מניסיונה של מורה

האם תלמידינו מעדיפים לחַשֵּׁב או לחשוב?

אורית חזן
המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים, הטכניון

1. הקדמה

כמורים למתמטיקה אנו מודעים לעובדה כי השאלות שתלמידינו עונים עליהן, הן בבחנים והן בבחינת הבגרות, הן שאלות סטנדרטיות ובדרך־כלל אלגוריתמיות באופיין כלומר, נהוג לתת בבחנים שאלות שבהן התלמיד "פותר בעיה הדומה לבעיות רבות שפתר בעבר במצבים כאלה תהיה נטייתו לפתור את הבעיה מבלי להעמיק במושגים ובתכנים המעורבים בבעיה הוא יפעיל כמעט באופן אוטומטי תהליך מוכר המשמש לפתרון בעיות מהסוג אליו שייכת, על־סמך התרשמות שטחית, הבעיה הנתונה " (וינר 1993, עמ' 21)

שאלות כאלה **אינן** מעוררות אצל התלמידים מוטיווציה לתפוס מושגים מתמטיים תפיסה מבנית, ועלולות לגרום לתלמידים להסתפק בתפיסה תהליכית במונחים "תפיסה תהליכית" ו"תפיסה מבנית" מתארת ספרד שתי צורות שבהן נתפסים מושגים בכלל ומושגים מתמטיים בפרט "התפיסה המבנית, נטולת מידד וזמן, כרוכה בהפשטה מסדר גבוה יותר מזו הנדרשת לגיבושה של התפיסה התהליכית" (ספרד 1989, עמ' 22-23) בנוסף, "התפיסה המבנית, בהיותה 'דחוסה' ו'חסכונית', מייעלת את החשיבה המתמטית ומנווטת תהליכים קוגניטיביים מורכבים" (ספרד 1990, עמ' 35) אם כך, ברור למדי שאנו צריכים לשאוף לפתח אצל תלמידינו תפיסה מבנית אלא שסוג השאלות שנהוג להציג במבחנים אינו תורם להתפתחות תפיסה כזו

ברשימה זו אתאר סדרת אירועים, כדי להצביע על כך שתשובות התלמידים מושפעות מאופי השאלות שהם נשאלים בבחנים כלומר, כאשר לתלמידינו מוצגות שאלות שאחת מהדרכים לפתרונן היא על־ידי הפעלת מתכון או אלגוריתם ידוע, הם פותרים את השאלה בדרך שמציע האלגוריתם התלמידים מפעילים את האלגוריתם למרות שאם היו מעמיקים בניתוח השאלה, היו יכולים "לחסוך" מעצמם עבודה רבה לעומת זאת, כאשר מוצגת לתלמידים שאלה שאי־אפשר לענות עליה על־ידי הפעלת מתכון ידוע, הם מנתחים תחילה את מרכיבי השאלה ועונים תשובות המשקפות את ניתוח המושגים המעורבים לדעתי, שאלות **הגורמות לתלמידים לנתח את המושגים המעורבים בהן, מפתחות אצל התלמידים תפיסה מבנית של מושגים אלה**

בשנת הלימודים תשנ"ג לימדתי מתמטיקה בכיתה יב בהיקף של ארבע יחידות לימוד בסוף שנת הלימודים התלמידים נבחנו על היחידה הרביעית של בחינת הבגרות — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי כדי לצאת משגרת השאלות שהתלמידים רגילים להן, החלטתי לכלול במבחן שאלה "שגרתית למחצה", והיא מופיעה במסגרת 1 בחרתי לכנות את השאלה "שגרתית למחצה" משתי סיבות

1 התלמידים מצאו דרך לפתור את השאלה בדרך השגרתית (על־ידי חקירת פונקציה)
2 בבחינות הבגרות אין שאלות רבות מסוג זה כוונתי אינה לואריאציות של שאלה זו, כיוון שאז גם שאלות מסוג זה היו הופכות לשגרתיות, לשאלות שאפשר לפתור אותן על־ידי ביצוע מתכון כוונתי היא לשאלות שהתשובות עליהן איכותיות (איכותי בניגוד לכמותי) ולפתרונן לא די בהפעלת אלגוריתם ידוע

במסגרת תרגיל בית לאחר המבחן, התלמידים ענו על השאלה המוצגת במסגרת 2 גם על שאלה זו ענו התלמידים בדרך־כלל על־ידי חישוב כל הסעיפים בחקירת פונקציה

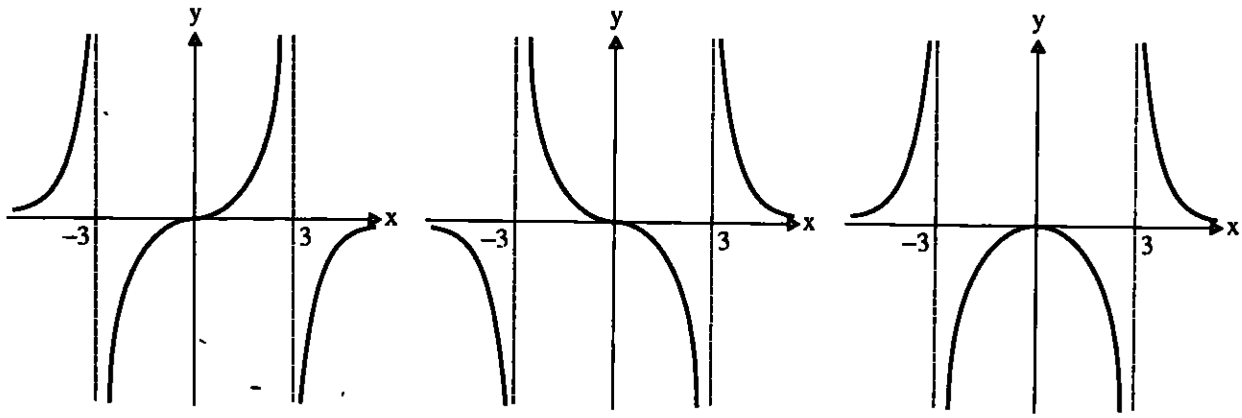
לאחר שהתופעה חזרה על עצמה פעמיים החלטתי להציג בפני התלמידים שאלה איכותית, שלא יהיה אפשר לענות עליה על־ידי הפעלת האלגוריתם הידוע השאלה חייבה את התלמידים לדון בתכונותיהם של עצמים מתמטיים על־ידי הדיון בתכונות העצמים, התכוונתי "לכפות" על התלמידים תפיסה מבנית של המושגים הנידונים בשאלה ואכן, תשובות התלמידים הצביעו על כך כי חלקם אכן התייחס למושגים הנידונים בשאלה כאל עצמים והפגין בתשובותיו תפיסה מבנית של עצמים אלה

