים.

ו. הוספה של אותו גורם ריבועי למכפלה מובילה לתופעה של **שורש מרוכב מרובה**: כל אחד מהשורשים המרוכבים הנ"ל נעשה **שורש מרובה עם ריבוי 2**, או "שורש כפול". הגדלת ריבוי השורשים המרוכבים מלווה בשינוי צורת הגרף. הקשר בין מידת הריבוי של שורש מרוכב לבין צורת הגרף איננו בא לביטוי מפורש. זאת בניגוד לקשר בין מידת הריבוי של שורש ממשי לבין צורת הגרף (ר' איור 3(f)). אחרי הוספה נוספת של אותו הגורם הריבועי למכפלה, אותם השורשים המרוכבים הופכים למרובים עם ריבוי 3, וכן הלאה.

פעילות 4. התבוננות בפולינומים המיוצגים כמכפלות של גורמים ליניאריים וריבועיים

מטרות הפעילות: לקבוע קשר בין מידות הריבוי של השורשים לבין מעלתו של פולינום; להיווכח בהשפעת זוגיות של ריבוי שורש הפולינום על התנהגות הגרף שלו בסביבת השורש.

מהלך הפעילות: התלמיד מתבונן בגרפים של פולינומים שונים ומגוונים המיוצגים כמכפלות, ולגבי כל אחד מהם, צובר מידע על: מעלתו, מספר שורשיו (כולל מרוכבים), וריבוים.

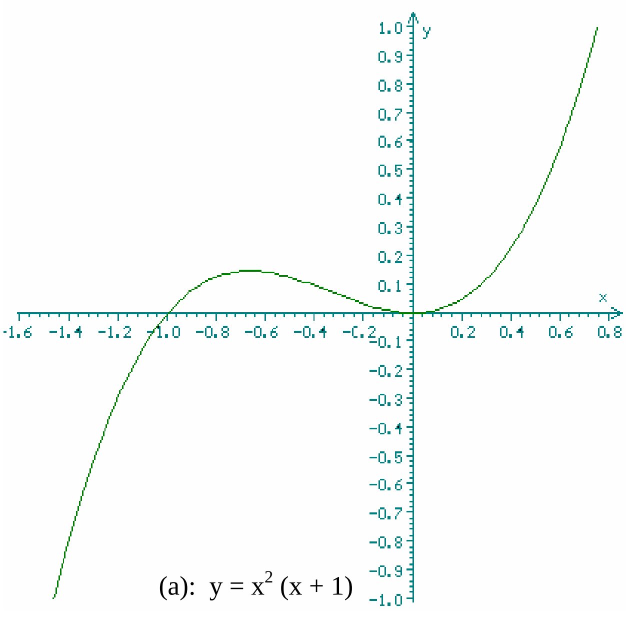
שאלות המביאות להעלאת השערות:

4.1 איך מתנהג הפולינום ביחס לציר ה- x בסביבת שורש פשוט (כלומר שורש בעל ריבוי 1)?

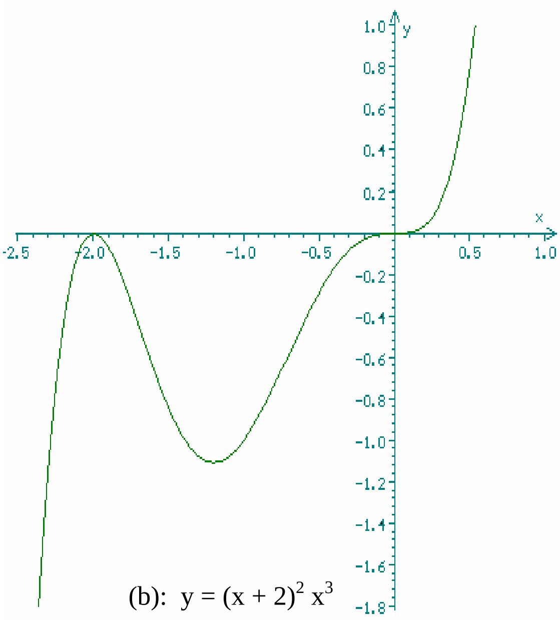
4.2 מה משותף להתנהגות הגרף של פולינום בסביבת שורש מרובה עם ריבוי זוגי ולהתנהגות הגרף בסביבת השורש עם ריבוי אי-זוגי? מהם ההבדלים?

