

הנושא: פעילות עם מחשבון גרפי

הוכן ע"י: חנה פרל.

תקציר: במאמר מובא דף פעילות בנושא שרטוט גרפים של פונקציות וחקירתם. המטרה היא לעורר בתלמיד מוטיבציה ללמוד כלים אנליטיים לחקירת גרפים של פונקציות. בנוסף לדף העבודה לתלמיד, מובאות הערות דידקטיות המיועדות למורה.

מילות מפתח: מחשבון גרפי, שיטות הוראה, פונקציות, גרף של פונקציה, חקירת פונקציה, עליה של פונקציה, ירידה של פונקציה, פונקציה קבועה, נקודות קיצון, נקודות מינימום, נקודות מקסימום.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 16, אדר ב' תשנ"ה, מרץ 1995, עמודים 80-82.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 4 עמודים.

פעילות עם מחשבון גרפי

מבוא

דף העבודה המוצג להלן הוא חלק מחוברת פעילויות למחשבון גרפי מאת חנה פרל.

החוברת הוצאה לאור על ידי המרכז להוראת המדעים באוניברסיטה העברית בירושלים בשנת הלימודים תשנ"ו.

חוברת זו מיועדת לתלמידי כיתות י'-י"ב ברמה של 4-5 יחידות לימוד ומכילה פעילויות ותרגילים מסוגים שונים המתאימים לתלמידים הלומדים מתמטיקה לפי התוכנית המאוחדת.

יחד עם החוברת לתלמיד יצאה גם חוברת למורה שבה כל דף פעילות לתלמיד מלווה בדף למורה. בדף המלווה מוצגת מטרת הפעילות והנחיה דידקטית. להלן דוגמה של דף למורה ודף לתלמיד, המספקים מוטיבציה ללימוד הקירוב הליניארי או הנגזרת.

למורה

דף עבודה 8

שרטוט גרפים של פונקציות וחקירתם

המטרה

לעורר בתלמיד מוטיבציה ללימוד כלים אנליטיים לחקירת גרפים של פונקציות.

הערות דידקטיות

1. כאשר לומדים אנליסה בעזרת מחשבון גרפי או מחשב יש חשיבות רבה ליצירת מוטיבציה ללימוד הקירוב הליניארי. לכאורה, אפשר לצייר את הגרף של כל פונקציה ולגלות את כל המידע הרצוי מתוכו ולכן אין צורך בכלי אנליטי. דף עבודה 8 ממחיש לתלמידים שאין הדבר כך. בדף מוצגות דוגמאות של פונקציות אשר הגרף שלהן המשוורטט על צג המחשבון איננו מתאר את הצורה "האמיתית" של הגרף, גם אם מנפחים אותו מספר פעמים ומשנים את מערכת הצירים. גרף הפונקציה $y = 3x^3 - 10x^2 + 10x + 100$ נראה במערכת צירים תקנית כגרף עולה לכל x . עם שינוי מתאים במערכת הצירים מיד אפשר לגלות שאין הדבר כך. באמצעות סמן העקיבה (TRACE) רואים שלמרות שהגרף נראה כקו ישר אופקי שיעורי ה- y בקטע זה אינם קבועים, תחילה יורדים ואחר-כך עולים. יש לעורר את השאלה האם סביר להניח שקיים קטע של הגרף שבו הפונקציה היא קבועה או שמא נובע הדבר ממגבלות המחשבון?
3. את הפונקציה השניה $y = 33x^3 - 100x^2 + 101x + 100$ מאפיינת התכונה שנקודות הקיצון שלה מאוד קרובות זו לזו בשני שיעוריהן: (1.0202, 133.99986), (1, 134), לכן כדי לראות את נקודות הקיצון ולהיווכח שהפונקציה איננה עולה לכל x צריך לנפח את הגרף בסביבת הנקודה $x=1$ מספר רב של פעמים.
4. את הפונקציה $y = 0.25x^4 - 17x^3 - 2x^2 + 200x$ אי אפשר לשרטט במחשבון באופן שייראו כל נקודות הקיצון בבירור במערכת צירים אחת. הדבר נובע מהמרחק הגדול שבין נקודות הקיצון. מהגרף של הפונקציה רואים כי נקודות הקיצון הן בקירוב:
(-2, 268-) מינימום מקומי,
(2, 260) מקסימום מקומי,
(-51, 558769-) מינימום מוחלט.

