הזדמנויות להתבונן בגרפים

עמוס ארליך
אוניברסיטת תל־אביב

מוסכם היום ומקובל שרצוי מאוד שתלמידינו יכירו את ההצגה הגרפית של פונקציות מסוגים רבים ושונים לשם כך זקוקים אנו לשני דברים לאמצעים נוחים ומהירים לקבלת גרפים ולדברים מעניינים (את התלמידים) על גרפים אלה

האמצעים הנוחים והמהירים לקבלת גרפים מתחלקים, כמקובל, לשלוש מחלקות הראשונה כוללת תוכנות־מחשב שנבנו לצורך זה מתוצרת ארצנו נזכיר את "אנליזה תיאורית" של לוגל, ותוכנה חדשה בשם "מתמטיX" (מס' 1 ברשימת הספרות) במחלקה השנייה נמצאים המחשבונים בני התיכנות בעלי המסכון הגרפי המחלקה השלישית כוללת תכניות־מחשב פתוחות שהתלמידים יכולים לקראן ולהכניסן למחשב תכניות כאלה, בגירסאות בייסיק ישן למחשבים שונים, וכולן בנות 20 שורות קצרות, נמצאות ב"מתימטיקה מספרית לביה"ס התיכון" (מס' 2 ברשימת הספרות) בנוסף למאמר זה מופיעה תכנית Graphs קצרה ושקופה בשפת True-BASIC, שהוא בייסיק מבני מודרני מאת מחבריו של הבייסיק המקורי

נעבור לעניין עשיית־דברים־מעניינים בגרפים ברשימת הספרות שבסוף המאמר הנוכחי רשומים מספר מקורות הכוללים הצעות בתחום הנידון התחומים הזוכים לייצוג רב ביותר הם חקירת תכונות של משפחות של פונקציות, הזזות של גרפים, מבואים אל מושג הנגזרת ופתירת משוואות. ההצעות שתעלינה כאן קשורות כולן בנושא אחד, שאת משפטיו העיקריים אציג במרוכז

משפט עזר, משפט ותוצאה

משפט עזר: בין כל שתי נקודות התאפסות של פולינום $p(x)$ מתאפסת $p'(x)$ לפחות פעם אחת

הוכחה: אם הגרף של $p = p(x)$ עוזב את ציר־x, אז לפני שהוא חוזר אליו הוא עובר דרך נקודת מקסימום מקומי או מינימום מקומי

משפט: אם $p(x)$ הוא פולינום ממעלה $n \geq 1$ אז ל־$p(x) = 0$ לכל היותר n פתרונות

הוכחה: אם $p(x)$ פולינום, אז מעלת נגזרתו $p'(x)$ קטנה ב־1 ממעלת $p(x)$ מכאן שפולינום ממעלה 3 אינו מתאפס ביותר מ־3 נקודות, שאם לא כן הייתה נגזרתו, שהיא ממעלה 2, מתאפסת ביותר מ־2 נקודות כעת אנו יכולים להוכיח שפולינום ממעלה 4 אינו מתאפס ביותר מ־4 נקודות, וכן הלאה

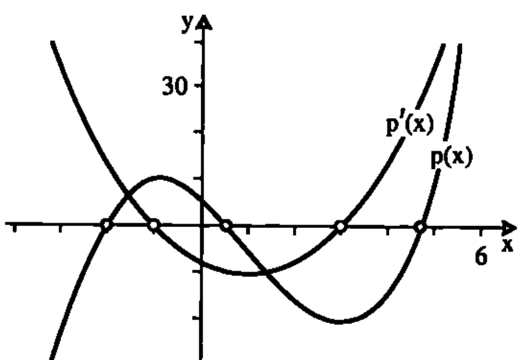
תוצאה: אם $p(x)$ פולינום ממעלה n עם $n \geq 2$, אז שום ישר אינו חותך את הגרף שלו ביותר מ־n נקודות

הוכחה: קואורדינטות x של נקודות החיתוך עם הישר $y = ax + b$ פותרות את $p(x) - ax - b = 0$