4.3 מה הקשר בין מעלת הפולינום לבין הריבוי של שורשיו?

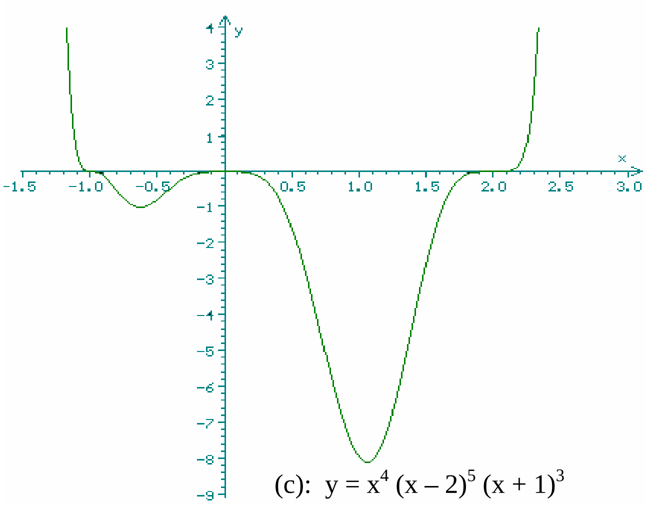
באיור 4 מוצגים שלושה פולינומים המיוצגים כמכפלות פונקציות קוויות וריבועיות.



(a): $y = x^2 (x + 1)$



(b): $y = (x + 2)^2 x^3$



איור 4: שלושה מקרים של התבוננות בהשפעת ריבוי של שורש ממשי של פולינום על התנהגות גרף הפולינום בסביבת השורש

התבוננות בפולינומים מהסוג הנ"ל מובילה להשערות:

א. בשורש פשוט גרף הפולינום חותך את ציר ה- x, כלומר עובר מצד אחד לצד שני של הציר, ללא השקה.

ב. בכל שורש מרובה ממשי של הפולינום ציר ה- x משמש משיק לגרף שלו. בשורש מרובה עם ריבוי אי-זוגי הגרף עובר מצד אחד של ציר ה- x לצד שני, כאשר בסביבת השורש עם ריבוי זוגי הגרף נשאר באותו חצי המישור: $y > 0$ או $y < 0$.

ג. מעלת הפולינום שווה לסכום הריבויים של כל שורשיו, כולל מרוכבים.

פעילות 5. העלאת השערות לגבי קיום שורשים של פולינום ומספרם. ניסוחי המיש"א

מטרת הפעילות: לסכם את העבודה הקודמת ולגלות ניסוחים של המיש"א.

מהלך הפעילות: התלמיד בוחן רשימת טענות (ר' להלן) המתחלקת לשלוש קבוצות. עליו להפריך את אלה אשר סותרות את התצפיות הקודמות ואת השאר עליו לסווג לפי כלליותן.

רשימת הטענות:

א. טענות לגבי קיום של שורש:

5.1 לכל פולינום יש שורש ממשי (אחד לפחות).

5.2 לכל פולינום יש שורש מרוכב (אחד לפחות).

5.3 לכל פולינום יש שורש ממשי או מרוכב (אחד לפחות).

ב. טענות לגבי מספר של שורשים:

5.4 מספר השורשים של כל פולינום שווה למעלתו.

5.5 מספר השורשים של כל פולינום קטן ממעלתו.

5.6 מספר השורשים של כל פולינום קטן או שווה למעלתו.

