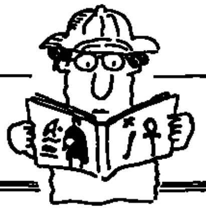

היסטוריה

תולדות תורת ההסתברות

עלי מרצבך
אוניברסיטת בר־אילן

אפשר לאפיין שלוש תקופות שונות בתולדות תורת ההסתברות התקופה הראשונה אשר בה התהוו המושגים היסודיים של הקומבינטוריקה וההסתברות התקופה השנייה מסוף המאה השמונה־עשרה ובמאה התשע־עשרה, תקופת התפתחות התיאוריה המנצלת את כל ההתקדמות שנעשתה באנליסה מתמטית לבסוף התקופה המודרנית, מתחילת המאה העשרים, זכתה בראש ובראשונה באקסיומטיזציה של תורת ההסתברות ומופנית בעיקר לחקר התהליכים הסטוכסטיים

1. התקופה הראשונה

שורשי תורת ההסתברות נמצאים במשחקים שונים ובהטלת גורל משחקי קוביות היו ידועים כבר בתקופה ההלניסטית ואיתם התעוררו שאלות של סיכוי זכייה בתלמוד מובאת הטלת גורל כמושג משפטי מודגש, שהשתמשו בו כאשר היה צורך לחלק נכסים בין שותפים או יורשים (עיין, למשל, במסכת בבא בתרא) שיטות הגורל מבוארות היטב שימוש בקלפיות ובפתקים זהים (טורפים את הקלפי), וחשיבות פעולת עירבוב הפתקים גם מושג התוחלת מופיע במספר מקומות במשנה, אם כי לא באופן מפורש (עיין למשל, במסכת כריתות, פרק ה, שבו יש חישוב תוחלת הוצאה)

בימי הביניים, מופיעים החיבורים הראשונים בנושא הקומבינטוריקה נזכיר את ספרו של ר׳ לוי בן גרשון (הרלב״ג, 1288–1344), בנושא האסטרונומיה שהתפרסם ב־1321, ושבו מופיעות לראשונה נוסחת הצירופים של k עצמים מתוך n ומספר תוצאות נוספות, כמו לחשל

$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$$

כשלוש מאות שנה אחר כך, פסקל (B Pascal, 1623–1662) בונה את משולש הצירופים הנקרא על שמו, בהסתמך על נוסחת הרלב״ג בנוסף, פסקל פתר בעיות משחקים של מהמר מפורסם בשם דָה־מֶרֵה (G A De Méré, 1607–1684) אחד המשחקים היה להטיל קוביה ארבע פעמים ולהמר על הופעת ״6״ לפחות פעם אחת הסתברות למאורע זה היא $1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0\ 518$, ולכן, כדאי להמר עליו במשחק השני מטילים שתי קוביות 24 פעמים ומהמרים על הופעת ״5״ כפול לפחות פעם אחת כאן ההסתברות לזכייה היא קצת פחות מחצי $1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0\ 4915$ לעומת זאת, אילו היו זורקים את שתי הקוביות 25 פעמים, ההסתברות לזכייה המתקבלת היא $1-\left(\frac{35}{36}\right)^{25} \approx 0\ 5056$

בעיה רצינית יותר שדה־מֶרה הביא בפני פסקל הייתה ״בעיית החלוקה״ שני שחקנים משחקים בהטלת מטבע והמנצח הוא השחקן הראשון שיקבל 3 נקודות כאשר השחקן הראשון זכה בנקודה ראשונה נאלצו להפסיק את המשחק השאלה הייתה איך לחלק את ההימורים בצורה הוגנת כלומר, ביחס להסתברויות ניצחון של שני השחקנים אילו המשחק היה יכול להימשך נסמן ב־$p(m,n)$ את ההסתברות שהשחקן הראשון מנצח אם חסרות לו m נקודות ולירִיבו חסרות n נקודות כדי לנצח פסקל פתר את הבעיה הזאת והוכיח שהסתברויות $p(m,n)$ מקיימות

$$p(m,n)=\frac{1}{2}\left[p(m-1,n)+p(m,n-1)\right]$$

כאשר $0<m<n$

כמו כן,

$$p(n,n)=\frac{1}{2}$$

ו־ $p(0,n)=1$

פסקל הראה את התוצאות האלו לפרמה (P Fermat, 1601–1665) שפתר את הבעיה בשיטה אחרת וקיבל אותן תוצאות