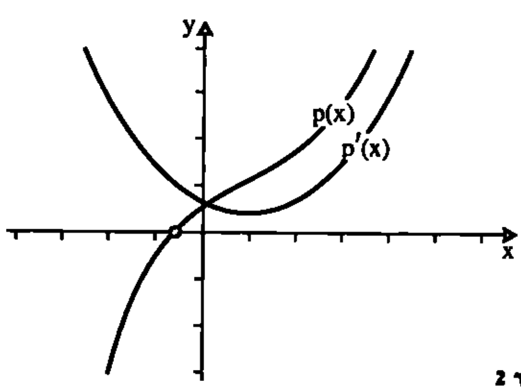
את משפט העזר, המשפט והתוצאה הצגתי כאן בסדר דחוס (הנחשב משום מה לסדר מתמטי) ולא בצורה המתאימה להוראה, משום שתוכנם מוכר, מן הסתם, לקורא, וכלל החידוש הוא בקשר שבין משפט העזר והמשפט משפט העזר אינו אלא מקרה פרטי של משפט Rolle הגבלתו לפולינומים חוסכת את הצורך להתייחס במפורש לרציפות ולגזירות המשפט העיקרי מוכח באוניברסיטאות בעזרת "חילוק ארוך" של פולינומים, משום שהוכחה כזאת טובה גם לפולינומים מעל שדה שאינו שדה המספרים הממשיים

הדגמות למשפט העזר

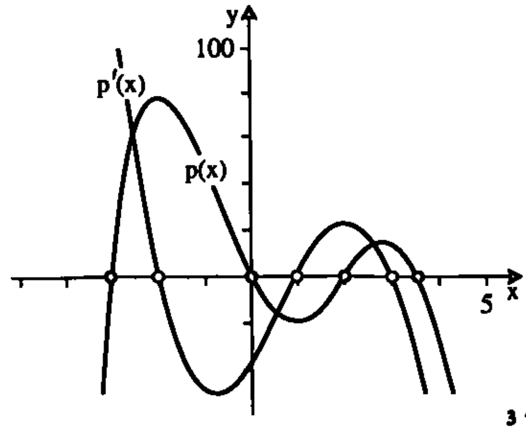
משפט העזר, כמו כל משפט, זקוק להדגמה, ובהתאם לכותרתו של המאמר הנוכחי נוסיף שכל משפט **מספק הזדמנות** להדגמה והרי ארבע דוגמאות



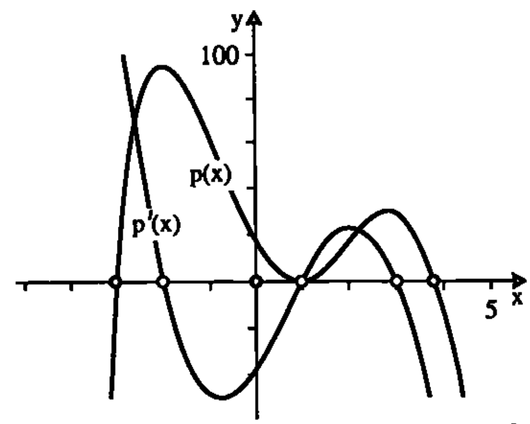
איור 1



איור 2



איור 3



איור 4

התפקידים הקלסיים של ההדגמה הם הסיוע לקליטת טענתו של המשפט והגדלת האמון באמיתותו מטרה שלישית היא לשמש נקודת מוצא לחיפוש הוכחה אם היה המאמר הנוכחי עוסק במתודיקה קלסית, הייתי מסתפק בדוגמה שבאיור 1, שבה $p(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ ו־$p'(x) = 3x^2 - 6x - 9$ ומרחיב את הדיבור על המטרה השלישית) הפעם אבקש להדגיש שדוגמה 1 יוצרת תמונה על הגרף של פולינום ממעלה שלישית וקושרת תמונה זאת בהתנהגותה של פרבולה

הפרבולה שבאיור 1 חותכת את ציר־x פעמיים, וזה מעלה את השאלה כיצד הדברים נראים כשהפרבולה אינה חותכת את הציר כלל דוגמה מסוג זה תתקבל אם נחליף את ה־"9" שבתבניות של $p(x)$ ו־$p'(x)$ ב־"+7", והיא מופיעה באיור 2 $p'(x)$ החדש אינו מתאפס בשום מקום מזה וממשפט העזר נובע ש־$p(x)$ החדש אינו יכול להתאפס יותר מפעם אחת ואמנם, $p'(x)$ תמיד חיובית לכן $p(x)$ תמיד עולה

