לימודי מתמטיקה בעולם

בחינות בגרות בצרפת

עופר ליבה
בית הספר התיכון אורט רמות ע״ש גדיש, ירושלים

מבוא

בגיליונות עלייה מס׳ 6 ו־7 (אפריל וספטמבר 1990) הצגתי את לימודי המתמטיקה בצרפת מכיתה י ועד לבגרות, תוך ניסיון לתת תמונה נאמנה על מדיניות ההוראה, הרפורמה המתמשכת, התכנים, השיטות, ההדגשים ודרכי ההגשה לצורך המחשה צורפו למאמרים דוגמאות של שאלות מתוך בחינות בגרות מתחילת שנות השמונים.

בצרפת מעדכנים את תכנית הלימודים אחת לארבע שנים בערך וכותבים ספרי לימוד חדשים בהתאם, ולכן הגיע הזמן להציג בחינות מהתקופה האחרונה ברשימה זו מובאות דוגמאות לשאלות מתוך בחינות שנערכו בשנת 1993, בשלוש המגמות הראשיות אזכיר שבצרפת אין בחינה ארצית אחידה, אלא מספר בחינות בהתאם לחלוקה לפי אזורים
הבחינה מורכבת משני תרגילים ובעיה אחת, וכל השאלות הן חובה לגבי כל מגמה אני מציג בעיה אחת ותרגיל אחד (הבעיה והתרגיל אינם לקוחים מאותה בחינה, וזאת במכוון)

ברצוני להעיר הערה אישית בימים אלו שבהם נוקטים צעדים שונים ומשונים (מאגרים, הגרלות לח״ב וכיו״ב) אשר עלולים להביא לירידה ברמה ובוודאי שאינם מוסיפים כבוד לדיסציפלינה שלנו, אשר ראויה גם חוויה לכבוד! אני מקווה שהדוגמאות אשר יוצגו כאן יגרמו לכולנו לעשות חשבון־נפש מקצועי וחינוכי־מתמטי

מגמה מדעית ראשית (EC)

בעיה (יוני 1993) (12 נקודות מתוך 20)

לכל מספר טבעי n, ולכל מספר ממשי x, מגדירים

$$f_n(x)=\frac{e^{-nx}}{e^x+1}$$

C_n הוא הגרף של f_n במערכת צירים אורתונורמאלית (10 ס״מ ליחידה)

כמו־כן מגדירים סדרה

$$u_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx$$

חלק א: חקירת הפונקציה f_n

שאלה 1

עבור $n=0$

א לקבוע את הגבולות

$$\lim_{x\to-\infty} f_0(x)\ ,\ \lim_{x\to\infty} f_0(x)$$

ב לקבוע תחומי עלייה וירידה של f_0 ולסכם בטבלה

ג להראות שהנקודה $I(0,1/2)$ היא מרכז סימטריה עבור C_0

ד לצייר את C_0 תוך קביעת המשיק בנקודה I

שאלה 2

עבור $n\geq 1$

א לקבוע את הגבולות

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x)\ ,\ \lim_{x\to\infty} f_n(x)$$

הסבר של סימנים ומונחים מיוחדים

אינטרוול פתוח או חצי פתוח

$]a,b[\ ,\ [a,b[\ ,\ [a,\infty[\ ,\ ]a,\infty[$ פירושם (בהתאמה) $(a,b)\ ,\ [a,b)\ ,$ $[a,\infty)\ ,\ (a,\infty)$

מערכת צירים

– אורתוגונאלית פירושה מערכת צירים מאונכים

– אורתונורמאלית פירושה מערכת צירים מאונכים, עם יחידות שוות על שני הצירים

גבול של סדרה

הסימון $\lim a_n$ פירושו (כמובן) $\lim_{n\to\infty} a_n$

גבול של פונקציה

$\lim_{x\to a} f$ (a מספר או $\pm\infty$) פירושו $\lim_{x\to a} f(x)$

ב להראות ש־f_n גזירה ב־R ולהראות שלכל x

$$f_n'(x) = \frac{-e^{-nx}\left[n+(n+1)e^x\right]}{(e^x+1)^2}$$

ג לקבוע תחומי עלייה וירידה של f_n ולסכם בטבלה

ד לבדוק שהנקודה I שייכת לכל הגרפים C_n

ה לצייר את C_1 (באותה מערכת צירים שבה צוירה C_0), תוך קביעת המשיק בנקודה I

חלק ב: חקירת הסדרה (u_n)