לכן כאשר "רואים" את שתי נקודות הקיצון הראשונות אי אפשר לראות את השלישית. כל שינוי במערכת הצירים מגלה תכונות חדשות של הגרף. כאשר מתגלית העובדה שהפונקציה עולה בשביל ערכים גדולים של x אפשר לשער שיש לפונקציה לפחות עוד נקודת מינימום אחת לפני העליה. בעזרת סמן העקיבה אפשר לקבל קירוב ראשון של נקודה זו ולשנות בהתאם את מערכת הצירים.

5. מהדוגמאות המובאות כאן צריך התלמיד להסיק שכדי לדעת מהי הצורה "האמיתית" של גרף פונקציה נתונה יש לחפש כלים אנליטיים שבעזרתם אפשר לאתר את **כל** נקודות המפנה של הגרף. מידע זה יאפשר שימוש יעיל יותר במחשב או במחשבון, או אולי יבטל כליל את הצורך בשרטוט הגרף במחשבון.
6. את דף עבודה 8 יש לתת לתלמידים להכין מראש לפני לימוד הקירוב הליניארי. בכיתה יש לדון בשאלה, איך אפשר לדעת מתי צריך לנפח את הגרף ומתי אפשר לסיים את תהליך הניפוח בביטחון שהגרף שהתקבל הוא הגרף "האמיתי" ולא יתגלו פיתולים נוספים. האם מחשב משוכלל יותר יגלה עוד שינויי כיוון?
- תופעה נוספת המתגלית על ידי ניפוח היא, כי כאשר מנפחים גרף של פונקציה מספר פעמים מסביב לנקודת קיצון נראה לכאורה, כי בקטע מסויים מסביב לנקודת הקיצון הפונקציה היא קבועה. כדי לבדוק השערה זו אפשר לנסות ולחשב באופן אלגברי במחשבון את ערכי הפונקציה בסביבה קרובה לנקודת הקיצון. שיטה זו איננה תמיד יעילה, משום שאם הסביבה מספיק קטנה גם הערכים המחושבים יהיו קבועים. כדאי לבצע ניפוח של גרף הפונקציה בשיטת ZOOM Box על ידי מלבן קרוב מאוד לקטע הנראה קבוע. בגרף שמתקבל רואים כי הקטע שבו הפונקציה עכשיו נראית קבועה נעשה קטן יותר. בכל הגדלה נוספת של הקטע האופקי, התחום בו הפונקציה נראית קבועה קטן. סביר, אם כן להניח שהפונקציה איננה קבועה בסביבת נקודות הקיצון. גם שאלה זו, אם היא מתעוררת בכיתה, מהווה מוטיבציה ללימוד הקירוב הליניארי שהרי אם מוכיחים כי רק בנקודה אחת בסביבה יש לפונקציה משיק המקביל לציר x כי אז הפונקציה איננה קבועה בקטע.

לתלמיד

דף עבודה 8

שרטוט גרפים של פונקציות וחקירתם

נתונות שלוש פונקציות:

$$y = 3x^2 - 10x^2 + 10x + 100 \quad 1.$$

$$y = 33x^3 - 100x^2 + 101x + 100 \quad 2.$$

$$y = 0.25x^4 - 17x^3 - 2x^2 + 200x \quad 3.$$

שרטט את גרף הפונקציות ומצא באילו תחומים הן עולות ובאילו תחומים הן יורדות.