מושג התוחלת מופיע בצורה מתמטית בפעם הראשונה אצל ההולנדי הויגנס (C Huygens, 1629–1695), שכתב ספר הסתברות והרחיב את תוצאותיו של פסקל למרות ההגדרה המתמטית שלו לתוחלת, התנגדו רבים למושג זה והדוגמה המפורסמת ביותר שהביאו כנגד התוחלת היא הפרדוקס של סנט־פטרסבורג הרבה דיו נשפך בניסיונות להבין את המשחק הזה לפלס (P.S Laplace, 1749–1827), דניאל ברנולי (D Bernoulli, 1700–1782), פואסון (S D Poisson, 1781–1840), ברטרנד (J Bertrand, 1822–1900) ואף במאה הנוכחית על־ידי בורל (E Borel, 1871–1956)

בחזרה למאה השבע־עשרה, נוסף על פסקל, הויגנס ופרמה, יש להזכיר את מונטמור (PR de Montmort, 1678-1719) את דה־מואבר (A De-Moivre, 1667-1754) ובמיוחד את יעקב ברנולי (Jacob Bernoulli, 1654-1705) ברנולי הוכיח את **החוק החלש של המספרים הגדולים** (1685) במקרה הבינומי

אם $\{X_n\}$ סדרה של מ״מ ב״ת כך ש־$X_n \sim B(1,p)$ אזי

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ מתכנס בהסתברות ל־p

בשנת 1733, דה־מואבר הוכיח מקרה פרטי של משפט הגבול **המרכזי**, גם כן במקרה הבינומי

כאשר n שואף לאינסוף ובתנאים מסוימים

$$\sqrt{npq}\binom{n}{m}p^{m}q^{n-m} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

כאשר $x = \lim_{n\to\infty}\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$

שני משפטים אלו מהווים את שלד תורת ההסתברות הם יזכו להכללות רבות במשך השנים, וכן לשימושים רבים הן במתמטיקה והן מחוצה לה

ספרו של יעקב ברנולי בתורת ההסתברות התפרסם שמונה שנים לאחר מותו נציין כי המדען המפורסם לייבניץ (G.W Leibniz, 1646-1716), שהיה מורו של יעקב ברנולי, לא הסכים עם דרך החשיבה ההסתברותית של תלמידו. (ללייבניץ בעצמו היו שגיאות חמורות. למשל, הוא היה טוען שקבלת הסכום 7 היא פי שלוש סבירה יותר מקבלת הסכום 12 כאשר זורקים שתי קוביות, כי 7 יכול להתקבל על־ידי שלושה צירופים· 1 6, 2 5, 3 4, ואילו 12 יכול להתקבל רק על־ידי צירוף אחד 6 6).

במאה השמונה־עשרה, הזכרנו כבר את דניאל ברנולי (האחיין של יעקב ברנולי) שפיתח תורה עבור ״התוחלת המוסרית״ המתמטיקאי אוילר (L Euler, 1707-1783) חיבר גם מספר עבודות בהסתברות אבל אף אחת לא הגיעה לעומק של שאר עבודותיו במתמטיקה גם דאלמבר (J D'Alembert, 1717-1783) התעסק בתורת ההסתברות, אך היו לו מספר שגיאות, שפירסם באנציקלופדיה המפורסמת, והוא סירב להכיר בהן גם גאוס (K F Gauss, 1777-1855) התעניין בנושא והכניס מספר שיטות חדשות הן בסטטיסטיקה והן בתורת ההסתברות

