e בראש הטור

עופר ליבה
בית הספר התיכון אורט רמות ע״ש גדיש, ירושלים

מבוא

המספר e, ״מלך האנליסה״, היה ידוע למתמטיקאים לפחות חצי יובל שנים **לפני** המצאת החשבון הדיפרנציאלי. אחד ההסברים האפשריים הוא שהמספר הופיע לראשונה בזיקה לנוסחה המחשבת גדילת קרן בריבית מצטברת (ראה המשך המאמר). עובדה זו, אשר נושאת אופי תצפיתי יותר מאשר דדוקטיבי, בוודאי העסיקה מתמטיקאים בראשית המאה ה-17, ואלה לא הכירו עדיין את מושג הגבול מובן שבעיות מתמטיות טהורות, כגון מציאת השטח מתחת להיפרבולה $y=\dfrac{1}{x}$ הביאו למציאת e באופן בלתי תלוי. התפקיד הידוע יותר של e, בתור בסיס ״טבעי״ ללוגריתמים, התגלה רק במחצית הראשונה של המאה ה-18 על-ידי ליאונרד אוילר (L. Euler), אשר גם העניק לפונקציה המעריכית את תפקידה המרכזי באנליסה.

ספרו החדש של אלי מאור The Story of a Number – e –[1] מתחקה אחר תולדותיו של המספר המפורסם, החל מהמצאת הלוגריתמים על-ידי נאפיר (J. Napier), דרך לידתו של חשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי, גיבושו של מושג הגבול, המצאת המספרים המרוכבים, ותרומותיו העשירות של אוילר לכל אלה.

את המהלך המרשים ביותר בספרו של מאור ארשה לעצמי להגדיר בתור ״סיפור אהבה״ בין הפונקציות הטריגונומטריות לפונקציות ההיפרבוליות. ״אירועים מסעירים״ הביאן במהלך השנים לקשור ביניהן קשר הדוק במיוחד, ועל-כך עיקרו של המאמר.

עניינים פיננסיים

נניח שאנו משקיעים 100 שקלים בחשבון אשר משלם ריבית (דיווידנד) שנתית של 5% אחרי שנה אחת, חשבוננו יגדל ל-105 שקלים (100×1.05), בתום שנתיים ל-110 25 שקלים ($105\times1 05$), בתום שלוש שנים ל-115 76 שקלים ($110 25\times1 05$), וכן הלאה. חשבוננו גדל לפי סדרה גיאומטרית בעלת מנה 1 05

נכליל את הדוגמה, ונניח שאנו משקיעים סכום P בריבית שנתית של r% בתום שנה אחת, המאזן יהיה $P(1+r)$, בתום שנתיים $P(1+r)^2$, ובאופן כללי אחרי t שנים $P(1+r)^t$ נסמן סכום זה בתור S, כלומר $S=P(1+r)^t$

נניח כעת שהבנק משלם ריבית שנתית של 5% פעמיים בשנה (כלומר, הריבית היא של 2 5% כל חצי שנה). במקרה זה, אם נשקיע 100 שקלים, אז בסוף השנה הראשונה יגדל הסכום המושקע לכדי 105 0625 שקלים ($100\times1 025^2$), ובאופן כללי, אם הבנק משלם ריבית שנתית של r%, n פעמים בשנה, אז השקעה של P שקלים לאחר t שנים תהיה שווה $S=P\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^{nt}$ שקלים. לדוגמה, אם נשקיע 100 שקלים למשך שנה בריבית שנתית של 5%, אז כעבור שנה, שוויה יהיה 105 שקלים עבור $n=1$, לעומת 105 13 שקלים עבור $n=365$ (כלומר בריבית המשולמת מדי יום).