עובדה זו מעודדת, כיוון שהיא מראה שקיימות שאלות המובילות אל חשיבה איכותית, שלשם פתרונן לא די בהפעלת אלגוריתם ידוע, ויחד עם זאת תורמות לכך שתלמידינו יתפסו מושגים מתמטיים תפיסה מבנית

מסגרת 1

נתונה הפונקציה $f(x) = \dfrac{x}{(x-3)(x+3)}$

אלו מהגרפים הבאים **אינם** הגרפים של הפונקציה הנתונה? **נא לנמק**



ג.   ב.   א.

2. השתלשלות העניינים

2.1 שלב ראשון: הפתעה — תלמידים עובדים קשה יותר מהנחוץ

באחד הבחנים במהלך השנה נכללה השאלה המוצגת במסגרת 1. שאלה זו שונה במקצת מהשאלות הניתנות בדרך־כלל בבחינות. בדרך־כלל התלמידים מתבקשים בבחינות (בכלל ובבחינות הבגרות בפרט) לחקור פונקציה מסוימת על־פי תחום הגדרה, נקודת חיתוך עם הצירים, תחומי עלייה וירידה, נקודת מינימום ומקסימום, נקודת פיתול, תחומי קעירות וקמירות, אסימפטוטות. בסיום החקירה על התלמיד לצייר סקיצה של גרף הפונקציה.

כאשר הערכתי את זמן הפתרון של השאלה חשבתי על הפתרון הקצר הבא בדומה לתלמידים, הנחתי, שאחד הגרפים מתאר את גרף הפונקציה הנתונה.

מתוך התבוננות בגרפים הנתונים אפשר לראות כי לכל הגרפים אותו תחום הגדרה ולכולם אותה נקודת חיתוך עם הצירים — לכן (מתוך הנחה שאחד הגרפים מתאר את הפונקציה הנתונה) מיותר לחקור את תחום ההגדרה של הפונקציה ואת נקודת החיתוך של הגרף עם הצירים. לכן, נבדוק את תחומי העלייה והירידה או את נקודת המינימום והמקסימום. לגרף א יש נקודת מקסימום ולכן הפונקציה שאותה הוא מתאר עולה בחלק מתחום הגדרתה ובחלקו יורדת. גרף ב מתאר פונקציה יורדת בכל תחומה ואילו גרף ג מתאר פונקציה עולה בכל התחום. לכן הגיוני לבדוק את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

מבחינה טכנית, כל הדרוש לשם כך הוא לגזור את הפונקציה. נגזרת הפונקציה היא $f'(x) = \dfrac{-x^2-9}{(x^2-9)^2}$ אפשר לראות כי הנגזרת שלילית לכל x בתחום ההגדרה, ולכן הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה. לכן גרף א וגרף ג אינם יכולים להיות הגרפים של הפונקציה הנתונה ואילו גרף ב מתאר את הפונקציה הנתונה.[1]

לסיכום, כדי לפתור את השאלה, יש להתבונן בשלושת הגרפים ולנתח את ההבדלים ביניהם. ניתוח זה מוביל לכך שכל שנותר הוא לגזור את הפונקציה הנתונה ולבדוק את סימן הנגזרת. השיטה נראית פשוטה, אבל תלמידה אחת בלבד, **דפנה**,[2] בדקה רק תכונות רלוונטיות. היא ענתה על השאלה על־ידי דיון בנקודת מינימום ומקסימום ובתחומי עלייה וירידה, וזאת תשובתה:

---

1 בהנחה שאחד הגרפים הוא הנכון יש פתרון פשוט עוד יותר, ללא שימוש בחשבון דיפרנציאלי כלל

$$f(x) = \frac{x}{(x-3)(x+3)} = \frac{x}{x^2-9}$$

מתבנית הפונקציה רואים כי $f(x) > 0$ בשביל $x > 3$ ו־$f(x) < 0$ בשביל $x < -3$. משום כך ברור כי הגרפים א ו־ג אינם יכולים להיות הגרפים של הפונקציה הנתונה. אולם כדי להוכיח שגרף ב הוא המתאים יש צורך בבדיקת תכונות נוספות בעזרת חשבון דיפרנציאלי

2 השמות המופיעים ברשימה זו הם בדויים

$$f(x)=\frac{x}{(x-3)(x+3)}=\frac{x}{x^2-9}$$

$$y'=\frac{(x-3)(x+3)-2x^2}{[(x-3)(x+3)]^2}=\frac{-x^2-9}{(x^2-9)^2}$$

$$[(x-3)(x+3)]'=(x+3)+(x-3)=2x$$

$$y'=0$$

$$x^2-9-2x^2=0$$

$$-x^2-9=0$$

$$x^2=-9$$

$$x=\emptyset$$

אין נקודת מינימום ומקסימום ולכן נפסלת אפשרות א אשר יש לה נקודת מקסימום ב־(0,0) הפונקציה אף פעם לא עולה משום שהמכנה תמיד חיובי והמונה תמיד שלילי (של הנגזרת ה־I) ולכן הנגזרת תהיה תמיד שלילית כלומר, הפונקציה יורדת תמיד וגרף ג נפסל