חוקר הטבע בופון (G L Buffon, 1707-1788) התעניין בבעיות הסתברותיות הקשורות לגיאומטריה הוא הציע שיטה הסתברותית לחישוב המספר π ועבודותיו הולידו תיאוריה חדשה ובעלת שימושים רבים הגיאומטריה הסטוכסטית

נסיים את התקופה הזאת עם התיאולוג באייס (T Bayes, 1702-1761) הוא פיתח את מושג ההסתברות האפריורית (a priori) ומושג ההסתברות המותנית הוא השתמש בנוסחה

$$P(A\cap B) = P(A)\ P(B/A) = P(B)\ P(A/B)$$

אמנם נוסחת באייס המפורסמת נכתבה בפעם הראשונה רק על־ידי לַפְּלַס, אולם אין ספק שבאייס היה הראשון שהשתמש ברעיון ״הסתברות הסיבות״

2. התקופה השנייה

התקופה השנייה מתחילה עם אחד המתמטיקאים שהשתתף רבות בפיתוח תורת ההסתברות, והוא לַפְּלַס (P.S Laplace, 1749-1827) ספרו הגדול ״התורה האנליטית של ההסתברויות״ שהתפרסם ב־1812 נתן לתיאוריה אחדות ופתח אופקים שכיוונו את המחקר התיאורטי והיישומי במשך המחצית הראשונה של המאה התשע־עשרה בין השאר, מופיעים בספר הזה לראשונה מושגי הפונקציה היוצרת והפונקציה האופיינית כמו כן, מופיע שם מושג הסיכון בסטטיסטיקה ויחסיו עם אופטימליות של כמה שיטות אמידה לַפְּלַס אמנם השתמש בהתחלה בערך המוחלט של השגיאה כמידת הסיכון (גאוס הבין שעדיף להשתמש בריבוע השגיאה כדי לפשט את החשבונות), אך הבין בהמשך את עדיפות הריבוע לַפְּלַס יישם את השיטות ההסתברותיות שלו לבעיות שונות ולאו דווקא למשחקי מזל היישום הראשון שלַפְּלַס מביא לשיטת ההיסק הסטטיסטית הוא חקר יחס לידות זכר ללידות נקבה בפריס במשך 26 שנה (1754-1770) בתקופה זו נולדו 251,527 בנים ו־241,945 בנות האם מספרים אלה מראים שהסיכוי ללידת בן גדול יותר? אם נסמן ב־x את ההסתברות שיילוד מסוים יהיה ממין זכר, לַפְּלַס מחשב את ההסתברות הפוסטריורית

$$P\left\{x \le \frac{1}{2} / p = 251,527,\quad q = 241.945\right\} = 1.1521\ 10^{-42}$$

ולכן מסיק שודאי $x > \frac{1}{2}$. התברר שבלונדון יחס הבנים היה גדול עוד יותר ולַפְּלַס מנתח את הנתונים האלה בדיוק כפי שסטטיסטיקאי היה עושה זאת היום

לַפְּלַס התעניין גם בפילוסופיה של תורת ההסתברות ובמציאת הגדרה של מושג ההסתברות בפילוסופיה הרציונליסטית שלו, כל תופעות הטבע, כולל תופעות פוליטיות ומדעי החברה, נשלטות על־ידי כוחות קבועים של המכניקה וכוחות אקראיים הנחקרים על־ידי תורת ההסתברות כמו שפינוזה (B Spinoza, 1632-1677) הוא סבר שהמקריות רק מסתירה את חוסר הידע והבורות של האדם

המדען הראשון שתקף דעות אלו היה קורנו (A Cournot, 1801-1877) שטען שהמקריות והדטרמיניזם המדעי אינם סותרים זה את זה, והמקריות מייצגת ממשות אובייקטיבית ובלתי תלויה בידיעות האדם

הבכורה למציאת שיטת הריבועים הפחותים מגיעה ללא ספק למתמטיקאי לז׳נדר (A M Legendre, 1752-1833) שפירסם את

השיטה כבר בשנת 1805 (גאוס אמנם טען שהוא כבר הכיר את השיטה הזאת אך לא פירסם אותה).