כעת, לצורך הדיון המתמטי, נציב $P=r=t=1$ בנוסחה הכללית, כדי לקבל את הנוסחה $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. התוצאות עבור הצבות מספריות הולכות וגדלות ל- n מרוכזות בטבלה הבאה

n	$(1+1/n)^n$
1	2
2	2 25
3	2 37037
4	2 44141
5	2 48832
10	2 59374
50	2 69159
100	2 70481
1,000	2 71692
10,000	2 71815
100,000	2 71827
1,000,000	2 71828
10,000,000	2 71828

1 Maor, Eli *e – The Story of a Number* Princeton University Press, 1994

עושה רושם שערך הביטוי מתייצב סביב הערך המקורב 2.71828.
כדי לתת תוקף מתמטי להשערתנו נעשה שימוש בשני כלים והם מושג הגבול ונוסחת הבינום ונרשום

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+n\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\dots$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\dots+\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

או

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2!}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!}+\dots+\frac{1}{n^n}$$

ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots$$

(ראה הוכחה לקיום הגבול בנספח א.)
נסמן את הגבול בתור e, כלומר

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

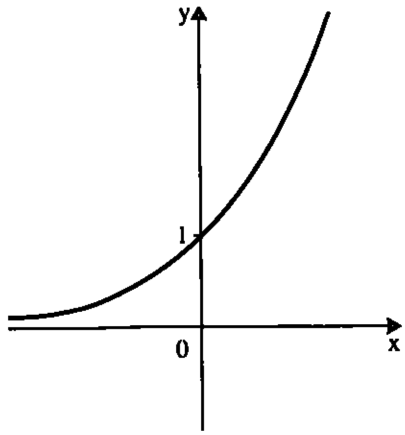
המעניין הוא שההתכנסות של הטור $\sum\frac{1}{n!}$ מהירה הרבה יותר מאשר ההתכנסות של הסדרה $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, כי כבר עבור $n=6$ נקבל קירוב של 2.718.

(מדוע בחר אוילר את האות e? אין הסכמה כללית לגבי התשובה. אחת האפשרויות היא שמדובר באות הראשונה של המלה exponent ("מעריך"). אין זה סביר שהוא בחר את e בגלל היותה האות הראשונה על שמו, כפי שנהוג לפעמים לחשוב, לאור צניעותו הרבה.)

הפונקציה השווה לנגזרתה

נזכיר תחילה את האגדה המפורסמת בדבר ממציא השחמט, אשר המלך רצה לתגמל אותו בצורה הולמת על המצאתו. הממציא ביקש שיניחו גרגיר אורז על המשבצת הראשונה של לוח השחמט, 2 גרגירים על המשבצת השנייה, 4 על השלישית, 8 על הרביעית, וכן הלאה, עד לכיסוי כל 64 המשבצות. המלך הופתע מהבקשה הצנועה, והורה לבצעה לאלתר. עד מהרה התברר שהדבר בלתי אפשרי, שהרי רק על המשבצת האחרונה יידרשו כ- 10^{19} גרגירים (2^{63} ליתר דיוק), ובסך-הכל כ- 2×10^{19} גרגירים. כדי להמחיש את הגודל העצום הזה, נציין שאם נבנה קטע המורכב מהגרגירים, אורכו יהיה כשתי שנות אור, כמחצית הדרך לכוכב הקרוב לנו ביותר מעבר למערכת השמש.

הגרף של פונקציה מעריכית הוא די פשוט ואולי קצת משעמם בהשוואה לגרף של פונקציה פולינומיאלית טיפוסית או של פונקציה רציונאלית, שכן הוא חסר נקודות מפגש עם ציר ה-x,



ואין לו נקודות קיצון ונקודות פיתול. כמו-כן, אין לו אסימפטוטה אנכית ואין לו אסימפטוטה משופעת. על-אף כל זאת יש לפונקציה מעריכית איפיון מרכזי ומפתיע למדי, והוא **קצב השתנותה**.
ניקח פונקציה מעריכית כלשהי $f(x)=a^x$. נגזרתה היא

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{a^x(a^h-1)}{h}=a^x\lim_{h\to0}\frac{a^h-1}{h}$$