גרף ב הוא המתאים ביותר והוא הנכון

שאר התלמידים טרחו הרבה מעבר לנדרש — הם התייחסו לשאלה כאל שאלת חקירת פונקציה ובדקו סעיפים מיותרים שלא הוסיפו מידע המבדיל בין הגרפים

ייתכן כי התלמידים בדקו סעיפים נוספים כדי להיות בטוחים שאחד מהגרפים אכן מתאר את הפונקציה הנתונה אולם גם כאשר התלמידים התבקשו לפתור את השאלה המוצגת במסגרת 2, שבה נאמר במפורש כי אחד הגרפים מתאר את הפונקציה הנתונה, תלמידים רבים חקרו סעיפים שלא תרמו דבר בנוסף, סדר חקירת הסעיפים היה דומה לסדר הסעיפים בתשובותיהם לשאלה המוצגת במסגרת 1 כלומר לסדר שבו נהוג לחקור פונקציה באופן מסורתי

אם התלמידים היו חפצים לבדוק שאכן אחד מהגרפים הוא גרף הפונקציה הנתונה, הגיוני יותר היה למצוא תחילה את הגרפים שאינם יכולים לתאר את הפונקציה הנתונה בכל אחת מהשאלות רק לאחר מכן, כדי לוודא כי אכן הגרף שאינו נפסל מתאר את גרף הפונקציה הנתונה, יש להמשיך ולבדוק את נקודות החיתוך עם הצירים והאסימפטוטות — שתי תכונות שאינן מבדילות בין הגרפים בכל שלושת השאלות

לכן, אני מניחה כי התלמידים יצאו מההנחה שאחד הגרפים מתאר את הפונקציה הנתונה המשפט האחרון בתשובתה של **דפנה** אכן מעיד על כך כי היא הניחה הנחה זו

תלמידים רבים רמזו כי סעיפים מסוימים מיותרים אך למרות זאת המשיכו והלכו במסלול הבטוח של בדיקת הסעיפים בסדר שהם רגילים לחקור פונקציה כך למשל, **אלה** בודקת אחרי כל סעיף אם אפשר לפסול את אחד הגרפים כלומר, היא הייתה מודעת לרעיון הפסילה על־פי תכונות שאינן מתאימות לחלק מהגרפים, אך בחרה ללכת במסלול הבטוח שהיא רגילה לו

$$f(x)=\frac{x}{(x-3)(x+3)}$$

הפונקציה מתממשת כאשר $(x-3)(x+3)\neq 0$

$\rightarrow x\neq 3\,,\ x\neq(-3)$

האסימפטוטות $x=3\quad x=(-3)$

לפי נתון זה כל שלושת הגרפים מתאימים, לכן נבדוק נקודות חיתוך עם הצירים

כאשר $x=0$

$$f(x)=\frac{0}{(0-3)(0+3)}=0$$

(0,0)

כאשר $y=0$

$$0=\frac{x}{(x-3)(x+3)}$$

$0=x$

(0,0) .

נקודת החיתוך עם הצירים (0,0)

עדיין נתון זה לא סותר את קיום של גרף כלשהו יש לבדוק את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה כמו־כן אם יש לה נקודת קיצון [ ]

תלמיד אחר, **ארז**, בודק את תחום ההגדרה של הפונקציה לאחר מכן פונה לבדוק נקודות קיצון הוא מגיע למשוואה $x^2=-9$ ואומר

x^2 אף פעם לא יכול להיות שלילי כי x^2 תמיד חיובי לכן אין לו [לה] נקודות קיצון

לאחר מכן **ארז** ממשיך לסעיף האסימפטוטות — סעיף שלא יתרום לו דבר בסיום חקירת הסעיף "תחומי עלייה וירידה" הוא אומר לכן הפונקציה תרד כמובן שבשלב זה כבר אפשר להחליט מי לא יכול להיות גרף הפונקציה, אך **ארז** ממשיך לחקור את נקודת החיתוך עם הצירים **ארז** מסכם באמרו

הגרפים שאינם הגרפים של הפונקציה הנתונה הם א, ג, משום שבגרף א מתקבלת נקודת קיצון בנקודה (0,0) אך אנו מצאנו שאין נקודת קיצון כמו כן מצאנו שהפונקציה תמיד יורדת אך בגרף א יש גם פונקציה עולה בתחום בין $-3<x<0$ ו־$x<-3$

גרף ג לא נכון משום שקיבלנו שהפונקציה היא פונקציה יורדת אך בגרף ג יש גרף עולה בתחום $\{x<-3\}$ ו־$\{x>3\}$ וגם $\{-3<x<3\}$ כן הגרף הנכון של הפונקציה הוא גרף ב משום שגרף הפונקציה יורד והכל תואם את הנתונים שמצאתי

הערה: ארז משתמש במונח "פונקציה" או "גרף" לתיאור אחד ממרכיבי הגרף, כלומר, הוא רואה בגרף של פונקציה לא רציפה מספר פונקציות בנקודה זו אדון בהמשך

מסיכום תשובות כל התלמידים לשאלה 1 מתברר, כי תשעה־עשר תלמידים בחרו לענות על שאלה זו מתוכם, שמונה־עשר תלמידים בדקו תחום הגדרה (כולם חוץ **מדפנה**), ארבעה־עשר תלמידים מצאו את נקודות החיתוך עם הצירים, ואחד־עשר תלמידים ציינו מהן האסימפטוטות עובדה זו מדגישה עד כמה הרגישו התלמידים צורך בבדיקת כל הסעיפים, גם סעיפים שאינם מבדילים בין הגרפים