בדרך כלל אין תלמידים מסרבים לדוגמה נוספת נציע להם אפוא את איור 3, שבו

$$p(x) = -1\ 5x^4 + 4x^3 + 15x^2 - 36x$$

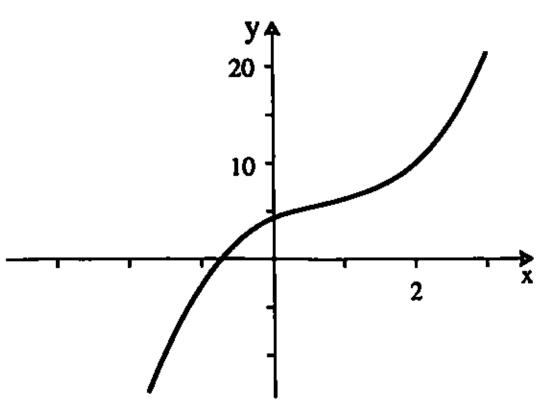
בין השאר תראה דוגמה זאת מדוע אין פולינום ממעלה רביעית יכול להתאפס ביותר מ־4 נקודות

חיבור קבוע חיובי או שלילי ל־$p(x)$ יזיז את הגרף שלו כלפי מעלה או כלפי מטה, בלי לשנות את $p'(x)$ אם נסתכל על ההזזה הזאת כעל תהליך דינמי נראה, בין השאר, שתי נקודות־אפס של $p(x)$ ההולכות ומתקרבות זו לזו, ולכן מתקרבות שתיהן אל נקודת האפס של $p'(x)$ אשר ביניהן באיור 4 מתואר מצב־ההתלכדות מצב זה מתקבל כשהקבוע שנוסף ל־$p(x)$ של איור 3 הוא 18.5 גם מצב זה וגם המצב שבו נעלמות שתי נקודות־אפס של $p(x)$, מראים שמספר ההתאפסויות של הנגזרת יכול להיות גדול מהמינימום הנדרש במשפט העזר

שלוש בעיות דומות, חמישה פתרונות שונים

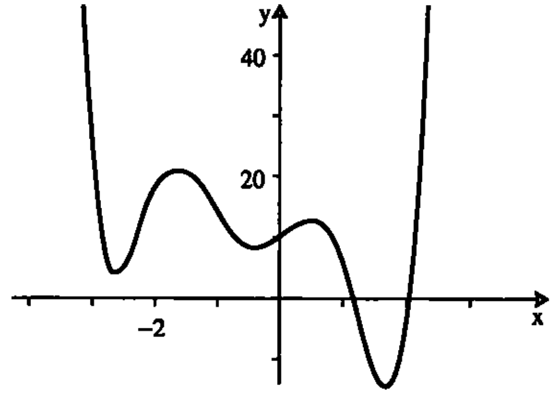
המשפט העיקרי שלעיל מוכר לתלמידים הרבה לפני ידיעת הוכחה כלשהי שבשבילו מורים מספרים אותו, בדרך כלל, עם הטיפול במשוואה ריבועית, כי הוא עונה שם לשאלה המתבקשת מאליה בזמננו קיבל המשפט חשיבות נוספת עם כניסתם של המחשבים יכולים אנו לפתור משוואות רבות ושונות בדרך גרפית או בשיטות קירוב שונות או בשילוב של שני אלה פתירה כזאת מעלה את השאלה אם הגענו אל כל הפתרונות משפטנו, יחד עם התוצאה שאחריו, יכולים לפעמים לספק את התשובה

בשלושת האיורים הבאים מופיעים גרפים פולינומיאליים שכל אחד מהם חותך את ציר ה־x במספר נקודות הקטן מן המעלה, וכל אחד מהם מעלה את השאלה מנין לנו שהמשכו של הגרף אינו חוזר ופוגש בציר x