בחלק זה, n ו־p מציינים מספרים טבעיים שונים מ־0

שאלה 1

חקירת סדרת עזר (v_n)

לכל n, מגדירים

$$v_n = \int_0^1 e^{-nx}\,dx$$

א לחשב את v_n

ב לקבוע $\lim v_n$, $\lim(nv_n)$

שאלה 2

השוואת הסדרות (u_n) ו־(v_n)

א להראות שלכל $0 \le x \le 1$, מתקיים

$$2 \le e^x + 1 \le 2e^x$$

ב להסיק שלכל n, מתקיים

$$\tfrac{1}{2}v_{n+1} \le u_n \le \tfrac{1}{2}v_n$$

ג לקבוע $\lim u_n$, $\lim(nu_n)$

שאלה 3

חקירת סדרות המוגדרות באמצעות (u_n)

מגדירים את הסדרות

$$s_n = \sum_{p=1}^{n} u_p$$
$$t_n = \sum_{p=1}^{n} v_p$$

א להראות

$$0 \le \sum_{p=1}^{n} \frac{e^{-p}}{p} \le \frac{1}{e-1}$$

(רמז $e^{-p}/p \le e^{-p}$)

ב להראות שמתקיים

$$\frac{1}{p+1} \le \ln(p+1) - \ln p \le \frac{1}{p}$$

ג להסיק שלכל n מתקיים

$$\ln(n+1) \le \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \le 1 + \ln(n)$$

ד להראות (באמצעות סעיפים א, ג) ש

$$\lim t_n = +\infty$$

ולקבוע מהו

$$\lim \frac{t_n}{\ln(n)}$$

ה מה אפשר להסיק לגבי הסדרה s_n?

תרגיל (יוני 1993) (5 נקודות מתוך 20)

נתונה הסדרה

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+u_n} \end{cases}$$

שאלה 1

א להוכיח שלכל $n \ge 1$, מתקיים

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \le u_n \le 1$$

ב לחקור את מגמת ההשתנות של הסדרה ולהסיק שהסדרה מתכנסת

ג לקבוע את הגבול של הסדרה

שאלה 2

א להראות שלכל x בקטע $[0, 1]$ מתקיים

$$\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

ב להסיק שלכל n טבעי מתקיים

$$u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

ג בהסתמך על הסעיף הקודם, לקבוע שוב את הגבול של הסדרה

מגמה מדעית בינונית (D)

בעיה (יוני 1993) (11 נקודות מתוך 20)

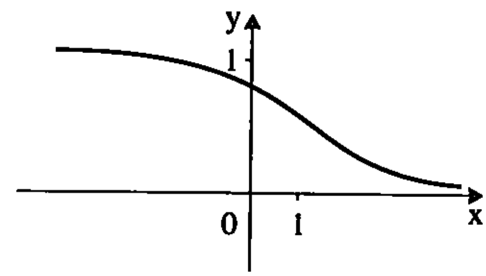
תהי f פונקציה על R המוגדרת על־ידי

$$f(x) = \frac{\ln(1+e^x)}{e^x}$$

המישור מצויד במערכת צירים אורתוגונאלית $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, כאשר היחידות הן 1 ס"מ על ציר ה־x, 5 ס"מ על ציר ה־y

(C) היא ההצגה הגרפית של f במערכת זו

הציור הבא הוא ההצגה הגרפית של f במערכת צירים אורתוגונאלית אשר אינה מצוידת ביחידות הנ"ל



חלק א

שאלה 1

לחשב את הנגזרת f' של f על R להראות שלכל x ממשי, $f'(x)$ היא בעלת אותו סימן כמו

$$g(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x)$$

שאלה 2

א לחשב את $g'(x)$

ב לקבוע מהו $\lim\limits_{x\to-\infty} g$

ג לקבוע את מגמות ההשתנות של הפונקציה g

להסיק מתוך השאלות הקודמות מהו סימנה של $f'(x)$

שאלה 3

לקבוע מהם הגבולות של f ב־$+\infty$ וב־$-\infty$.