עם חלק מהתלמידים שוחחתי לאחר, זמן מה ביקשתי מהם להסביר את הפתרון ושאלתי אותם שאלות הבהרה בחרתי לראיין את **הדס** כאשר **הדס** פתרה את השאלה היא החלה בחקירת תחום ההגדרה לאחר מכן גזרה את הפונקציה כדי למצוא נקודות מינימום ומקסימום היא השוותה את הנגזרת ל־0 היא הגיעה למשוואה $x^2 = -9$ וסיכמה אין פתרונות ממשיים — אין נקודות מינימום או מקסימום — גרף א פסול כדי למצוא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה חקרה **הדס** את האי־שוויון $-x^2 - 9 > 0$ וסיכמה מצב זה לא ייתכן ולכן נסיק שהפונקציה תמיד יורדת, בגרף ג כל הפונקציות עולות ולכן הוא פסולי **הדס** ראתה כי כבר כאן היא יכולה לסכם הפונקציה הנתונה מתארת גרף ב, מפני שבו כל הפונקציות יורדות

הערה: גם הדס מתייחסת לכל אחד ממרכיבי גרף הפונקציה כאל פונקציה בפני עצמה

למרות סיכום זה המשיכה **הדס** ומצאה גם את נקודות החיתוך עם הצירים ואסימפטוטות מקבילות ומאונכות לציר x
ביקשתי ממנה להסביר את הפתרון שהציעה ואת תפקידו של כל סעיף לפי הסדר הגענו גם לשני הסעיפים שאותם המשיכה לחקור לאחר שהחליטה כבר מהו גרף הפונקציה שאלתי אותה

למה בדקת נקודות חיתוך עם הצירים?

הדס סתם אני זוכרת שאחר־כך הצטערתי שהוספתי זאת, מפני שזה מיותר? התעלמתי מהפתגם "כל המוסיף גורע" סתם רציתי להוסיף, כי עד עכשיו מה שכתבתי נראה לי קצר מדי ידעתי שלא צריך, אבל הוספתי

לפני שאמשיך ברצוני להתייחס לצורת ביטוי שכמה תלמידים השתמשו בה ראינו כי גם **ארז** וגם **הדס** מתייחסים לכל אחד ממרכיבי גרף הפונקציה כאל פונקציה בפני עצמה כדי להבין טוב יותר צורת התבטאות זו, החלטתי לשאול את **הדס**

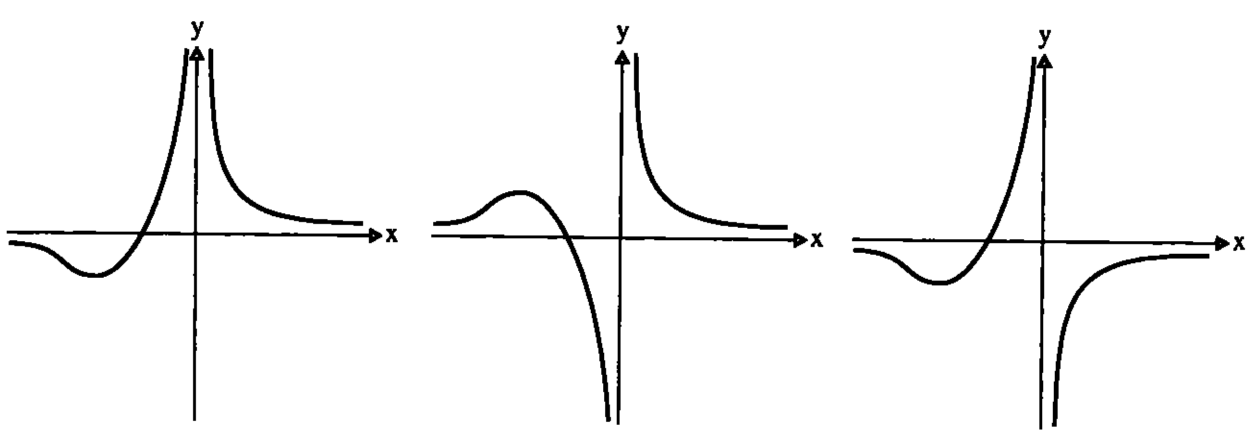
למה את מתכוונת כשאת אומרת "כל הפונקציות עולות"?

הדס כש־x גדל — y גדל זה, בעיקרון, פונקציה אחת, אך משום שיש שלושה גרפים, התייחסתי לפונקציה בגוף רבים דבריה של **הדס** משקפים נתק בין פונקציה ובין הגרף שלה היא רואה בפונקציה ובגרף של הפונקציה דברים שונים לכן, יש פונקציה **אחת** אבל **שלושה** גרפים

מסגרת 2

נתונה הפונקציה $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2}$ ושלושה גרפים אחד מהם מתאר את הפונקציה הנתונה

זהה את שני הגרפים **שאינם** מתארים את הפונקציה ונמק את תשובתך



א.   ב.   ג.

2.2. שלב שני: גם בביתם התלמידים מפעילים את האלגוריתם הבטוח

בשלב זה החלטתי לבדוק אם הבדיקות הנוספות והמיותרות נבעו מכך שהשאלה ניתנה במבחן, מצב שבו התלמידים מנסים להראות את כל מה שלמדו. לכן, ביקשתי מהתלמידים להכין תרגיל בית בסגנון דומה להגשה (מסגרת 2). שאלה זו לקוחה מבחינת הבגרות של תלמידי שלוש יחידות לימוד הלומדים לפי תכנית הלימודים החדשה שנערכה בקיץ תשמ"ו. גם בתרגיל בית זה התשובות היו בעלות סגנון דומה. בחרתי לראיין את **אלון**. מדרך פעולתו של **אלון** אפשר לראות כי הוא התייחס לתכונות המבדילות בין הגרפים. הוא מצא תחילה נקודת קיצון ב־$\left(-4, -\frac{1}{8}\right)$. לאחר מכן חקר **רק** את נקודות החיתוך עם ציר x. לאחר מכן פנה **אלון** לחקור את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה ומצא כי הפונקציה עולה בתחום $-4 < x < 0$ ויורדת בתחומים $x < -4$ ו־$x > 0$. לאחר מכן **אלון** סיכם:

גרף א נפסל מאחר שהוא עולה ב־$x > 0$
גרף ב נפסל מאחר שהוא יורד ב־$-4 < x < 0$

למרות שברור כי בשלב זה היה אפשר להסיק כי גרף ג מתאר את גרף הפונקציה, ובשאלה זו נאמר במפורש כי אחד הגרפים הוא גרף הפונקציה הנתונה, **אלון** המשיך ובדק אם נקודת הקיצון שמצא היא נקודת מינימום או נקודת מקסימום. הוא מצא כי היא נקודת מינימום וסיכם: מכאן נובע שגרף ג הוא הנכון.

שאלת בית זו ניתנה כארבעה חודשים לפני בחינת הבגרות. כמה ימים לפני בחינת הבגרות ראיינתי אותו על תשובתו לשאלה. לאחר שהסביר את שלבי הפתרון שאלתי אותו:

המורה: למה אחרי שפסלת את א ואת ב המשכת עם נגזרת שנייה?

אלון: כדי להיות בטוח שהתשובה שנתתי מלאה ואפשרויות הפסילה יהיו מלאות, כך שיהיה ברור שפסלתי לחלוטין את תשובה ב.

המורה: מה זה לפסול לחלוטין?

אלון: באותו שלב של לימודי המתמטיקה לא הייתי בטוח לחלוטין למרות שמבחינה הגיונית הספיקה הפסילה הראשונה. המשכתי גם לנגזרת שנייה כדי להראות בבירור שתשובה ב אינה תואמת את המגבלות שאותן הצבתי בתחומי עלייה וירידה, מאחר שאחרי תחום עלייה לא יכולה לבוא נקודת מינימום. לכן על־ידי נגזרת שנייה הוכחתי ששאלה ב [הכוונה לגרף ב], שבה נקודת מקסימום – פסולה.

המורה: האם גם בשלב זה היית ממשיך לבדוק אחרי שפסלת את א ואת ב?

תלמיד: לא, מאחר שכעת ברור לחלוטין גם לי ואני משער שגם לבודק ברור שהוכחתי לחלוטין שתשובה ב פסולה ולכן נשארה רק תשובה ג.

2.3 שלב שלישי: התלמידים ענייניים ומנתחים את התכונות השונות של הגרפים

בשלב זה החלטתי לתת הנחיה ישירה לבדוק תכונות של גרף פונקציה. רציתי לבדוק אם התלמידים ימשיכו בכל זאת לטעון שיש לבדוק את כל הסעיפים שהם רגילים בחקירת פונקציה, כאשר ניתנת להם שאלה בסגנון השאלות שבמסגרת 2-1. במבחן פתע חילקתי את הכיתה לשניים. חלק אחד פתר שאלה דומה לשתי השאלות הקודמות (ראה מסגרת 3), חלקה השני של הכיתה ענה על שתי השאלות הבאות המתייחסות לארבעת הגרפים שבמסגרת 3:

א. אלו תכונות מבדילות בין 4 הגרפים?

ב. תאר/י את השלבים שבהם היית בודק/ת אלו מהגרפים הנ"ל אינם גרף הפונקציה $f(x) = \frac{x}{(x-2)(x+2)}$

ההחלטה לתת לחצי כיתה לפתור שאלה הדומה לשתי השאלות הקודמות נבעה מכך שרציתי לראות אם בשאלה זו אין משהו חריג. כלומר, אם חלק הכיתה שענה על השאלה הדומה לשאלות שנוסחו בשני השלבים הקודמים ימשיך לפעול בצורה שתוארה בשלבים 2-1 (על־ידי בדיקת הסעיפים בדומה לחקירת פונקציה) אוכל להסיק כי חלקה השני של הכיתה שענה על הסעיפים א-ב לעיל אינו נעזר או מושפע מגורם שונה שלא הופיע בשתי השאלות שהתלמידים ענו עליהן בשלבים הקודמים.

מסתבר שגם כאן רוב התלמידים שקיבלו את הנוסח שכבר היו רגילים לו, חקרו סעיפים שאינם מבדילים בין הגרפים ולכן אינם תורמים דבר לפתרון השאלה. לכן היה אפשר לבחון את תשובותיהם של התלמידים שענו על הנוסח החדש מבלי לחשוש כי בשאלה זו יש משהו חריג.

ואכן הסתבר, שכאשר תשומת לב התלמידים הופנתה במפורש לעובדה שכדאי לבדוק בשלב ראשון מהן התכונות המבדילות בין הגרפים, ואז על־פי הבחנות אלה לחקור רק את התכונות המבדילות בין הגרפים, התלמידים לא ציינו בתשובתם לחלק ב סעיפים בחקירת הפונקציה שאינם מבדילים בין ארבעת הגרפים. גם כאשר הם מציינים כי יבדקו תכונות שאינן מבדילות בין ארבעת הגרפים, כמו נקודות חיתוך עם הצירים, הם מציינים כי זהו שלב בדיקה.