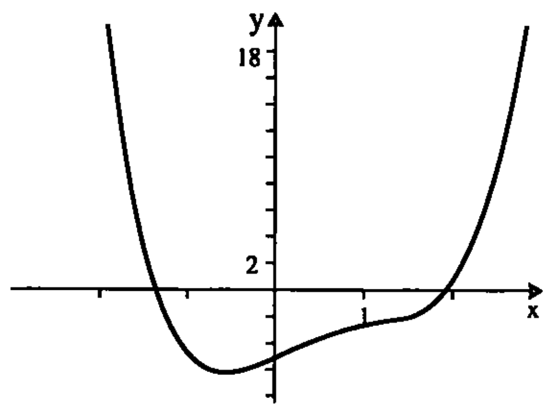
$y = x^3 - 2x^2 + 3x + 4$

איור 5



$y = x^6 + 3x^5 - 5x^4 - 15x^3 + 4x^2 + 8x + 10$

איור 6



$y = x^4 - 2x^3 + 3x - 5$

איור 7

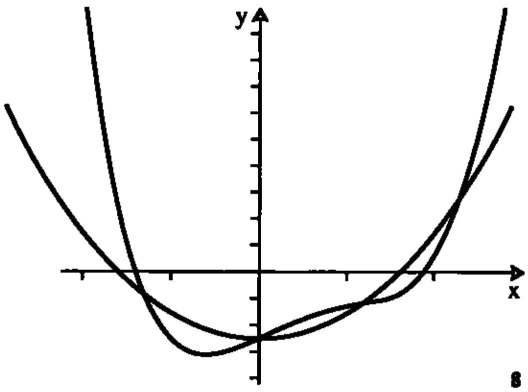
תשובה בשביל איור 5 אפשר להעביר ישר החותך את הגרף בשלוש נקודות, באופן שהמשך הגרף אינו יכול להגיע אל ציר x בלי לפגוש ישר זה פעם נוספת

קו ישר שימלא תפקיד דומה בשביל איור 6 חייב להקביל לציר x הוא חייב להימצא בצדו האחד של הציר, כי שני הענפים "הקטועים" של הגרף הם בצד אחד של הציר הישר $y = 10$ מתאים לצורכנו כי הוא חותך את הגרף בשש נקודות

תשובה אחרת (לשאלה הקשורה באיור 6) הגרף כולל חמש נקודות מקסימום או מינימום כדי להיפגש עם ציר x פעם נוספת חייבת אחת הזרועות של הגרף להתכופף כלפי מטה, וזה יתן נקודת מקסימום נוספת באופן זה יהיו לנגזרת שש נקודות שבהן ערכה 0, בניגוד לזה שהיא ממעלה חמישית בלבד

השאלה המוצעת באיור 7 זקוקה לפתרון יותר מתוחכם הבה נציע אותה בצורה המצביעה על פתרון אחד כזה

תרגיל (מוצע לפתרון ליד המחשב) מצא פרבולה החותכת את הגרף שבאיור 7 בארבע נקודות, ואינה מאפשרת להמשך הגרף להתכופף ולפגוש שוב בציר x בלי לפגוש בפרבולה תחילה פתרון אחד הוא $y = 2x^2 - 5$ (ראה איור 8)

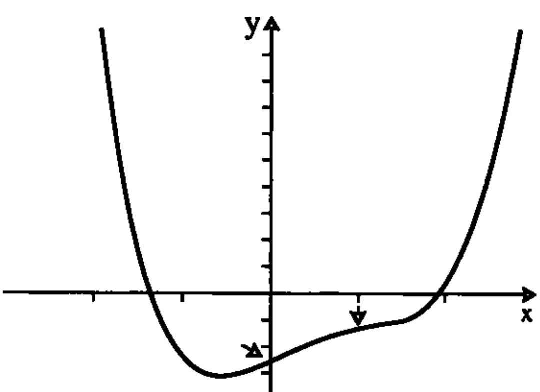


איור 8

פתרון אחר לשאלת מספר ההתאפסויות של

$p(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 5$

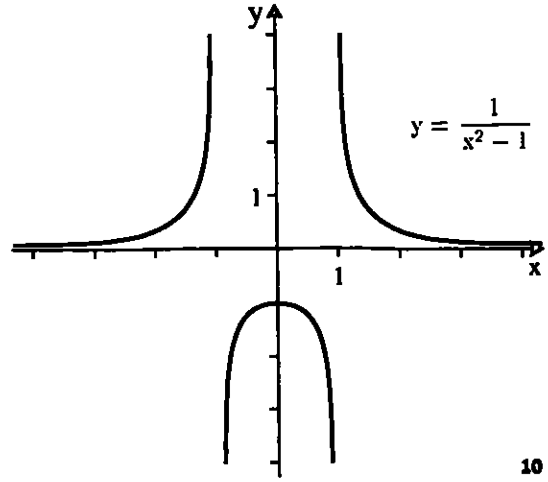
הוא כדלקמן באיור 7 אפשר לזהות שני מעברים מקמירות לקעירות או להיפך (ראה חצים באיור 9) במקומות כאלה משנה $p'(x)$ את כיוונה (מעלייה לירידה או להיפך), לכן $p''(x)$ מחליפה שם את סימנה (מחיובי לשלילי או להיפך) בנקודות המעבר עצמן $p''(x) = 0$ מכיוון ש־$p''(x)$ היא ממעלה שנייה, לא יכולות להיות ל־$p(x)$ יותר משתי נקודות מעבר כאלה, לכן אין הגרף שלה יכול להתכופף ולחזור אל ציר ה־x