ג. טענות לגבי סכום הריבויים של השורשים:

5.7 סכום הריבויים של כל שורשיו של פולינום קטן ממעלתו.

5.8 סכום הריבויים של כל שורשיו של פולינום קטן או שווה למעלתו.

5.9 סכום הריבויים של כל שורשיו של פולינום שווה למעלתו.

להלן פירוט **קווי הדיון בטענות דלעיל** אשר יכול להתבצע כדיון משותף בכיתה.

בקבוצה א של טענות יש להפריך את V1- (איור 2(b)). טענות 5.2, 5.3 אינן סותרות את תוצאות הניסויים ועל כן אפשר לקבל אותן כהשערות סבירות. יש לציין כי ההשערות הללו שקולות זו לזו (כי כל מספר ממשי הוא גם מספר מרוכב אך לא להיפך).

לטענה 5.3 יש עדיפות מסוימת בתור השערה סופית על קיום שורש של פולינום, כי היא יותר מפורשת. כמובן שגם הניסוח 5.2 נכון.

בקבוצה ב נפריך את5.4 ואת5.5 (איור 2(a)) ונעלה את 5.6 כהשערה סבירה.

בקבוצה ג הטענה המופרכת היא 5.7 (איור 3) כאשר אף אחת משתי הטענות האחרות אינה סותרת את ניסיוננו הקודם. בין הטענות הללו, הכללית יותר היא V9- כי V8- נובעת מ- V9-. לכן יש להעדיף את 5.9

כעת נשווה בין 5.6 ו- 5.9. קל לראות שטענה5.9 יותר כללית, כי 5.6 נובעת מ-5.9. ואומנם, כאשר כל שורשיו של הפולינום פשוטים, כלומר בעלי ריבוי 1, מטענה 5.9 נובע שמספר שורשיו של הפולינום שווה למעלתו. כאשר בין שורשיו של הפולינום יש לפחות שורש מרובה אחד; מ-5.9 נובע כי מספר שורשיו של הפולינום קטן ממעלתו. לפיכך יש להעדיף את 5.9.

מבחינה דידקטית רצוי לעבור למשפט שקול אשר הנושא בו הוא "מספר השורשים":

מספר השורשים של כל פולינום שווה למעלתו אם סופרים כל שורש כמספר הריבוי שלו.

ובכן עבודת התלמיד מסוכמת בהשערה 5.3 על קיום שורש הפולינום (לפחות אחד) והשערה 5.9 (בנוסח האחרון) על מספר שורשיו.

מהמשפטים 5.3 ו-5.9 לעיל נובעים **ניסוחי המיש"א ביחס למשוואות פולינומיאליות ממשיות:**

א. לכל משוואה פולינומיאליות $Pn\ (x) = 0$ כאשר $Pn(x)$ הוא פולינום ממשי ממעלה n יש פתרון, אחד לפחות, בשדה המספרים המרוכבים.

ב. לכל המשוואה הנ"ל יש n פתרונות בשדה המספרים המרוכבים, בתנאי שסופרים כל פתרון מספר פעמים לפי הריבוי שלו כשורש הפולינום.

משפט א הוא המיש"א בהיקפו המינימלי (קיום השורש). משפט ב הוא המיש"א בהיקפו המקסימלי (מספר שורשים). בקשר למשפט א - חשוב להבהיר את משמעותה של התוספת "**בשדה המספרים המרוכבים**". בקשר למשפט ב - חשוב להבהיר את משמעותו של התנאי הנוסף הקשור לריבוי השורש: "**סופרים כל פתרון מספר פעמים לפי הריבוי שלו כשורש הפולינום**".

יש להזהיר תלמידים מהניסוח המקוצר של משפט ב האומר "לכל משוואה פולינומיאלית ממעלה n יש n פתרונות". ניסוח זה נפוץ אבל מטעה ומוביל לספקות [4].

6. מה מרוויחים?