ניתן להעזר בעובדות הבאות

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \ , \ \lim_{x\to\infty}\frac{(1+e^x)}{x} = 1$$

לבנות את טבלת ההשתנות של f

חלק ב

שאלה 1

לקבוע את ערכם של המספרים a, b כך שלכל x ממשי

$$\frac{1}{1+e^x} = a + \frac{be^x}{1+e^x}$$

להסיק מהו

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$$

שאלה 2

באמצעות אינטגרציה בחלקים, לחשב את $\int_0^1 f(x)\,dx$

להסיק מהו גודלו (בסמ"ר) של השטח המוגבל על־ידי הישרים $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ והעקומה (C) לתת קודם ערך מדויק ולאחר־מכן ערך מקורב (בקירוב של 1 ממ"ר)

חלק ג

רוצים לחפש את הפונקציות u אשר מוגדרות וגזירות על R, כך שלכל x ממשי

$$u'(x)+u(x) = \frac{1}{1+e^x} \qquad (1)$$

שאלה 1

לבדוק שהפונקציה f היא פתרון עבור (1)

שאלה 2

רושמים $F = u - f$

מניחים ש־u היא פתרון של (1) אם ורק אם F היא פתרון של

$$F' + F = 0 \qquad (2)$$

לפתור את (2), ולהסיק מהן כל הפונקציות אשר פותרות את (1)

תרגיל (יוני 1993) (4 נקודות מתוך 20)

המישור מצויד במערכת צירים אורתונורמאלית $(O, \vec{u}, \vec{v})$

(היחידות על הצירים הן 4 ס"מ)

הנקודה A היא בעלת הקואורדינטה המרוכבת $z_A = -1 + i$

תהי f הפונקציה מ־$C - \{z_A\}$ ל־C, המוגדרת על־ידי

$$f(z) = \frac{2z - i}{z + 1 - i}$$

שאלה 1

מסמנים $z = x + iy$ (x, y ממשיים)

א לקבוע באמצעות x ו־y, מהו החלק הממשי ומהו החלק המדומה של $f(z)$

ב לקבוע ולצייר את האוסף E של הנקודות M, בעלות קואורדינטה z כך ש־$f(z)$ הוא ממשי

ג לקבוע ולצייר את האוסף F של הנקודות M, בעלות קואורדינטה z, כך ש־$f(z)$ הוא מדומה

שאלה 2

B היא הנקודה בעלת הקואורדינטה $z_B = \frac{1}{2}$

C היא הנקודה בעלת הקואורדינטה $z_C = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4}i$

א לבדוק ש־B שייכת ל־E ול־F, וש־C שייכת ל־F

לציין את שתי הנקודות על הסרטוט

ב לרשום את

$$\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$$

בצורה טריגונומטרית

ג להסיק מהו טבעו של המשולש ABC

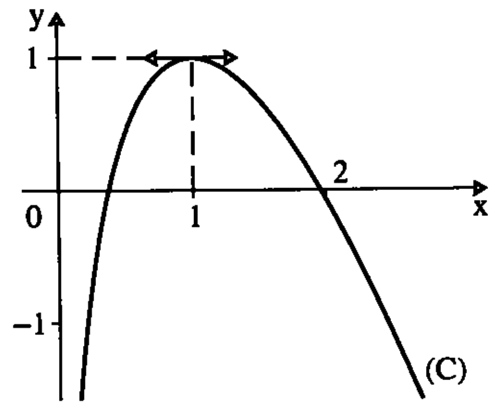
מגמה הומניסטית־ספרותית ראשית (A1)

בעיה (יוני 1993) (11 נקודות מתוך 20)