מודל של התפתחות אוכלוסיה (דמוגרפיה) במשך דורותיה השונים, נבנה לראשונה בשנת 1875 על־ידי גלטון (F. Galton, 1822–1911) ווטסון (H.W. Watson). הם חקרו את התלות בין גודל האוכלוסיה בדור ה־n־י לגודלה בדור ה־$n+1$־י. התברר שהמודל שלהם שימושי מאוד והוא אחת הדוגמאות היפות של שרשרת מרקוב (שהוגדרה רק ב־1905). גלטון מצא גם את שיטת הרגרסיה הליניארית, בשנת 1885, במחקרו על התורשה. מעניין לשים לב שהתפתחות הרגרסיה באה כ־80 שנה אחרי פירסום שיטת הריבועים הפחותים. למרות שאין ברגרסיה הרבה רעיונות נוספים, לקח הרבה זמן למדענים להגיע לרגרסיה. באותו עניין, השיטות שהשתמשו בהן באסטרונומיה במאה השמונה־עשרה הגיעו למדעי החברה רק במאה העשרים.

בתקופה זו, יש למנות גם המתמטיקאים הבאים, שקידמו את תורת ההסתברות: צ׳בישב (P. Tchebychev, 1821–1894), פואסון וברטרנד שכבר הזכרנו. אנשי ההסתברות המבשרים את התקופה החדשה הם בין השאר: פואנקרה (H. Poincaré, 1854–1912), ליאפונוב (A.M. Liapunov, 1857–1918) ומרקוב (A.A. Markov, 1856–1922).

לַפְּלַס וגאוס פתחו את ההתפלגות הנורמלית הדו־ממדית (1812).

קֶטלה (A. Quetelet, 1769–1874) יישם את השיטות ההסתברותיות והסטטיסטיות של לַפְּלַס למפקד אוכלוסין בבלגיה והולנד (1827). אפשר לומר כי קֶטלה הוא הראשון שניסה (ללא הרבה הצלחה) ליישם בצורה שיטתית את הסטטיסטיקה למדעי החברה. בפרט הוא הכניס את המושג של ״האיש הממוצע״, כדי למדוד גדלים שונים של אוכלוסיות בני אדם. הממשיכים בביסוס סטטיסטיקה חברתית הם פואסון (סטטיסטיקה למשפטים) וקורנו (סטטיסטיקה לכלכלה) ואחריהם לקסיס (W. Lexis, 1837–1914). לסטטיסטיקה בפסיכולוגיה, הבכורה מגיעה לפשנר (G.T. Fechner, 1801–1887).

3. התקופה החדשה

התקופה החדשה מתאפיינת על־ידי פיתוח אדיר של תורת ההסתברות בכיוונים שונים ומגוונים וכן בביסוס מתמטי ואקסיומטי של תורת ההסתברות. נדגיש כאן מספר כיווני מחקר הבולטים ביותר והם עד היום מקור למחקרים רבים ופוריים. נוסף על נושאים אלה, נזכיר את הגיאומטריה האקראית, את תורת הסימולציה והתהליכים הנקודתיים. נושאים קרובים לתורת ההסתברות הם במתמטיקה טהורה: התורה הארגודית ותורת המידה. בשימושים, הרבה תורות נעזרות בתורת ההסתברות, ביניהן תורת הסינון (Filtering Theory), תורת התורים, ותורת הבקרה. היום כל המדעים משתמשים בצורה זו או אחרת בתורת ההסתברות מהפיסיקה (פיסיקה קוונטית, מכניקה סטטיסטית), הביולוגיה, הגנטיקה (הרי המאפיין של כל תורשה היא הגרלה) כימיה (צורה אקראית של פולימרים, למשל) תורת המשחקים, מדעי החברה, כלכלה (לתנודות בורסה יש מודל כתהליך סטוכסטי) ועד למדעי המחשב, שבהם משתמשים באלגוריתמים אקראיים.