צריך כמובן להוכיח שהגבול אכן קיים, אך לא נעשה זאת כאן. נסמן את הגבול $L(a)$ ונקבל $f'(x)=a^xL(a)$, כלומר **הנגזרת של פונקציה מעריכית היא ביחס ישר לפונקציה עצמה!**
כעת נשאל את עצמנו אם יש ערך מספרי של a עבורו $L(a)=1$, ואז יתקבל השוויון הפשוט $f'(x)=f(x)$. התשובה כידוע חיובית. אפשר להוכיח את השקילות בין השוויונים

$a=\lim_{h\to0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ ו- $\lim_{h\to0}\frac{a^h-1}{h}=1$

ולכן $a=e=2.71828$

לסיכום, קיבלנו $(e^x)'=e^x$, ואפשר להוכיח שהפונקציות **היחידות** המקיימות את המשוואה הדיפרנציאלית $f'(x)=f(x)$ הן כולן מהצורה $f(x)=Ce^x$, כאשר C מספר קבוע. יש מצבים רבים במתמטיקה, במדעים, בהנדסה ובמדעי החברה והכלכלה, שבהם קצב ההשתנות של גודל מסוים יחסי לגודל עצמו. תופעה כזו מתוארת על-ידי המשוואה הדיפרנציאלית $y'=ky$, אשר פתרונה הכללי הוא $y=Ce^{kx}$. $C=y'(0)$ נקרא "תנאי התחלה" או "תנאי קצה".

"השרשרת התלויה" והפונקציות ההיפרבוליות

בשנת 1690 ניסח יעקב ברנולי (Jakob Bernoulli) את הבעיה הבאה: למצוא את הפונקציה אשר מתארת את העקומה הנוצרת על-ידי שרשרת התלויה באופן חופשי בין שתי נקודות (catenary, מלשון catena, המלה הלטינית שפירושה שרשרת). בעיה זו העסיקה את המוחות המתמטיים במשך עשרות שנים, ולא נמצא לה עדיין פתרון. באותה שנה גלילאו (G. Galileo) חשב שהצורה

הנוצרת היא פרבולה, ולפי העין כך אכן הדבר ואולם הויגנס (C Huygens), כבר בהיותו בן 17 בשנת 1646 הוכיח שאין זה כך רק בהיותו בן 62 הוא פתר סופית את הבעיה שכשהוא מצביע על הפתרון המפורש, וכן עשו זאת במקביל לייבניץ (G Leibniz) וגיוהאן ברנולי (Johann Bernoulli), אחיו של יעקב

נדלג כאן על הפרטים הטכניים, וניתן את התוצאה **המשוואה של העקום המתאר את השרשרת התלויה היא** $y=\frac{1}{2}(e^{ax}+e^{-ax})$, כאשר a הוא קבוע התלוי בתכונות הפיסיקאליות של השרשרת

עבור $a=1$ אנו מקבלים $y=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$ פונקציה זו, יחד עם בת-זוגה $y=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$, קיבלו במהלך השנים את השמות "קוסינוס היפרבולי" ו-"סינוס היפרבולי", בהתאמה מסמנים אם כן

$$\sinh(x)=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x}) \ , \cosh(x)=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$$

מדוע השמות הללו?

ראשית, נשים לב שמתקיימת הזהות

$$\cosh^2\varphi-\sinh^2\varphi=1$$

שהיא אנלוגית לזהות

$$\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$$

והדבר מראה שפונקציות cosh ו- sinh קשורות להיפרבולה $x^2-y^2=1$ כמו שהפונקציות cos ו-sin קשורות למעגל $x^2+y^2=1$ (לפרטים ראה נספח ב)

שנית יש אנלוגיה בין נוסחאות הגזירה

$$(\cos x)'=-\sin x \qquad (\cosh x)'=\sinh x$$
$$(\sin x)'=\cos x \qquad (\sinh x)'=\cosh x$$