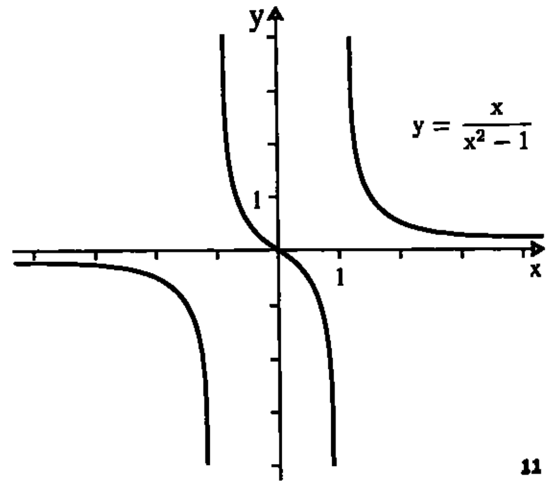
איור 9

שש בעיות ופתרון אחד

עיון בשני האיורים הבאים מראה ששום קו ישר אינו חותך את הגרף של $y = 1/(x^2 - 1)$ או של $y = x/(x^2 - 1)$ ביותר משלוש נקודות, ושום גרף של פונקציה ממעלה שנייה (פרבולה) אינו חותך אחת מהן ביותר מארבע נקודות, ושום גרף של פולינום ממעלה שלישית אינו חותך אחת מהן ביותר מחמש נקודות התוכל להוכיח זאת?



איור 10



איור 11

לשש הטענות שהעלינו לעיל הוכחות אלגבריות דומות מאוד הצד הגרפי מגוון יותר בשביל כל אחד משש הצירופים (מ־$1/(x^2 - 1)$ עם פונקציה קווית עד $x/(x^2 - 1)$ עם פונקציה ממעלה שלישית) אפשר לבקש מהתלמידים

א לשרטט סקיצה עם מספר נקודות־חיתוך מקסימלי

ב למצוא את מספרן המינימלי של נקודות החיתוך

תרגיל (ליד המחשב)

א שרטט את הגרפים של $y = x/(x^2 + 1)$ ושל $y = 1/(x^2 + 1)$ הסבר מדוע הם כה שונים משני הגרפים דלעיל

ב נסה לשער מראש כיצד ייראו הגרפים של $y = 1/(x^2 - 2)$ ושל $y = x/(x^2 - 2)$ בדוקי

ג שרטט את הגרף של $y = x/(x^2 - 1)$ למי משני הגרפים דלעיל הוא דומה ובמה הוא שונה ממנו? מצא הסבר אלגברי

```
INPUT PROMPT "a < x < b a,b = ";a,b
INPUT PROMPT "c < y < d c,d = ";c,d
SET WINDOW a,b,c,d
PLOT a,0, b,0
PLOT 0,c, 0,d
FOR x = a TO b STEP (b - a)/1000
  PLOT x, -x ^3 - 2*x ^2 + 3*x + 4
  IF x > -2 THEN PLOT x, SQR(x + 2)
NEXT x
END
```

a, b, c ו־d שהתכנית "מבקשת" הם גבולות הצירים התכנית תשרטט את הגרפים של $-x^3 - 2x^2 + 3x + 4$ ו־$\sqrt{x + 2}$ אפשר, כמובן, להחליפן בפונקציות אחרות ולהוסיף פונקציות התנאי שלפני פקודת השרטוט של השורש מגן בפני השגיאה שבדרישה לחשב שורש של מספר שלילי אין צורך בהגנה מפני יציאה אל מחוץ לגבולות המסך

True-BASIC קיים בשביל IBM PC ומשפחתו, Atari ST, Amiga, Macintosh ו־Next גירסה לסטודנטים, ל־PC ול־Mac מוצעת כעת במחיר 16$ בלבד (זו התקבלה מהגירסה הרגילה על־ידי הגבלת save לתכניות של עד 250 שורות בלבד)

קריאת תיגר באוזני חובבי שפות תיכנות אחרות כתבו תכנית־גרפים קצרה או שקופה מזו

רשימת ספרות

[1] מתמטיX, י׳ דלין — תעשיות תוכנה (03-5492370)

[2] ע׳ ארליך, מתימטיקה מספרית לביה״ס התיכון הוצאת רמות, אוניברסיטת תל־אביב

[3] חנה פרל, מתמטיקה עם מחשבון גרפי המרכז להוראת המדעים, האוניברסיטה העברית

[4] ע׳ ארליך, מתמטיקה בעידן המחשב — אנליזה לכתה י׳ המרכז להוראת המדעים, אוניברסיטת תל־אביב