3.1 האקסיומטיזציה של תורת ההסתברות

בתחילת המאה העשרים, סבלה תורת ההסתברות ממספר פרדוקסים (כמו למשל, הפרדוקס של ברטרנד), ובעיני הציבור המדעי הייתה נחשבת כפרק של האנליסה המתמטית או כאוסף של משחקים קומבינטוריים ושעשועים שונים. לאט לאט החלו גדולי המתמטיקאים להתעניין בתורת ההסתברות והפכו אותה לתורה מתמטית מושלמת במלוא מובן המלה. בורל הגדיר את מושג ההתכנסות החזקה (כמעט תמיד) עבור סדרה של משתנים מקריים, והוכיח ניסוח ראשון של החוק החזק של המספרים הגדולים ב־1909. הוא גם הוכיח את החלק הראשון של הלמה של בורל־קנטלי (החלק השני הוכח על־ידי קנטלי ב־1917). אולם ההוכחה המדויקת הראשונה של החוק החזק ניתנה על־ידי האוסדורף (F. Hausdorff, 1874–1942) ב־1914. הוכחת החוק החזק בתנאים כלליים יותר, וכן משפט הלוגריתמוס האיטרטיבי הוכח על־ידי חינצ׳ין (Y.A. Khintchine, 1894–1960) בשנת 1924. מרקוב הגדיר ב־1905 את מה שקוראים היום שרשרת מרקוב. מושג זה מבשר את חקר סדרות משתנים מקריים כאשר יש תלות חלקית בין המשתנים. סוג אחר של תלות חלשה בין משתנים מקריים הוא מושג המרטינגל. בשליה (L. Bachelier, 1870–1946) בשנת 1900 היה הראשון שהתחיל להתעניין בסוג זה של תלות. במשך המאה העשרים, תהליכי מרקוב ומרטינגלים התפתחו בצורה מפליאה.

ניסיון ראשון של אקסיומטיזציה נעשה על־ידי וון־מיזס (R. Von Mises, 1883–1957). אבל הצעדים היסודיים נעשו על־ידי המתמטיקאי הרוסי קולמוגורוב (A.N. Kolmogorov, 1903–1987) שפעילותו בתורת ההסתברות ענקית. הוא ביסס את תהליכי מרקוב, מצא מספר תוצאות בהתכנסות סדרת משתנים מקריים (למשל, משפט שלושת הטורים), הכליל בצורה הטובה יותר את החוק החזק והוכיח את חוק 0-1 ב־1933. קולמוגורוב פירסם מונוגרפיה בעלת חשיבות מיוחדת, שבה הוא נותן את היסודות האקסיומטיים של תורת ההסתברות. לעבודה זו השפעה מרובה על כל המחקרים שהתפרסמו אחריה. הוא מכניס את מרחב ההסתברות (Ω, Φ, P) ומגדיר את המשתנה המקרי כפונקציה מדידה ביחס למרחב זה. כל המתמטיקאים קיבלו את המסגרת הזו לתורת ההסתברות.

3.2 התהליכים הסטוכסטיים

במאה השנים האחרונות, רוב עבודות המחקר בתורת ההסתברות מתייחסות לתהליכים סטוכסטיים (המילה ״סטוכסטי״ מקורה ביוונית עתיקה ופירושה ״אקראי״). תהליך סטוכסטי זהו משפחה של משתנים מקריים (או ליתר דיוק לשוני, משתנים אקראיים) התלויים בפרמטר שהוא בדרך כלל הזמן