כך, למשל, **אורן** מסמן ב־x_1 וב־x_2 את -2 ו־2 בהתאמה ומסביר:

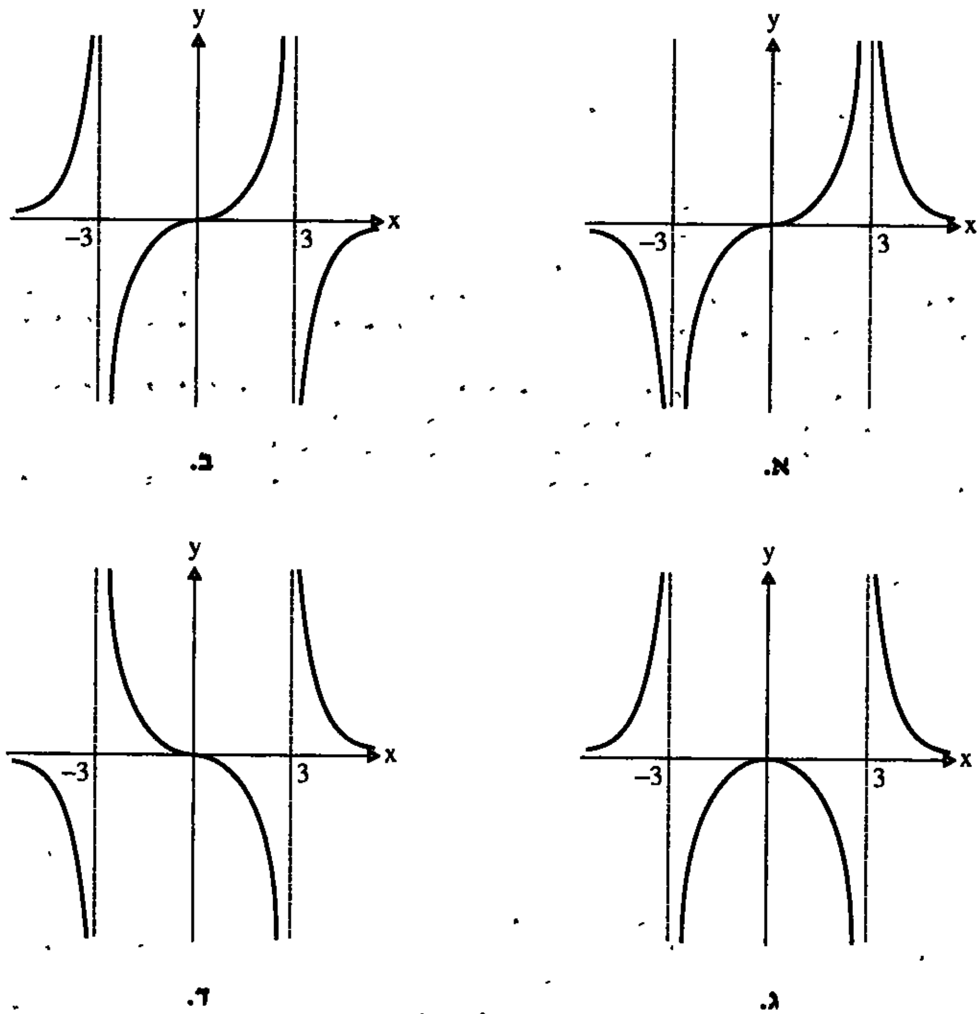
1. התכונות המבדילות בין הגרפים
   - לגרף ג יש נקודת מקסימום ולשאר הגרפים נקודת פיתול
   - גרפים א, ב, ד שונים בתחומי העלייה והירידה שלהם. גרף ד בתחום $x_2 > x > x_1$ יורד ואילו גרפים א-ב בתחום זה עולים
   - גרף א עד ל־$x = x_1$ יורד, אח"כ עולה וב־$x > x_2$ שוב יורד לעומת גרף ב שעד ל־$x = x_1$ הוא עולה. אח"כ שוב עולה וב־$x > x_2$ הוא גם עולה
2. תיאור השלבים

קודם הייתי בודק את תחום ההגדרה, לבדוק את האסימפטוטות

מסגרת 3

נתונה הפונקציה $f(x) = \dfrac{x}{(x-2)(x+2)}$

אלו מהגרפים הבאים **אינם** הגרף של הפונקציה הנתונה? נא לנמק



בשביל לראות אם בכלל קיים גרף שמתאים למשוואה [לפונקציה] לאחר מציאת האסימפטוטות ואם הן מתאימות, הייתי בודק נקודות חיתוך עם הצירים כדי לוודא שלא קיים מצב שכל הגרפים לא מתאימים לפונקציה

עד כאן זה שלב של בדיקה בלבד שאין מכשול בשלבים הראשונים — שאולי כל הגרפים לא מתאימים לפונקציה, ועתה מתחילה הסלקציה בין הגרפים

בדיקת נקודות מינימום מקסימום תבצע סלקציה בין גרף ג לכל השאר ואם אמצא שאין נקודות מינימום מקסימום, אבדוק את תחומי העלייה ב־$x = 1$ אם הגרף יורד — זהו גרף ד שמתאים לפונקציה, ואם הוא עולה בנקודה הנ״ל, זהו גרף א או ב אח״כ בודקים תחום עלייה בנקודה הקטנה מ־$x = (-2)$ ואם אמצא שהגרף שם עולה — זהו גרף ב, ואם יורד — זהו גרף א, ואז שאר הגרפים אינם הגרפים של הפונקציה

חלק קטן מהתלמידים בכל זאת המשיך במסורת בדיקת הסעיפים הרגילים לפי הסדר הנהוג בחקירת פונקציות, אחרי שניתחו את התכונות המבדילות **אילן** מתאר כל אחד מהגרפים תוך התייחסות רק לתחומי העלייה והירידה ולקיום/אי־קיום נקודות פיתול ונקודות מינימום ומקסימום — התכונות המבדילות בין הגרפים,

אבל מייד לאחר מכן, בסעיף ב, מונה את כל הסעיפים שהיה בודק בדיוק כמו בחקירת פונקציה

1 א הפונקציה **מימין** היא פונקציה יורדת יש נקודת פיתול ב־$x = 0$ בין 2 האסימפטוטות הפונקציה עולה מצד שמאל יש פונקציה יורדת (משמאל לאסימפטוטה השמאלית)

ב בצד ימין יש פונקציה עולה, בין 2 האסימפטוטות יש נקודת פיתול ב־$x = 0$ והפונקציה עולה מצד שמאל יש פונקציה עולה