כמו-כן יש אנלוגיות נוספות כגון

$$\sinh(x+y)=\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y$$
$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$$

$$\cosh(x+y)=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y$$
$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$

$$\cos(-x)=\cos x \quad \cosh(-x)=\cosh x$$
$$\sin(-x)=-\sin x \quad \sinh(-x)=-\sinh x$$

$$\cosh 0=1 \qquad \cos 0=1$$
$$\sin 0=0 \qquad \sinh 0=0$$

היינו "רוצים", אם כך, **שלכל** תכונה של הפונקציות המעגליות תהיה תכונה אנלוגית של הפונקציות ההיפרבוליות, דבר שהיה מעמיד אותן (וכן את המעגל וההיפרבולה) בסטטוס שווה לרוע המזל, אין הדבר כך המעגל הוא עקום סגור, ומכאן תכונת **המחזוריות** של הפונקציות הקשורות אליו לתכונה זאת יש חשיבות ועדיפות לאין-שיעור בתיאור הפונקציות המחזוריות, אשר הטבע מבורך בהן להיפרבולה ולפונקציות הקשורות אליה חסרה תכונה חשובה זו, ומכאן התפקיד הפחות חשוב שיש להן במתמטיקה (יחד עם זאת, יש להן מחזור מדומה, כפי שנראה בהמשך)

אין צורך למהר "להתייאש" אוילר איפשר באמצעות הברקה מקורית ונועזת כהרגלו, לקרב בין הפונקציות המעגליות וההיפרבוליות לכדי קשר הדוק הרבה יותר, וזאת על-ידי מתן "רשות" למשתנה הפונקציה המעריכית e^x להיות **מדומה ואף מרוכב.**

פריצת דרך ראשונה: הפונקציה e^{ix}

נחזור לרגע לקשר הבסיסי שקיבלנו קודם

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+$$

בתהליך דומה, על-ידי החלפת $\frac{1}{n}$ ב- $\frac{x}{n}$, נקבל

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+$$

זהו טור החזקות הידוע עבור הפונקציה e^x אפשר להוכיח שטור זה מתכנס לכל ערך של x, וההתכנסות היא מהירה למדי, בזכות המכנים

כאמור אוילר ניחן במה שאפשר לכנות "תעוזה מתמטית" הוא "שיחק" עם הנוסחאות כמו שילד משחק עם צעצועים, כשהוא עושה מיני תחבולות שונות ומשונות, עד אשר היה מגיע לתוצאות מעניינות (ר' עלייה 10, עמ' 70-71 ועלייה 15, עמ' 79) במקרה שלפננו, הוא העז להחליף את המשתנה הממשי x של הפונקציה המעריכית במשתנה המדומה ix, וכך הוא קיבל

$$e^{ix}=1+ix+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\frac{(ix)^4}{4!}+ \quad =$$
$$=1+ix-\frac{x^2}{2!}-\frac{ix^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+$$

וכאן הוא ביצע "חטא מתמטי" נוסף, כאשר כינס בנפרד את האיברים הממשיים ואת האיברים המדומים (עקרונית, יש להיזהר במניפולציות מן הסוג הזה, כי בטורים אינסופיים החלפת סדר האיברים עלולה להביא לשינוי הסכום או אף לפגוע בעצם ההתכנסות)

$$e^{ix}=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\quad\right)+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\quad\right)$$

בזמנו של אוילר היה ידוע ששני הטורים בסוגריים מייצגים את הפונקציות cos x ו-sin x וכך הוא קיבל את הנוסחה המרשימה

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

אשר מקשרת בין הפונקציה המעריכית (במשתנה מדומה) לבין הטריגונומטריה. ואם נחליף את (ix) ב-(-ix) נקבל את בת-הזוג של הנוסחה הקודמת $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$ חיבור וחיסור אגף אגף של שתי הנוסחאות יתנו

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}) \qquad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$$

אנלוגיות לנוסחאות המגדירות את cosh x ו-sinh x.

(יש לציין, כפי שכבר אמרנו קודם, שאוילר קיבל תוצאות אלה וגם אחרות באופן בלתי ריגורוזי ובלתי קפדני, אך הדבר נכון גם לגבי תוצאות שקיבלו ניוטון (I. Newton) ולייבניץ בראשית הדרך של החשבון הדיפרנציאלי. הביסוס הפורמאלי והמדויק של התוצאות לקח עוד כמה עשרות שנים.)