התנועה הבראונית הדוגמה המפורסמת ביותר של תהליך סטוכסטי היא התנועה הבראונית עד היום התנועה הבראונית היא מקור לפיתוחים חדשים, לבעיות חדשות ולישומים שונים בהרבה תחומים, כמו פיסיקה, אלקטרוניקה ותקשורת הנושא החל בשנת 1827 כאשר הבוטניסט רוברט בראון (R Brown, 1773–1858) גילה שיש תנועה מאוד לא מסודרת של חלקיקים בתוך נוזל או גז בשנת 1905, איינשטיין (A Einstein, 1879–1955) וסמולוכובסקי (M V Smoluchowski, 1850–1917) בנו (באופן בלתי תלוי זה בזה) מודל הסתברותי של התנועה הבראונית איינשטיין מניח שלמיקום החלקיק בזמן $t > 0$ כאשר ידוע שהיה במקום x בזמן 0, יש פונקציה $P_t(x,y)$ ומשיקולים פיסיקליים הוא מוכיח כי פונקציית צפיפות זו מקיימת את משוואת החום

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D\sum_i \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\right) P_t(x,y) = 0$$

וכן, $\lim_{t\to 0} P_t(x\ y) = \delta(x-y)$

הפתרון היחיד של משוואה זו היא הצפיפות הנורמלית

$$P_t(x,y) = (4\pi Dt)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{-\|y-x\|^2}{4Dt}}$$

כאשר $\|y-x\|^2 = \sum_i (y_i - x_i)^2$

פתרון זה מצביע על מיקום החלקיק בזמן t בצורה הסתברותית במבט הפיסיקלי, לקבוע D יש משמעות רבה, הוא תלוי בחום ובחומר סביבת החלקיק, וכן תלוי בקבוע של בולצמן הגישה של סמולוכובסקי הייתה שונה לחלוטין (אבל כמובן, הובילה לאותן התוצאות) רעיונו היה להסתכל על התנועה הבראונית כגבול של מהלכים אקראיים פשוטים

תהי $\{Y_n\}$ סדרה של מ״מ ב״ת המקבלים את הערכים ± 1 בהסתברויות $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ לכל $h > 0$ ו־$s > 0$ נסמן

$$X_{ns} = x + h\sum_{m=0}^{n-1} Y_m$$

זהו מהלך מקרי עם תנאי התחלתי $X_0 = x$ קל לראות של־X_{ns} התפלגות בינומית כאשר $EX_{ns} = x$ ו־$VX_{ns} = nh^2$

נשים לב גם, שבזמן $t = ns$, המ״מ X_t נמצא במרחק ממוצע $h\sqrt{n}$ מנקודת ההתחלה x, למרות שהמרחק הכללי עד הזמן t שווה ל־$\sum_{m=0}^{n-1}|X_{(m+1)s} - X_{ms}| = nh$ ולכן גדול יותר מאשר X_t (כאשר n גדול)

עתה, אם נשאיף את s ו־h לאפס, כך ש־$\frac{h}{\sqrt{s}}$ ישאף ל־$\sqrt{2D}$, נקבל, בעזרת משפט הגבול המרכזי (משפט דה־מואבר לפלס), שלכל t, התפלגות X_t מתכנסת להתפלגות נורמלית עם צפיפות כמו קודם

$$P_t(x\ y) = (4\pi Dt)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{-\|y-x\|^2}{4Dt}}$$

הגדרה מתמטית ומדויקת של התנועה הבראונית נמצאה רק בשנת 1923 על־ידי נורברט וינר (Norbert Wiener, 1894–1964) (דרך אגב, וינר היה נין לרבי עקיבא איגר המפורסם, רבה הראשי של העיר פוזן בפולין, ומצאצאי הרמב״ם)

תנועה בראונית n־ממדית היא משפחה של מ״מ $\{B_t,\ t \geq 0\}$ המקבלים ערכים ב־R^n ומקיימים את שתי התכונות הבאות

א לכל $0 \leq t_0 < t_1 < \ \ < t_n$ המ״מ $B_{t_1} - B_{t_0},\ \ B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ בלתי תלויים

ב $B_0 = 0$ ולכל $0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s \sim N(0,\ (t-s)^n)$.