נ. מובשוביץ-הדר, א. זסלבסקי, א. שמוקלר (1995): בסיס אינטואיטיבי למשפט היסודי של האלגברה

בסדרת הפעילויות שתוארה לעיל מביאים את התלמיד באופן הדרגתי לניסוח של המיש״א. האם לא היינו מסוגלים לנסח את המשפט מיד ללא שום עבודה קודמת? האם לא בזבזנו זמן ולא עשינו מאמצים לשווא?

לתהליך שתיארנו יש שני יתרונות. ראשית, הוא נשען על היכרות של התלמיד עם מגוון עובדות ומושגים הקשורים אל המיש״א כגון השוואת התנהגות פולינומים ממעלה זוגית ואי-זוגית, סיווג שורשים, השפעת ריבוי השורש על התנהגות הגרף בסביבתו וכו׳. אלה מובילים למוכנות של התלמיד לניסוח הטענה ולהבנתה. שנית, מגוון העובדות הנ״ל ״מתגלה״ בתהליך של התנסות אישית של התלמיד ולכן הוא קשור לחוויות ולאסוציאציות אישיות. משום כך אפשר להניח שהמשפט יהיה יותר חי ומשמעותי לתלמיד מצד אחד, ויותר שמור בזיכרונו מצד שני.

7. על הוכחות דדוקטיביות של המיש״א בבית-הספר התיכון

יחד עם ההכרה שהתהליך המוצע של גילוי המיש״א הוא מועיל, מבחינה חינוכית, אין להסיק מכאן שהוא יכול להחליף הוכחה דדוקטיבית של המיש״א. לתהליך שהצגנו יש אופי אינדוקטיבי ועל כן, בסופו של דבר, הכרחי לצרף אליו הוכחה. האם ההוכחות הדדוקטיביות של המיש״א הן לגמרי סתומות לתלמידי התיכון? האם אין דרך להביא הוכחה של המיש״א בפני התלמיד מהסוג המתואר על-ידי William Dunham?

נצביע על ארבע הוכחות (חלקיות) שאפשר לשלב בתוכנית הלימודים של בית הספר העל-יסודי.

1. אחרי שמלמדים תכונות של פונקציות רציפות וגבולות של פונקציות, אפשר להוכיח כי לפולינום ממשי ממעלה אי-זוגית קיים שורש ממשי, לפחות אחד.
2. אחרי שמלמדים פרק מבוא למספרים מרוכבים, אפשר להציג בפני התלמיד המעוניין בהצדקת המיש״א את הרעיונות הטמונים בהוכחת העובדה שבשדה המרוכבים לכל פולינום יש שורש, לפחות אחד (מיש״א בהיקפו המינימלי).
3. אחרי שמלמדים את משפט השארית ותכונות יסודיות של מספרים מרוכבים אפשר להוכיח כי **כל פולינום ממשי מתפרק לגורמים ליניאריים וריבועיים בלתי-פריקים בשדה הממשיים.**
4. מהמשפט על פירוק הפולינום אפשר להסיק מסקנות על מספר השורשים של פולינום ולהגיע בכך למיש״א בהיקפו המקסימלי.

בארבעת הסעיפים הבאים אנו מביאים את הרעיונות וההוכחות הנ״ל.

8. הוכחת קיום של שורש ממשי לפולינום ממשי ממעלה אי-זוגית

יהי $Pn\,(x)$ פולינום ממשי ממעלה $n = 2k + 1$:

$$Pn(x) = a_{2k+1}x^{2k+1} + a_{2k}x^{2k} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