מציאת הקשר המיוחד בין הפונקציה המעריכית לבין הפונקציות הטריגונומטריות הביא לגילוי קשרים נוספים בלתי-צפויים. בפרט, הצבת $x = \pi$ בנוסחה $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ נותנת

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

אשר נחשבת לאחת הנוסחאות היפות ביותר בכל המתמטיקה, שהרי היא מקשרת בין חמשת המספרים החשובים ביותר שבה, ואשר מייצגים את כל תחומיה הקלאסיים: 1, 0 (אריתמטיקה), i (אלגברה), π (גיאומטריה) ו- e (אנליסה)!

פריצת דרך שנייה: הפונקציה e^{x+iy}

נתחיל כעת מנקודת-מוצא חדשה, והיא הנוסחה $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ של הסעיף הקודם. נוכל להתייחס לאגף הימני של השוויון כאל **ההגדרה** של e^{ix} (כי הרי לא הגדרנו ממש את e^{ix} עד כה). "הפיתוי" אשר ניצב לפנינו הוא להרחיב את ההגדרה, כך שתתן מובן לביטוי e^z, כאשר $z = x + iy$. נניח לרגע ש-e^z נשמעת לכל חוקי החזקות במעריכים ממשיים ונקבל

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

החוליה החלשה בשוויון האחרון היא כמובן מה שכרגע הנחנו: מי הבטיח לנו שחוקי החזקות תקפים לגבי מעריכים מדומים/מרוכבים? המוצא מהסבך הוא להחליט **שהאגף הימני הוא זה שמגדיר את הפונקציה**. בצורה זו נשמור על עקביות בנוגע לתכונות של הפונקציה המעריכית במשתנה ממשי.

(יש לציין כי קיימת אלטרנטיבה מוצלחת לא פחות להגדרת הפונקציה e^z, והיא הגדרתה באמצעות טור חזקות, שיטה אשר נקטו אותה קושי (A. Cauchy) ווייארשטרס (K. Weierstrass).

$$e^z = 1 + \left(\frac{z}{1!}\right) + \left(\frac{z^2}{2!}\right) + \left(\frac{z^3}{3!}\right) + \cdots$$

את כל התכונות הרצויות (ההתכנסות לכל z, נוסחאות גזירה וכיו"ב) נוכל לקבל באמצעות הגדרה זו.)

נוכל כעת להשלים חוב שנוצר כשהתייחסנו לאנלוגיות בין הפונקציות הטריגונומטריות לבין הפונקציות ההיפרבוליות, והוא עניין המחזוריות. כידוע, 2π הוא המחזור של הפונקציות cos x ו-sin x. הסברנו מדוע תכונה זו חסרה אצל cosh x ו-sinh x. יחד עם זאת, הפיתוח החדש המופיע בסעיף זה ובקודמו יכול לתת לנו "הרגשה" לגבי קיום מחזור מדומה, ואומנם כך הדבר.

נראה תחילה שהפונקציה e^z היא בעלת מחזור $i2\pi$.

$$e^{z+i2\pi} = e^{x+i(y+2\pi)} = e^x(\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi)) =$$
$$= e^x(\cos y + i\sin y) = e^z$$

תוצאה זו מביאה למסקנה

$$\cosh(z+i2\pi) = \cosh x \qquad \sinh(z+i2\pi) = \sinh z$$

כמו-כן, חישוב פשוט מראה לנו כי

$$\cosh\left(\frac{i\pi}{2}\right) = 0 \qquad \sinh\left(\frac{i\pi}{2}\right) = 1$$

וזוהי אנלוגיה נוספת.

פריצת דרך שלישית: הפונקציות cos(x+iy) ו- sin(x+iy)

ראינו קודם שנוסחת אוילר $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ הביאנו לנוסחאות החדשות

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}) \qquad \sin x = \frac{1}{2}(e^{ix}-e^{-ix})$$

(x ממשי)

נמשיך צעד אחד נוסף ב-"פנטזיה" שלנו (א-לה-אוילר), נאפשר למשתנה להיות מרוכב, ונגדיר

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}) \qquad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})$$

כאשר $z = x + iy$

ננסה כעת למצוא את החלק הממשי ואת החלק המדומה של cos z ושל sin z הגדרנו קודם.