המישור מצויד במערכת אורתונורמאלית

חלק א

להלן הגרף (C) של פונקציה f המוגדרת על האינטרוואל $]0, \infty[$



לבנות לפי הציור את טבלת ההשתנות של f (אין צורך לקבוע גבולות ואת הסימנים $f'(x)$)

חלק ב

בהמשך מניחים שהפונקציה f המיוצגת על־ידי (C) מוגדרת על האינטרוואל $]0, \infty[$ על־ידי

$$f(x) = x + (1-2x)\ln x$$

1 לקבוע מהו הגבול של f ב־0

2 לשים לב שאפשר לרשום

$$f(x) = x\left(1 - 2\ln x + \frac{\ln x}{x}\right)$$

לכל x חיובי, ולקבוע מהו הגבול של f ב־$+\infty$

3 להראות ש

$$f'(x) = -2\ln x + \frac{1-x}{x}$$

לקבוע באינטרוואל $]0, \infty[$ את הסימן של $(-2\ln x)$ ואת הסימן של $\frac{1-x}{x}$

להסיק מהו הסימן של $f'(x)$ ולשחזר את טבלת ההשתנות של f

(בטבלה זו לרשום גם את הגבולות)

חלק ג

יהי (Δ) הישר שמשוואתו $y = x$

1 לפתור באינטרוואל $]0, \infty[$ את המשוואה

$$(1-2x)\ln x = 0$$

להסיק מהם השיעורים של נקודות החיתוך של העקומה (C) ושל הישר (Δ)

2 לקבוע מהו המצב ההדדי של (C) ביחס ל־(Δ)

חלק ד

1 לחשב, באמצעות אינטגרציה בחלקים, את הערך המדויק של האינטגרל

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-2x)\ln x\,dx$$

2 A הוא גודלו של השטח המוגבל על־ידי העקומה (C), הישר (Δ), והישרים $x = 1$, $x = 1/2$

לחשב את A באופן מדויק, ולאחר־מכן באופן מקורב בדיוק של 10^{-2}

תרגיל (יוני 1993) (5 נקודות מתוך 20)

בקבוצת המספרים המרוכבים מגדירים

$$P(z) = z^3 + 8$$

שאלה 1

א לחשב את $P(-2)$

ב לקבוע מהם המספרים הממשיים a, b שעבורם

$$P(z) = (z+2)(z^2 + az + b)$$

ג לפתור ב־C את המשוואה $P(z) = 0$

נסמן ב־z_1 את הפתרון הממשי

ב־z_2 את הפתרון המרוכב בעל חלק מדומה שלילי

ב־z_3 את הפתרון השלישי

שאלה 2

במישור המרוכב, המצויד במערכת צירים אורתונורמאלית $(O, \vec{u}, \vec{v})$,

למקם את הנקודות M_1, M_2, M_3 בעלות הקואורדינטות המרוכבות z_1, z_2, z_3 בהתאמה

מהו טבעו של המשולש $M_1M_2M_3$? (לנמק)

שאלה 3

א לחשב את המודולים והארגומנטים של המספרים z_1, z_2, z_3

ב להראות שקיים מספר ממשי α כך ש

$$z_2 = e^{i\alpha} z_1$$
$$z_3 = e^{i\alpha} z_2$$
$$z_1 = e^{i\alpha} z_3$$

ג להסיק מהי טבעה של הטרנספורמציה T שמקיימת

$$T(M_1) = M_2$$
$$T(M_2) = M_3$$
$$T(M_3) = M_1$$

כך למדתי (לא) להבין חשבון

רינת חדשי
הטכניון, חיפה

אחד הזכרונות המוקדמים ביותר שלי מלימודי המתמטיקה, הוא השיעור אשר בו למדנו לראשונה את פעולת הכפל היינו בכתה ג, ואותי הושיבו בספסל האחורי כי הייתי ילדה גבוהה למורה לחשבון קראו אביבה היא הייתה ג׳ינג׳ית גבוהה ואלגנטית, קצת נחמדה וקצת כעסנית