ג מצד ימין — פונקציה יורדת, נקודת מקסימום ב־$x = 0$ מה־0 ימינה הפונקציה יורדת והאסימפטוטה השמאלית לכיוון ה־0 הפונקציה עולה בצד שמאל פונקציה עולה

ד מצד ימין הפונקציה יורדת, נקודת פיתול $x = 0$, הפונקציה יורדת בין שתי האסימפטוטות, מצד שמאל יש פונקציה יורדת

2 הייתי חוקר את הפונקציה מוצא תחום הגדרה, אסימפטוטות, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודת מינימום ו/או מקסימום, תחומי עלייה וירידה וכן הייתי מציב נגזרת שנייה $= 0$ ובודק אם יש נקודת פיתול אז הייתי משרטט את גרף הפונקציה ורואה אם הוא נראה כמו א, ב, ג או ד אם אכן מצאתי הכול אז יצא לי אחד מ־4 הגרפים ולכן הייתי פוסל את שלושת הגרפים הנותרים שלא הגעתי אליהם

3. דיון

מהלך הפתרון ואופיו של הפתרון שהציגו תלמידים בשני השלבים הראשונים מצביע על נטיית התלמידים להפעיל אלגוריתמים, אפילו מורכבים, כאשר האלגוריתם מאפשר לפתור שאלה התלמידים מפעילים את האלגוריתם למרות שמחשבה תחילה וניתוח קצר יכולים למנוע מהם עבודה רבה (וכמובן גם טעויות) את נטיית התלמידים להפעיל אלגוריתמים אפשר לתלות בניסיונם המתמטי בעבר הסבר אפשרי נוסף הוא שניתוח נתוני בעיה והמושגים המופיעים בה דורש תפיסה קרובה יותר לתפיסה מבנית של מושגים אלו הפעלת האלגוריתם מאפשרת לתלמידים להימנע מלתפוס אותם תפיסה הקרובה יותר לתפיסה מבנית

בשני השלבים הראשונים נוסחו השאלות בצורה כזו שהיה אפשר להפעיל את האלגוריתם חקירת הפונקציה ולענות תשובה נכונה ומלאה בשלב השלישי, מחצית הכיתה התבקשה להתייחס לתכונות הגרף, התייחסות שדרשה מהם תפיסת המושגים נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה וכו' תפיסה קרובה יותר לתפיסה מבנית כלומר, מצד אחד היה עליהם להתייחס לתכונות הגרף ולא להפעיל אלגוריתם (כמו גזירה, השוואת הנגזרת ל־0 וכו') שאפשר להפעיל אותו גם מבלי להבין לעומק את המושגים שדנים בהם מצד שני, עדיין עמדו בפניהם תמונות של שלושה גרפים, כך שהם יכלו להתייחס התייחסות ויזואלית לתכונות גרף הפונקציה, ומתוך הסתכלות זו לענות על השאלה פתרון המבוסס על תכונות גרף הפונקציה, דורש מהתלמידים לראות כיצד משתקפות תכונות הפונקציה בגרף שלה

על כן, אחת המסקנות שאפשר להסיק מהמחקר הקטן שהצגתי היא, שאפשר לגרום לתלמידים לא להשתמש ללא מחשבה תחילה באלגוריתמים מוכרים לפתרון בעיות כמו כן, שאלות שהתשובה עליהן אינה כמותית עשויות להביא את תלמידינו לדון במושגים מתמטיים בצורה מעמיקה יותר

עדות נוספת לכך, שאת המושגים המעורבים בחקירת פונקציה תופסים התלמידים תפיסה קרובה יותר לתפיסה תהליכית, היא העובדה שהם אינם מסתפקים בתיאורים כמו "נמצא נקודת קיצון" וכו' אלא מוסיפים ומסבירים את השלבים שבהם יעבדו זאת למשל

במקום לומר "נמצא נקודות קיצון" **תמר** מסבירה "נמצא נגזרת ראשונה, נשווה אותה ל־0 ונקבל x מסוים נעשה נגזרת שנייה, נציב בה את ה־x ונראה אם הנקודה היא מינימום/מקסימום"

כאשר **עירית** רוצה להחליט בין נקודת פיתול לנקודת קיצון היא מפרטת את כל שלבי הגזירה "לפי הגרפים המצוירים רואים שאותה נקודה (0,0) היא נקודת פיתול או נקודת מקסימום לכן הייתי גוזרת נגזרת ראשונה של הפונקציה וממנה **ישר** [ההדגשה במקור] גוזרת נגזרת שנייה כדי לראות אם זוהי נקודת פיתול או נקודת מקסימום"

ברצוני להוסיף מספר מלים על הסעיף בחקירת הפונקציה הדן בתחומי קעירות וקמירות, כדי להדגים כיצד אפשר לחקור פונקציה מבלי לתפוס תפיסה מבנית את המושגים המעורבים את התחומים שבהם גרף הפונקציה קעור ואת התחומים שבהם גרף הפונקציה קמור אפשר למצוא על־ידי בדיקת סימן הנגזרת השנייה של הפונקציה כדי להבין מדוע הדבר כך, יש להסתכל על הנגזרת הראשונה כפונקציה בפני עצמה כאשר הנגזרת הראשונה נתפסת תפיסה מבנית, כ"פונקציה", אפשר לשייך לה תכונות כמו עלייה וירידה, השקולות בהתאמה לקעירות וקמירות הפונקציה שאנו חוקרים תלמיד התופס את המושג "נגזרת ראשונה של פונקציה" תפיסה מבנית, ויכול להתייחס אליה כאל פונקציה, כאל עצם מתמטי, יכול להבין מדוע תחומי העלייה ותחומי הירידה של הנגזרת הראשונה שקולים לתחומי הקעירות ותחומי הקמירות של הפונקציה המקורית