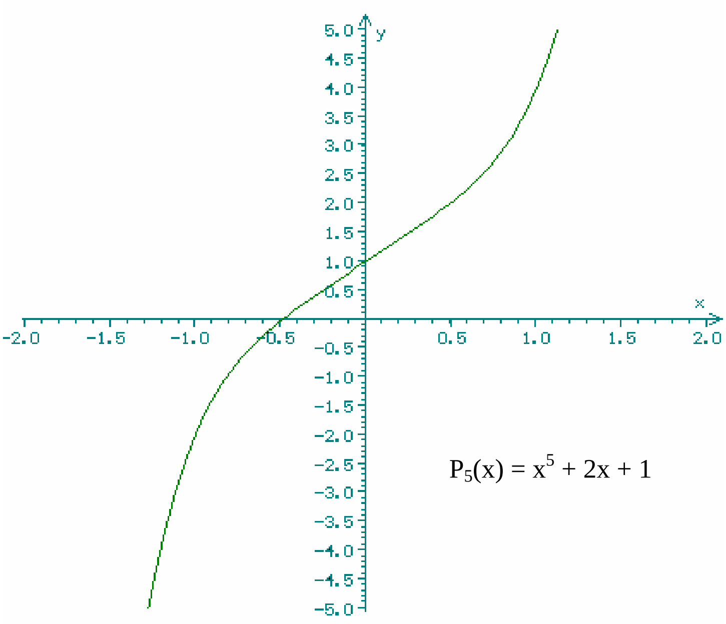
שבו המקדם a_{2k+1} שונה מ- 0.

נביא את $Pn(x)$ לצורה

$$P_n(x) \;=\; x^{2k+1}\left(a_{2k+1} + \frac{a_{2k}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{2k}} + \frac{a_0}{x^{2k+1}}\right)$$

כאשר ערך מוחלט של x שואף לאינסוף, הסכום בסוגריים מקבל סימן של המקדם a_{2k+1} ולכן יש לו אותו סימן כאשר $x \to +\infty$ וכאשר $x \to -\infty$. מאידך גיסא, לחזקה x^{2k+1} יש סימנים נגדיים בשביל x שלילי ו- x חיובי. מכאן נובע כי $Pn(x)$ משנה סימן לאורך ציר ה- x. זה מעיד שיש חלק

של הגרף של פולינום מעל לציר ה- x וחלק מתחת לציר ה- x (איור 5). מאחר שהגרף רציף הוא בהכרח חותך את ציר ה- x לפחות פעם אחת, כלומר קיימת לפחות נקודה אחת x_0 על ציר ה- x כך ש- $Pn(x_0) = 0$. מכאן מסיקים כי לפולינום $Pn(x)$ יש שורש ממשי x_0. בכך הוכח כי לכל פולינום ממשי בעל מעלה אי-זוגית קיים שורש ממשי (לפחות אחד).



איור 5:
גרף של פולינום ממעלה אי-זוגיתבעל שורש ממשי אחד

9. הוכחת המיש"א בהיקפו המינימלי - חשיפת רעיונות

יהי $Pn(z)$ פולינום ממעלה n עם מקדמים מרוכבים c_k ועם משתנה מרוכב z. הפולינום מייצג פונקציה מרוכבת של משתנה מרוכב.

נסמן אותה $w = Pn(z)$. הפונקציה הזאת מוגדרת ורציפה בכל מישור המרוכבים z המזדהה עם מישור (x , y). באיור 6 מובאות דוגמאות גרפים של הערך המוחלט של w. כל גרף הוא משטח רציף המתפשט מעל למישור (x , y) ושואף לאינסוף כאשר נקודה (x , y) מתרחקת מראשית הצירים (0 , 0). לפונקציה המיוצגת על-ידי גרף מסוג זה יש בהכרח נקודת מינימום, כלומר קיים מספר מרוכב $z_0 = x_0 + iy_0$ כך שלכל מספר מרוכב z מתקיים:

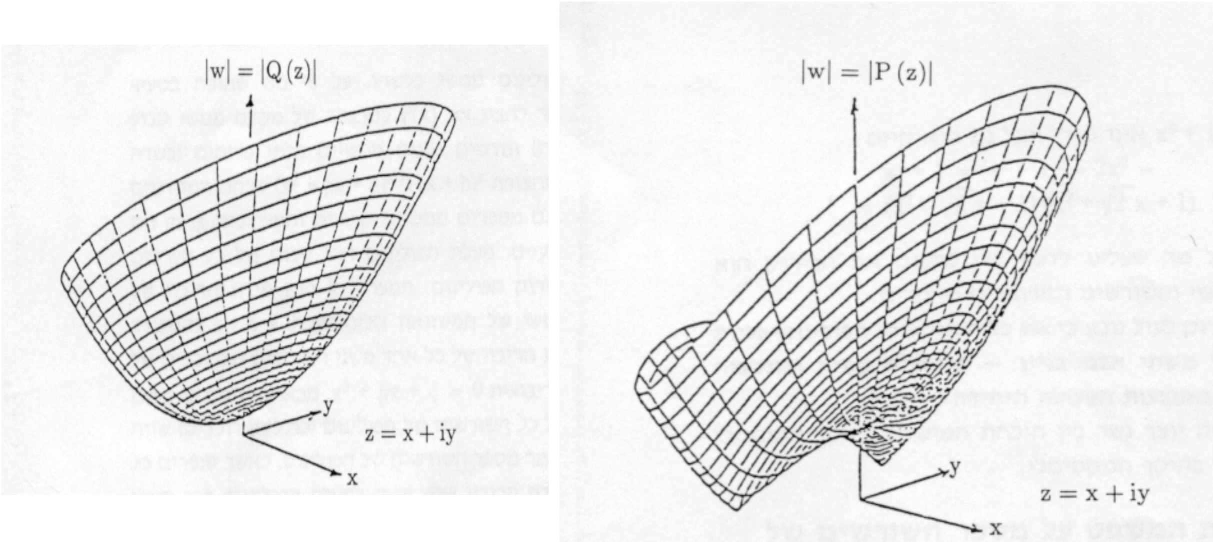
$$|Pn(z)| \geq |Pn(z_0)| \qquad (1)$$

ניקח במישור המרוכבים z סביבה קטנה של נקודה z_0. פונקציה $w = Pn(z)$ מעתיקה את הסביבה הזאת לתחום במישור המרוכבים w אשר הנקודה $w_0 = Pn(z_0)$ מושקעת בתוכו (כאן מנוצל עקרון שמירת התחום לפונקציות מרוכבות).

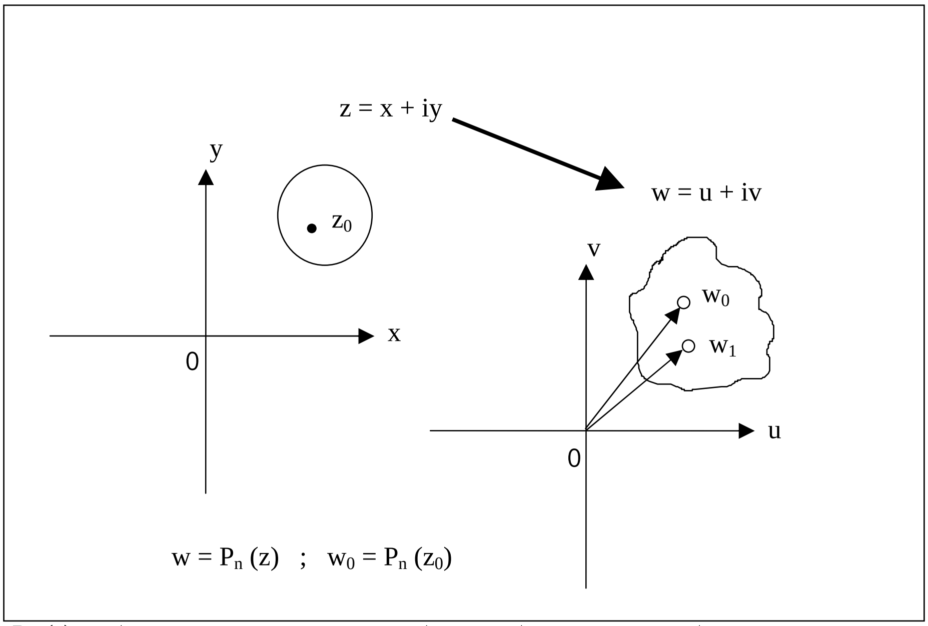
אם $w_0 \neq 0$, אז בתחום הזה תימצא נקודה w_1 אשר יותר קרובה ל- (0 ,0) מאשר w_0 (איור 7).
מכאן $|w_0| < |w_1|$ או $|Pn(z_0)| < |Pn(z_1)|$. אי-שוויון זה סותר את האי-שוויון (1).