מוכיחים שהתנועה הבראונית אכן קיימת בנוסף, אפשר לבנות מרחב הסתברות כך שלכל נקודה ω במרחב ההסתברות, הפונקציה $t \to B_t(\omega)$ רציפה לטענה חשובה זו יש היום הוכחות שונות ההוכחה המקורית של וינר השתמשה בתורת הטורים הטריגונומטריים

למסלולי התנועה הבראונית (כלומר הפונקציות $t \to B_t(\omega)$ לכל ω) יש תכונות מעניינות במיוחד המסלולים אמנם רציפים, אולם הם אינם גזירים באף נקודה (מבחינה היסטורית, זאת הייתה הדוגמה הראשונה של פונקציה טבעית שהיא רציפה ולא גזירה באף נקודה)

המתמטיקאי פאול לוי (P Lévy, 1886–1971) חקר הרבה את התנועה הבראונית, כתב מספר ספרים על תכונותיה והגדיר מספר הרחבות אחת מתוצאותיו המפורסמות ובעלת השלכות רבות היא ש

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{nt} \left[B_{\frac{k+1}{n}}(\omega) - B_{\frac{k}{n}}(\omega)\right]^2 = t$$

לכל זמן t, למרות שהמסלולים אינם בעלי השתנות חסומה

תוצאות גיאומטריות יפות התקבלו על־ידי ארדוש (P Erdos), דבורצקי (A Dvoretzki) (פרופ׳ אריה דבורצקי, הוא חבר האקדמיה הלאומית למדעים בישראל והמורה של חלק לא מבוטל של הדור הצעיר של אנשי ההסתברות בישראל), וקקוטני (Kakutani) הם הוכיחו שלגבי התנועה הבראונית במישור, כמעט כל נקודה היא כפולה (כלומר המסלול פוגש אותה פעמיים) אבל כמעט שאין נקודות הזוכות ליותר משני ביקורים

כפי שנאמר, התנועה הבראונית הולידה הרבה הרחבות חשובות בשנת 1930, המתמטיקאים אורנשטיין (L S Ornstein) ואולנבק (G E Uhlenbeck) חקרו את המשוואה הדיפרנציאלית

$$dV_t = -\beta V_t dt + 2\beta^2 D\partial B_t$$

כאשר B_t היא תנועה בראונית, β ו־D שני קבועים חיוביים, ו־V_t המבטא את מהירות החלקיק בזמן t הוא מ״מ משוואה זו בעלת משמעות בפיסיקה (היא נקראת משוואת Langevin)

התהליך $X_t = x + \int_0^t V_s ds$ נקרא תהליך אורנשטיין־אולנבק, וכאשר β שואף לאינסוף, מקבלים שוב את התנועה הבראונית בצורה כללית יותר, אם במשוואת החום מחליפים את אופרטור הנגזרת השנייה על־ידי אופרטור דיפרנציאלי אליפטי מסדר שניים, אפשר לקבל תהליך סטוכסטי בעל מסלולים רציפים הנקרא דיפוזיה דברים אלו מובילים למספר תיאוריות פוריות עד היום הזה

— תורת המשוואות הדיפרנציאליות הסטוכסטיות
— תורת המשוואות הדיפרנציאליות החלקיות הסטוכסטיות
— תורת הפוטנציאל, (שהחלה עם עבודותיו של דוב (J L Doob) בשנות החמישים)

בתורת הפוטנציאל מחפשים פונקציה המקיימת משוואה דיפרנציאלית בתוך קבוצה פתוחה וקבועה על שפת הקבוצה (בעיית דיריכלה — G L Dirichlet, 1805-1859). בעיה זו קשורה מאוד לבעיית זמן היציאה מקבוצה של תהליך סטוכסטי, הנמצא בתוך הקבוצה בזמן ההתחלתי תורת הפוטנציאל היא דוגמה טיפוסית של תיאוריה עם קשרים חזקים, הן בהסתברות, והן במשוואות חלקיות