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

נחליף את z ב-(iz) וב-(-iz) ונקבל

$$e^{iz} = e^{-y}(\cos x + i\sin x) \qquad e^{-iz} = e^{y}(\cos x - i\sin x)$$

הצבת שני השוויונים בהגדרות של cos z ו- sin z תתן

$$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y$$
$$\sin z = \sin(x+iy) = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y$$

אפשר לבדוק **שכל הנוסחאות הטריגונומטריות ממשיכות להתקיים כאשר המשתנים הם מרוכבים, וכן נוסחאות הגזירה!**

במקרה המיוחד שבו $z = iy$ נקבל

$$\cos(iy) = \cosh y \qquad \sin(iy) = i\sinh y$$

זוהי עובדה נוספת ומרשימה, שכן היא מראה לנו בין היתר שבתחום המספרים המרוכבים אפשר לנוע באופן חופשי בין הפונקציות המעגליות והפונקציות ההיפרבוליות, כאשר בתחום המספרים הממשיים הקשר הוא אנלוגי בלבד.

אחרית דבר: בין e ל-π

סוגיה שהעסיקה את המתמטיקאים במשך מאות שנים הייתה האם קיימים מספרים לא-אלגבריים, בכינוי אחר **טרנסצנדנטיים** (כלומר שאינם פתרונות של משוואה פולינומיאלית עם מקדמים שלמים)? רק בשנת 1844 הוכיח ליוביל (J Liouville) שהם אכן קיימים. הוכחתו הלא-פשוטה אפשרה לו לבנות דוגמאות רבות של מספרים כאלה. המפורסם שבהם, הנקרא על שמו, הוא

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{10^{n!}}=\frac{1}{10^{1!}}+\frac{1}{10^{2!}}+\frac{1}{10^{3!}}+$$

ברגע שהושגה המטרה הנכספת (הוכחת קיומם של מספרים טרנסצנדנטיים), הופנתה תשומת הלב לחקר טבעם של המספרים π ו-e. העובדה ששני המספרים הם אי-רציונליים הייתה ידועה כבר יותר ממאה שנים (אוילר הוכיח זאת עבור e, ולמבר (J Lambert) עבור π). היה זה הרמיט (Ch Hermite) אשר הוכיח בשנת 1873 שהמספר e הוא טרנסצנדרטי, אך התייאש מלהוכיח זאת עבור π. בשנת 1882, הוכיח לינדמאן (C Lindemann) שגם הוא טרנסצנדנטי, ובכך סתם את הגולל על בעיה שהעסיקה את אנשי הגיאומטריה מהעולם העתיק והלאה כיצד לבנות ריבוע בעל שטח שווה לזה של מעגל נתון, באמצעות סרגל לא מסומן ומחוגה בלבד. מכיוון ש-π אינו אלגברי, המשימה היא בלתי אפשרית.

בכינוס העולמי המפורסם ביותר בתולדות המתמטיקה, אשר התקיים בפאריס בשנת 1900, איתגר דייויד הילברט (D Hilbert) את הקהילה המתמטית בניסוח 23 בעיות בלתי פתורות עד לאותה שנה (ר׳ עלייה 16, עמ׳ 84). הבעיה השביעית ברשימה של הילברט הייתה להוכיח או להפריך את ההשערה שלכל מספר אלגברי a השונה מ-0 ומ-1, ולכל מספר אלגברי אי-רציונלי b, המספר a^b הוא טרנסצנדנטי. כדוגמאות ספציפיות הוא נתן את $2^{\sqrt{2}}$ ואת e^{π} (האחרון יכול להירשם i^{-2i}, לכן עונה על התנאים). הילברט חשב שהניסיון לתת מענה לשאלה יגזול זמן רב מאוד, אך מסתבר שהיה פסימי מדי. בשנת 1929 הוכיח גלפונד (O Gelfond) שהמספר e^{π} הוא טרנסצנדנטי ושנה לאחר מכן עשה זאת גם לגבי $2^{\sqrt{2}}$. בשנת 1934 הצליח להוכיח את ההשערה הכללית.