הסתירה נגרמה כתוצאה מההנחה כי $w_0 \neq 0$. ולכן $w_0 = 0$ כלומר $Pn(z_0) = 0$. מכאן מסיקים כי

למשוואה $Pn(z) = 0$ קיים שורש z_0.



איור 6: גרפים של הערך המוחלט של שני פולינומים במשתנה מרוכב (Long, & Hern, 1989, p. 100, 101)



איור 7 : העתקת מישור של משתנה מרוכב z למישור של משתנה מרוכב w באמצעות פולינום $w = Pn(z)$

10. פירוק של פולינום ממשי לגורמים ממשיים בלתי פריקים

יהי $Pn(x)$ פולינום עם מקדמים a_k ממשיים ועם משתנה x ממשי. אם לפולינום יש שורש ממשי x_0 אז על פי משפט השארית אפשר לחלק אותו ללא שארית ב- $(x - x_0)$. כאשר לפולינום ממשי יש שורש מרוכב $(x_0 + iy_0)$ אז על פי התכונות של המספרים המרוכבים נובע כי המספר הצמוד $(x_0 - iy_0)$ גם הוא שורש של אותו הפולינום. במקרה זה הפולינום מתחלק ללא שארית במכפלה $[x - (x_0 + iy_0)]\,[x - (x_0 - iy_0)]$ כלומר ב- $(x - x_0)^2 + y_0^2$.

התבנית האחרונה מייצגת פולינום ממשי ריבועי בלתי פריק בתחום המספרים הממשיים.

ובכן אפשר לחלק ללא שארית כל פולינום ממשי בפולינום ליניארי או ריבועי. הואיל ומנת

החילוק היא פולינום ממשי אשר מעלתו קטנה ב- 1 או ב- 2 ממעלת הפולינום המחולק, באמצעות מספר סופי של חזרות על תהליך החילוק אפשר להגיע עד לקבלת ייצוג של הפולינום כמכפלת גורמים ליניאריים וריבועיים בלתי-פריקים. בכך הוכח כי **כל פולינום ממשי ממעלה *n* אפשר לפרק לגורמים ממשיים ליניאריים וריבועיים בלתי-פריקים.**

הנוסחאות המוכרות כנוסחאות הכפל המקוצר מדגימות את תכונת הפריקות של פולינום בעל מקדמים ממשיים:

$$x^3 - 1 = (x - 1)\,(x^2 + x + 1)$$
$$x^3 + 1 = (x + 1)\,(x^2 - x + 1)$$

וגם את הנוסחה:

$$x^4 - 1 = (x - 1)\,(x + 1)\,(x^2 + 1)$$

הפירוק של $x^4 + 1$ אינו מיידי אבל גם הוא קיים:

$$x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 =$$
$$(x^2 - \sqrt{2}x + 1)\,(x^2 + \sqrt{2}x + 1) =$$

כל מה שעלינו לדעת כדי לרשום את הפירוק הוא השורש הממשי והשורשים המרוכבים האחרים. ממשפט הפירוק לעיל נובע כי **את כל הפונקציות הפולינומיאליות אפשר ליצור משתי אבני בניין - פונקציה קווית ופונקציה ריבועית - באמצעות הפעולה היחידה - כפל.**

משפט הפירוק יוצר גשר בין הוכחת המיש״א בהיקף המינימלי לבין הוכחתו בהיקף המקסימלי.