פתרון:

$$א. \quad y = 3x^3 - 10x^2 + 10x + 100$$

שרטוט ראשוני של הפונקציה במערכת צירים סטנדרטית נותן גרף לא ברור. כדי לשפר את השרטוט צריך לשנות את מערכת הצירים. (בחירת מערכת צירים טובה יותר נעשית בשלב זה על ידי ניסוי וטעייה תוך התבוננות בגרף המתקבל בכל שלב ושינוי מתאים של מערכת הצירים. בהמשך נלמד שיטות טובות יותר).

התבונן בגרף הפונקציה במערכת צירים $[300, -300] \times [4, -4]$.
זכור, התאם את מספר השנות למערכת הצירים. מהגרף רואים כי הפונקציה עולה כמעט בכל התחום פרט לקטע קטן שבו היא נראית קבועה. האומנם?
"טייל" על גרף הפונקציה עם סמן העקיבה (TRACE) לאורך החלק הנראה קבוע, החל מהקצה השמאלי שלו לכיוון ימין ושים לב לשיעורי ה- y של הנקודות שעליהן עוברים.
בהתחלה רואים כי ככל ש- x גדל גם y גדל, כלומר הפונקציה עולה. אולם תופעה זו איננה ממשיכה לאורך כל הקטע. החל מהנקודה $(0.8, 103.136)$ שיעורי ה- y מתחילים לרדת עד לנקודה $(1.4736852, 102.62079)$ שממנה והלאה שוב הולכים וגדלים שיעורי ה- y .

במילים אחרות, למרות שהפונקציה נראית קבועה בחלק מהתחום אין הדבר כך. בחלק מהקטע הפונקציה עולה ואילו בחלק אחר היא יורדת.

כדי לראות את צורת הפונקציה בקטע זה בבירור, ננפח חלק זה של הפונקציה, באמצעות פקודת ZOOM Box, פעמיים או יותר ונקבל כי הפונקציה עולה עד ל- $x = 0.76007$ ומשם יורדת עד ל- $x = 1.45777$. החל מנקודה זו הפונקציה שוב עולה.

נסיק אם כן, כי הפונקציה עולה בקטעים: $(-\infty, 0.76007)$, $(1.45777, \infty)$, ויורדת בקטע $(0.76007, 1.45777)$.

האם ניתן לדעת בביטחון כי אלו הם קטעי העליה והירידה היחידים של הפונקציה? אולי הפונקציה עולה עד ל- x גדול מאוד שבו לא שרטטנו את הגרף ומשם היא יורדת? מה קורה כאשר x קטן מאוד?

אפשר לבצע ZOOM Out מספר פעמים, להגיע לתחום ולטווח גדולים מאוד ולהשתכנע שהפונקציה ממשיכה לעלות ואיננה יורדת עוד (הקפד לשנות את הסקלה בכל שלב של התרחקות מהגרף). מסקנה זו מתקבלת על ידי ניסוי בלבד וכל עוד לא נוכל להוכיח זאת לא נהיה בטוחים בכך.

$$b. \quad y = 33x^3 - 100x^2 + 101x + 100$$

שרטט את הפונקציה במערכת צירים $[300, -300] \times [4, -4]$ עם מספר מתאים של שנותות. כמו בגרף הפונקציה הקודמת, גם כאן אנו מוצאים קטע שבו הגרף נראה מקביל לציר ה- x . מניסיונו בחקירת הגרף של הפונקציה הראשונה נעזר בסמן העקיבה ונבדוק אם הפונקציה אכן קבועה.
כשבדקים את שיעורי ה- y רואים כי במקרה זה שיעורי ה- y הולכים וגדלים, כלומר, הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה. האומנם?

נפח את חלק הגרף הנראה כישר אופקי על ידי פקודת ZOOM Box. מתקבל גרף עולה שבו עדיין יש קטע המקביל לציר ה- x .
בדיקה של שיעורי ה- y (בעזרת הסמן) בקטע זה מראה כי שיעורי ה- y הולכים וגדלים, כלומר, הפונקציה עולה.

על מנת להשתכנע בכך, נפח פעם נוספת, באותה שיטה, את הקטע הנראה כישר. שוב מקבלים גרף של פונקציה עולה אך בו הקטע המקביל לציר ה- x קטן יותר.
העבר את סמן העקיבה לאורך הגרף ובדוק את שיעורי ה- y של הנקודות עליהן הוא עובר.