הגילוי של המספרים הטרנסצנדנטיים לא גרם לאותו ״הלם אינטלקטואלי״ שגילוי המספרים האי-רציונליים גרם 2500 שנה מוקדם יותר, אך המסקנות היו מרחיקות-לכת. גילוי זה הראה שמאחורי הפשטות כביכול של אוסף המספרים הממשיים מסתתרות מיני הפתעות ודקויות בלתי צפויות ובלתי-אינטואיטיביות. את ההפתעה הגדולה והמדהימה סיפק קנטור (G Cantor) בשנת 1874, כאשר הוכיח שיש יותר מספרים אי-רציונליים מאשר רציונליים (בלשון תורת הקבוצות, עוצמתם של הראשונים גדולה מעוצמתם של אלה האחרונים), ושיש יותר מספרים טרנסצנדנטיים מאשר אלגבריים. כלומר, לא רק שאינם מיעוט בטל במסגרת המספרים הממשיים בכלל והמספרים האי-רציונלים בפרט (כפי שחשבו תמיד), **המספרים הטרנסצנדנטים הם רוב המספרים!**

רשימת ספרות

Apostol, Tom *Mathematical Analysis* Addison-Wesley, 1974

Boas, Ralph Philip *Invitation to Complex Analysis* Random House 1987

Boyer, Carl *A History of Mathematics* Wiley 1989

Kline, Morris *Mathematics the Loss of Certainty* Oxford University Press 1980

Marsden, Jerrold and Michael Hoffman *Basic Complex Analysis* Freeman, 1987

Paulos, John Allen *Beyond Numeracy* Knopf, 1991

Salem, Lionel and others *The Most Beautiful Mathematical Formulas* Wiley, 1992

Simmons, George *Calculus Gems* McGraw-Hill, 1992

נספח א: e הוא אי-רציונלי

נתייחס לסדרה

$$S_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\quad+\frac{1}{n!}$$

ונראה שהיא שואפת לגבול S, כאשר $2<S<3$

ברור שהסדרה עולה, ואם $n\ge 3$, אז

$$n!=1\times2\times3\times4\times\quad\times n>1\times2\times2\times2\times\quad\times2=2^{n-1}$$

ולכן

$$1+1<S_n<1+1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\quad+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<$$

$$<1+2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]<1+2=3$$

משפט ידוע בתורת הסדרות המתכנסות אומר שכל סדרה מונוטונית עולה וחסומה, מתכנסת. קיבלנו אם-כך $2<S<3$, כאשר $S=\lim_{n\to\infty}S_n=e$

כעת נניח ש-e הוא רציונלי ונגיע לסתירה. נסמן $e=\frac{p}{q}$. כבר הראינו ש- $2<e<3$, ולכן חייב להתקיים $q\ge 2$. נכפיל את שני אגפי השוויון

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\quad+\frac{1}{n!}+$$

ב-$q!$

באגף שמאל נקבל

$$e\times q!=\left(\frac{p}{q}\right)\times1\times2\times3\times\quad\times q=p\times1\times2\times3\times\quad\times(q-1)$$

ובאגף ימין

$$[q!+q!+(3\times4\times\quad\times q)+\quad+(q-1)\times q+q+1]+$$

$$+\frac{1}{(q+1)}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+$$

האגף השמאלי הוא בוודאי שלם (כי הוא מכפלה של שלמים) באגף ימין, הסכום שבתוך הסוגרים המרובעים הוא שלם, בעוד שהמחוברים הנותרים הם לא שלמים, כי המכנה של כל אחד מהם הוא לפחות 3 נראה שסכומם אף הוא לא שלם כיוון ש- $q \geq 2$

$$\frac{1}{(q+1)}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\ldots<\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\ldots=\frac{1}{2}$$