11. הוכחת המשפט על מספר השורשים של הפולינום

יהי $P(x)$ פולינום ממשי כלשהו. על פי מה שהוכח בסעיף הקודם אפשר להציג את $P(x)$ כמכפלה של מקדם ממשי קבוע a השונה מ- 0 וגורמים שונים ממשיים בלתי פריקים (בשדה הממשיים) מהצורה $(x + b)^k$ ו- $(x^2 + px + q)^m$ שבהם המקדמים a, b, p, q הם מספרים ממשיים קבועים והמעריכים k, m הם מספרים טבעיים. מעלת הפולינום היא סכום של כל הערכים k ו- $2m$ בפירוק הפולינום. המעריך k הוא מידת הריבוי של השורש הממשי של המשוואה הליניארית $x + b = 0$ והמעריך m הוא מידת הריבוי של כל אחד משני השורשים המרוכבים של המשוואה הריבועית $x^2 + px + q = 0$. מכאן מסיקים כי סכום הריבויים של כל השורשים של הפולינום (כולל המרוכבים) שווה למעלתו. כלומר מספר השורשים של הפולינום, כאשר סופרים כל אחד לפי מידת הריבוי שלו, שווה למעלת הפולינום. בכך הגענו למיש״א בהיקף המקסימלי.

12. לסיכום: המבט המאחד

כפי שציינו בפתיחה, קיימות שלוש גישות שונות לטיפול במיש״א: היסטורית-פרטנית, טכנולוגית-נומרית, איכותית-אינטואיטיבית. לכל אחת מהן יש יתרונות ומגבלות משלה. בגישה ההיסטורית-פרטנית [1] התלמיד נעשה מודע לקשיים הקיימים בהוכחת המיש״א, אבל הוא מגיע רק לפולינומים ממעלה רביעית וחמישית. בגישה הטכנולוגית-נומרית [2] התלמיד רוכש ביטחון בכך שלכל פולינום יש שורש. ביטחון זה מבוסס על יכולת התלמיד למצוא את השורש באופן

מעשי בעזרת התוכנה, אבל כל הרקע התיאורטי האיכותי של עובדה זאת נשאר נסתר. בגישה האיכותית-אינטואיטיבית המוצעת במאמר זה, מוצג הרקע העובדתי והסיבתי למיש״א, אולם אין אפשרות למצוא בפועל שורשים מרוכבים.

נדמה כי שילוב של שלוש הגישות האלה היה ממעיט בהשפעה של החסרונות ומבליט את היתרונות של כל אחת מהן ומבטיח טיפול מקיף במיש״א במסגרת של בית הספר או מכללה בשלושת המישורים: תרבותי, חינוכי ותוכני.

רשימת מקורות

[1] Dunham, W. [1991]. Euler and the Fundamental Theorem of Algebra. *The college Mathematics Journal* 22 (4): 282-293.

[2] Kimberling, C. [1986]. Copmlex Roots: The Bairstow-Hitchcock Method. *Mathematics Teacher* 79(4): 278-282.

[3] Long, C. and T. Hern [1989]. Graphing the Coplex Zeros of Polynomails Using Modulus Surfaces. *The College Mathematics Journal* 20(2): 98-105.

[4] May, K.O. and H.S. Trop [1973]. Some Algebraic Equation Do Not Have Exactly N Roots. *Mathematics Teacher* 66(4): 179-181.

[5] Movshovitz-Hadar N. and A. Shmukler [1989]. A. Qualitative Study of Polynomials in High School. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology* 22(4): 523-542.

[6] מובשוביץ-הדר, נ׳ [1989]. נחיתה רכה של הפונקציה ממעלה השניה. *מספרים - עלון למורי מתמטיקה ב*, מס׳ 3 (טבת תשמ״ט): 18-37.