מתוך מודעות לקשיים[*] הכרוכים בתפיסת הנגזרת הראשונה כפונקציה בפני עצמה, אני מרשה לעצמי לומר לתלמידיי, לפני תחילת השיעור הדן בתחומי קעירות וקמירות, כי גם תלמידים אשר לא יבינו את כל הפרטים בדיון יוכלו לפתור סעיף זה כאשר יופיע בשאלת חקירת פונקציה כוונתי היא לגרום לתלמידים להקשיב מבלי להתייאש, אם ילכו לאיבוד או לא יבינו את כל הפרטים המעורבים בדיון זה

אני בטוחה כי מורים רבים הבודקים בחינות נתקלים בתופעות דומות אישית, הייתי שמחה מאוד אם היה מופיע בעיתון זה מדור שבו תתפרסמנה שאלות לא שגרתיות, שהתשובות עליהן איכותיות,

מכל התחומים המתמטיים הנלמדים בבית הספר התמודדות התלמידים עם שאלות מסוג זה תעזור להם להתקרב לתפיסת מושגים מתמטיים תפיסה מבנית כמובן שתמיד יש להיות מודעים לקשיים הכרוכים בפתרון שאלה, שפתרונה מחייב תפיסת מושגים מתמטיים תפיסה מבנית

4. רשימת ספרות

וינר, ש' [1993] מיומנו של מורה־חוקר, המבחן עלי"ה 13 28-21

ספרד, א' [1989] תפיסה תהליכית ומבנית אצל תלמידי תיכון, חלק 1 מושג הפונקציה עלי"ה 5 28-22

ספרד, א' [1990] תפיסה תהליכית ומבנית אצל תלמידי תיכון, חלק שני הסימול האלגברי עלי"ה 6 35-31

פיתגורס בגן הציבורי

(סיפור מכיתה ה)

רינת חדשי

הטכניון, חיפה

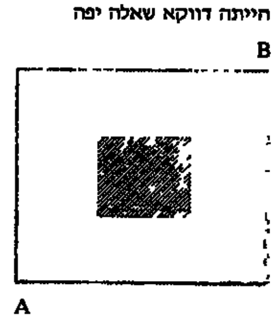
כך היינו — זכרונות מכיתת המתמטיקה

אהבתי מאוד ללמוד הנדסה כשקיבלנו שאלות על משולשים וזוויות, ראיתי בעיני רוחי את סרטוט הבעיה, ואת פתרונה כל שנותר היה לכתוב על הדף את התשובה שנצטיירה בדמיוני

אלגברה הייתה סיפור אחר לגמרי באותו זמן עסקנו רבות במניפולציות שונות של שברים חיבור, חיסור, כפל, חילוק, צמצום, ומעבר משבר מדומה לשבר מעורב המורה הייתה רושמת על כל הלוח תרגיל ענקי, מפלצתי למראה מכל צד חיו תלויים לו שברי שברים שיש לחברם או לחלקם כל מונה ומכנה התפצל בתוכו לתת־תרגילים נוספים שאף הם המשיכו להתפתח מה יש להגיד? שנאתי את הסיפור הזה, וכמעט אף פעם לא הצלחתי להגיע לתשובה הנכונה עד הסוף

לכן שמחתי כשהמורה אמרה שחצי מהשאלות במבחן תהיינה בהנדסה חשבתי, שזה נותן לי "ביטוח" הרי את החלק בהנדסה בטוח אדע, אז כבר יש לי 50 נקודות נו, וכל מה שנשאר זה להשיג את המקסימום באלגברה

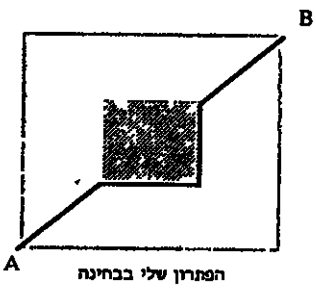
במבחן, בחלק ההנדסי, הייתה דווקא שאלה יפה



בגן הציבורי יש דשא
אתה רוצה לחצות את הגן,
מנקודה A לנקודה B,
מבלי לדרוך על הדשא
מהו אורך הדרך שעליך
לעשות?

וכמובן, שצוינו מידות הגן והמדשאה

חשבתי "המסלול הקצר ביותר מ־A ל־B הוא האלכסון, העובר בתוך המדשאה לכן, אלך על־גבי המסלול הקצר ביותר כמה שרק אפשר, עד שאגיע למדשאה ואז, אלך על שפת המדשאה, עד שאגיע שוב לנקודה שממנה אוכל לצעוד שוב על־גבי המסלול הקצר ביותר"



הפתרון שלי בבחינה

בחישוב הפתרון נדרשתי להפעיל פעמיים את משפט פיתגורס, לשם מציאת אורכי האלכסונים למרבה הצער, צעד זה כלל מציאת שורש לא שלם פעולה זו גזלה זמן רב, היות שלא הרשו שימוש במחשבוני כיס בקושי רב סיימתי את הבחינה בזמן, אך הייתי גאה על שהצלחתי לפתור את השאלה בהנדסה

בשיעור הבא פתרה המורה את המבחן על הלוח כשהגיעה לשאלת המדשאה, סימנה, להפתעתי, מסלול שונה במקצת מזה שחשבתי עליו, וחיש קל חישבה את אורכו כמובן, שבדרך שלה, כל השורשים היו קלים ומידיים

הפתרון הנכון

אחר־כך היא החזירה את המבחנים, והציון התנפץ לי בפנים המסלול השגוי בגן הציבורי הניב נקודה או שתיים (שמורים נותנים לפעמים מתוך רחמים), ולא יותר כאילו שלא ידעתי להפעיל את פיתגורס, וכאילו שלא מצאתי שורשים, וכאילו שהמסלול שלי לא היה קצר

אין ספק, בראייה הכוללת, היה לי מזל גדול שבכל זאת ידעתי גם קצת אלגברה