בשיעורים הקודמים למדנו את פעולות החיבור והחיסור בעזרת הביטוי "ב׳" כלומר פתרנו תרגילים כדוגמת "8 גדול מ־2 ב־6" הבנתי טוב את העניין הזה, וחשבתי שאני אוהבת שיעורי חשבון

ואז הסבירה המורה אביבה פעולה חדשה, שקראו לה "פי" היא הסבירה שוב ושוב, ואני לא הבנתי זה לא שלא הצלחתי להבין על מה היא מדברת, אדרבא, זה פשוט לא נראה לי נכון כשהיא הסבירה, למשל, ש־80 גדול מ־20 פי 4, היה נראה לי שהתשובה הנכונה צריכה להיות 3 ובכלל, היא תמיד נתנה תשובה שהייתה גדולה מדי ב־1

אני הבנתי שבניגוד לפעולת "ב׳", שבה היה צריך לחשב את ההבדל בין שני מספרים, בפעולת "פי" צריך לספור כמה פעמים המספר הקטן נכנס **בתוך ההבדל** למשל, ההבדל בין 80 ל־20 הוא 60, ו־20 נכנס בתוך 60 שלוש פעמים, לכן חשבתי ש־80 גדול מ־20 פי 3

בנקודה זו עלי להעיר כי בעוד שהביטוי "ב׳" היה ברור לי מבחינת השפה והמשמעות, והבנתי למה צריך לחשב תרגילי "ב׳", הרי שהמלה "פי" לא הייתה מובנת לי כלל אני זוכרת שהשתמשו גם בביטוי "פעמים", שכמובן הייתה לו משמעות רבה יותר, אך באותו שיעור ראשון, טרם הבנתי למה בכלל צריך לעשות תרגילים כאלה, פרט לכך שזהו רצון המורה

בכל אופן, לאחר הסברים חוזרים ונשנים, עדיין לא הבנתי למה המורה נותנת תשובה גדולה מדי ב־1, ולכן אזרתי אומץ להצביע ולהגיד שאינני מבינה המורה קראה לי לבוא אליה, לעמוד לידה מול הכיתה היא פשפשה בארנקה ומצאה מטבעות של 10 אגורות ומטבע של לירה היא אחזה בכף ידי והפנתה אותה פרושה כלפי מעלה, וחזרה שוב על כל ההסבר כשהיא מניחה את המטבעות בזו אחר זו בכף ידי היא שאלה אם אני מבינה ואני עניתי שלא, ולכן חזרה שוב על כל ההדגמה

כל התהליך עם המטבעות בכלל לא עזר לי, כיוון שכבר קודם לכן הבנתי שבמקום לחשב את ההבדל, כמו בתרגילי "ב׳", צריך להמשיך ולספור כמה פעמים המספר הקטן נכנס בתוך ההבדל בסוף שאלתי למה היא אומרת שהתשובה היא 10 ולא 9, כי כשיש לה מטבע של 10 אגורות ביד, היא צריכה רק עוד 9 מטבעות כדי שתהיה לה לירה שלמה ביד למה היא סופרת את המטבע שכבר יש לה? אז המורה אביבה חזרה שוב על כל ההסבר מלה במלה

מצב זה היה לי מביך מאוד המטבעות נתפסו בעיניי אז כדבר ילדותי והסבריה החוזרים של המורה אביבה, לדבר **שכבר הבנתי**, גרמו לי לחוש כטיפשה לנוכח הכיתה כולה פה ושם נשמעו צחקוקים חשבתי ששאר התלמידים כבר הבינו מזמן את מה שאני לא מבינה נוסף על כך הרגשתי שהמורה לחוצה ורוצה שאני אבין כבר סוף סוף כתוצאה מכך, הפטרתי בשפה רפה שאני כבר מבינה וחזרתי למקומי נושמת לרווחה

למעשה, לא רק שלא הבנתי, אלא שאף הסקתי שבעצם לא צריך להבין ממש פשוט צריך לתת את התשובה הנכונה, גם אם היא לא הכי הגיונית