כאשר עושים זאת, מקבלים כי שיעורי ה- y תחילה אומנם הולכים וגדלים אך לאחר מכן הם קטנים ושוב עולים. (אם בשרטוט שקיבלת אין הדבר כך בצע עוד מספר ניפוחים של קטע הגרף הנראה ישר).

ניפוח נוסף של הגרף מבהיר את התנהגות הפונקציה בקטע זה – הפונקציה עולה, יורדת ושוב עולה.

מקבלים כי הפונקציה עולה בקטעים $(-\infty, 1.0202)$, $(1.0202, \infty)$ ויורדת בקטע $(1.0202, 1.0000)$.

כל השאלות ששאלנו לגבי הפונקציה הראשונה תקפות גם כאן אלא שבמקרה זה מתעוררות שאלות נוספות:

- * האם על ידי עוד הגדלות נגלה קטעי עליה וירידה חדשים?
- * עד כמה יש לנפח את הגרף כדי להיות משוכנעים שמצאנו את כל קטעי העליה והירידה?
- * האם צורת הגרף תלויה בטיב המחשב שבו משרטטים אותו וככל שהמחשב משוכלל יותר מתגלים פרטים נוספים אודות הגרף?

$$g. \quad y = 0.25x^4 - 17x^3 - 2x^2 + 200x$$

שרטט את הגרף במערכת צירים תקנית.

השרטוט המתקבל נראה לא סביר. מדוע?

התבוננות בגרף מראה כי כדאי לצמצם את ציר ה- x ל- $[-4, 4]$ ולהגדיל את ציר ה- y . בחירה של ציר y $[300, -300]$ (ושינוי מתאים בשנתות של y) מביאה לצורת גרף שלכאורה ניתן להסתפק בו.

כדי לבדוק שהגרף שקיבלנו אכן מתאר את כל גרף הפונקציה נגדיל את ציר ה- x ל- $[-100, 100]$ הגרף המתקבל אומנם מעוות אך מתגלה בצד ימין חלק חדש של הגרף שלא ראינו קודם. נשנה בעקבות זאת את ציר ה- x ל- $[-80, 10]$.

כדי לבחור ציר y מתאים יותר "נטייל" באמצעות סמן העקיבה לאורך הגרף בקטע שהגרף איננו משרטט. למרות שבקטע זה לא רואים את הגרף יופיעו על הצג שיעורי הנקודות על הגרף שעליהן הסמן עובר. מקבלים כי לפונקציה יש נקודת מינימום בערך ב- $[-51, 558476]$.

עתה נשרטט את הפונקציה במערכת צירים שבה ציר y $[600000, -600000]$ (הקפד לבחור סקלה מתאימה!) וציר x $[-80, 30]$.

בשרטוט זה רואים בבירור את נקודת המינימום השניה של הגרף אך חלק הגרף מסביב ל- 0 נעשה לא ברור. לכן, כדי לקבוע את קטעי העליה והירידה של הפונקציה עלינו לשרטט את הגרף בחלקים בתחומים שונים.

נותר לבדוק, כמו במקרה הקודם אם בשביל x גדול מאוד או קטן מאוד הפונקציה שוב תשנה את כיוונה. ZOOM Out משכנע אותנו (אך לא מוכיח) כי אין הדבר כך.

נסיק: הפונקציה עולה בקטעים $(-\infty, 1.98)$, $(1.98, 51.58)$ ויורדת ב- $(51.58, \infty)$ ויורדת ב- $(1.98, 51.58)$.

דוגמאות אלה ממחישות כי למרות שישי בידינו כלי משוכלל לשרטוט גרפים אנו זקוקים לכלים מתמטיים נוספים שיאפשרו לנו לקבוע מתי פונקציה משנה את כיוונה – מירידה לעליה או להיפך. ידע זה עשוי לאפשר לנו שימוש יעיל יותר במחשבון.