שיא ההפשטה של התנועה הבראונית הוא נושא מחקר בעשרים השנים האחרונות שנקרא מרחב וינר המופשט (The Abstract Wiener Space) קיום תנועה בראונית בעלת מסלולים רציפים במרחב K שקול לקיום מידת הסתברות על מרחב C(K), שהוא אוסף הפונקציות הממשיות הרציפות המוגדרות על K ההתאמה $f \to (f(t_1), \ldots, f(t_n))$ בעלת צפיפות

$$W_{t_1,\ldots,t_n}(f_1,\ldots,f_n) = Ce^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(f_i-f_{i-1})^2}{t_i-t_{i-1}}}$$

ביחס למידת לבג ב־R^n מידת הסתברות זו נקראת מידת וינר, והיא בעלת תכונות מעניינות הסתכלות זו הובילה למספר מחקרים של מידות במרחבים וקטורים טופולוגים ומשתנים מקריים המקבלים ערכים במרחבים אלו המרחב וינר המופשט, מוגדר על־ידי התאמה ממרחב הילברט לתוך מרחב בנך כך שלפי טופולוגיה מסוימת, הסגור של מרחב הילברט איזומורפי למרחב בנך המתמטיקאי ליאונרד גרוס (L Gross) פירסם מאמר מסכם בעניין זה בשנת 1966

תורה אחרת שמקורה בחקר התנועה הבראונית היא תורת האינטגרל הסטוכסטי למרות שהתנועה הבראונית אינה בעלת השתנות חסומה, ולכן אין משמעות לאינטגרל $\int f(t)\,dB_t$ במובן של לבג־סטילטס, וינר הצליח לראשונה להגדיר את האינטגרל הזה כגבול בהסתברות (אבל לא כמעט תמיד) של סכומים של משתנים מקריים איטו (K Ito) הרחיב, בשנת 1944, את האינטגרל הזה גם כאשר הפונקציה $f(t)$ היא גם תהליך סטוכסטי הרחבה נוספת של האינטגרל הסטוכסטי נעשתה על־ידי דוב בשנת 1953 · אפשר להגדיר את האינטגרל ביחס לכל מרטינגל, ולאו דווקא ביחס לתנועה הבראונית. נזכיר גם את מאייר (P A Meyer) שהרחיב אותו בשנת 1962 התורה לבשה את כסותה האחרון כאשר שמו לב, בשנת 1980 שאפשר להגדיר את האינטגרל הסטוכסטי ביחס לתהליכים שאפשר לחזותם אם ורק אם האינטגרטור הוא מרטינגל למחצה מאז, חוקרים את הקלקולוס הסטוכסטי והקלקולוס הסטוכסטי הדיפרנציאלי, שפותח על־ידי מליאבין (P Malliavin) בשנות השבעים. הרבה ישראלים עוסקים בתחום זה היום, ובין המובילים נזכיר את פרופ׳ משה זכאי מהטכניון, ששמו הולך לפניו בתחום הקלקולוס הסטוכסטי בקהילייה המדעית הבינלאומית

4. סטטיסטיקה במאה האחרונה

למרות שהסטטיסטיקה היא היום ענף נפרד מתורת ההסתברות, נזכיר מספר שמות של אנשים שקידמו את הסטטיסטיקה הזכרנו כבר את גלטון, שהתעסק במודלים גנטיים בנוסף, ואחריו, הסטטיסטיקאים הגדולים בתחילת המאה הם

— אג׳וורת (F Edgeworth, 1845-1926) שהגדיר את מקדם המיתאם בהתפלגות הנורמלית ה־n ממדית
— פירסון (K Pearson, 1857-1936) שפיתח את התפלגות גמה ואת התפלגות חי בריבוע ומבחן טיב התאמה
— יול (G U Yule, 1871-1951) שהכליל את מושג מקדם המיתאם
— פישר (R A Fisher, 1890-1962) שביסס תורת ההסקה הסטטיסטית, ופיתח כלים עבור הגנטיקה
— גוסט (W S Gosset, 1876-1937) שמצא את התפלגות סטודנט

בתקופה הקרובה יותר, נזכיר בין השאר את ניימן (J Neyman, 1894-1980), סבג׳ (L J Savage, 1917-1971), וולד (A Wald, 1902-1950)