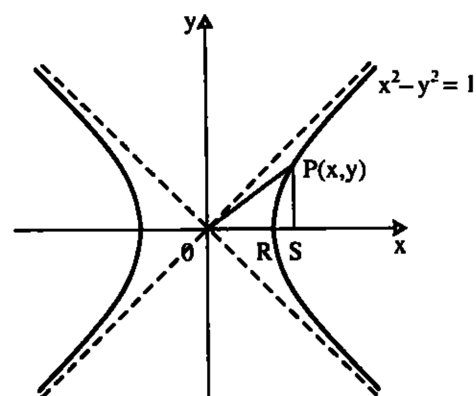
קיבלנו אם-כך שוויון בין מספר שלם לבין מספר לא שלם, וזוהי כמובן סתירה

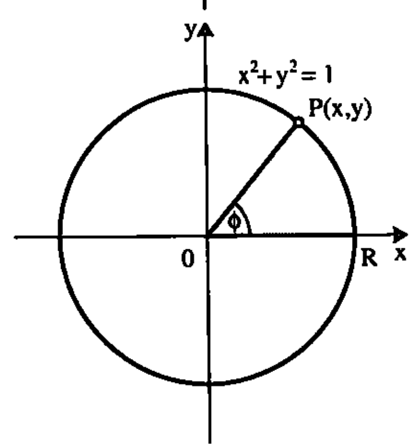
נספח ב: המשמעות הגיאומטרית של φ בפונקציות

הפונקציות הטריגונומטריות ("המעגליות") מוגדרות על המעגל $x^2+y^2=1$ על-ידי המשוואות

$$(1)\quad \cos\varphi = x \qquad \sin\varphi = y$$

כאשר x ו-y הם שיעורי הנקודה P על המעגל ו-φ הזווית בין OP לבין ציר ה-x, נמדדת ברדיאנים





באופן דומה, מוגדרות הפונקציות ההיפרבוליות על ההיפרבולה $x^2-y^2=1$ על-ידי המשוואות

$$(2)\quad \cosh\varphi = x \qquad \sinh\varphi = y$$

כאשר x ו-y הם שיעורי הנקודה P על ההיפרבולה

אך כאן לא נוכל להגדיר את φ כזווית אף על פי כן נוכל לתת פירוש גיאומטרי לפרמטר φ, פירוש אשר יאיר את האנלוגיה בין הפונקציות המעגליות להיפרבוליות

ראשית נשים לב שהפרמטר φ במשוואות (1) יכול להיחשב כפעמיים השטח של גזרה מעגלית שפתיחתה היא φ ורדיוסה הוא 1 (הדבר נובע מהנוסחה לחישוב שטח של גזרה מעגלית $A=\frac{1}{2}r^2\varphi$, כאשר φ ברדיאנים) נראה שאותה משמעות תתקבל עבור המשוואות (2), **כאשר נחליף גזרה מעגלית בגזרה היפרבולית**

נחשב, אם כך, את שטח הגזרה ההיפרבולית OPR

$$S_{OPR}=S_{OPS}-S_{PRS}=\frac{xy}{2}+\int_1^x y\,dx=\frac{x\sqrt{x^2-1}}{2}-\int_1^x\sqrt{t^2-1}\,dt$$

כדי לחשב את האינטגרל, נחליף משתנה $t=\cosh u$, ואז $dt=\sinh u\,du$ ותחום האינטגרציה החדש הוא $[0,\varphi]$, כאשר $\varphi=\cosh^{-1}x$ נעזר בזהות $\cosh^2 u-\sinh^2 u=1$ ונקבל

$$S_{OPR}=\frac{1}{2}\cosh\varphi\sinh\varphi-\int_0^{\varphi}\sinh^2 u\,du$$

נעזר כעת בזהויות

$$\sinh 2u = 2\sinh u\cosh u \qquad \sinh^2 u=\frac{1}{2}(\cosh 2u-1)$$

ונקבל

$$S_{OPR}=\frac{1}{4}\sinh 2\varphi-\frac{1}{2}\int_0^{\varphi}(\cosh 2u-1)du=$$

$$=\frac{1}{4}\sinh 2\varphi-\frac{1}{2}\left(\frac{\sinh 2\varphi}{2}-\varphi\right)=\frac{\varphi}{2}$$

מש"ל