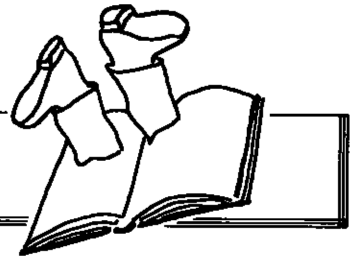


מבט כללי על ידע מתמטי להוראה, והיישום במקרה של פונקציה*

רוחמה אבן
מכון וייצמן למדע
עברית **מירב בן־נתן**

בשנים האחרונות החלה התעניינות בידע המורה בנושא שהוא מלמד, אך רוב המחקרים בתחום זה היו כלליים ולא התמקדו בנושא מסוים מאמר זה מראה, כיצד אפשר לבחון את שאלת ההבנה של מורים בתכנים מתמטיים החלק הראשון של המאמר מדגים בניית מסגרת אנליטית לידע הנדרש למורה כדי ללמד נושא מתמטי, החלק השני של המאמר עושה שימוש במושג הפונקציה כאילוסטרציה לתיזה שאותה הוא מנסה להציג בחירת ההיבטים היוצרים את היבטיה העיקריים של המסגרת התבססה על ידע משולב ממספר תחומי מחקר תפקידו וחשיבותו של הנושא בתחום המתמטיקה ובתכנית הלימודים במתמטיקה, מחקר ועבודה תיאורטית על למידה, ידע והבנת מושגים מתמטיים באופן כללי ובנושא הספציפי במיוחד, ועבודה תיאורטית בנושא ידע של מורים בחומר והשפעתו על ההוראה תיאור יישומה של המסגרת בנושא של תפיסת מושג הפונקציה מומחש בעזרת אנקדוטות, שנלקחו ממחקר שבדק הבנה של פרחי הוראה לחטיבה העליונה את נושא הפונקציות

הקדמה

אנשי קהילת החינוך המתמטי מוטרדים כיום מהדרך שבה נלמד מקצוע המתמטיקה הם קוראים לשינוי בהוראה הקיימת לקראת הוראה השמה דגש על חשיבה, הבנה ולמידה משמעותית (Davis, 1986, Educational Technology Center, 1988, Lampert, 1988, Lappan and Schram, 1989, NCTM, 1989a; Peterson, 1988, Resnick, 1987, Romberg, 1983, Schoenfeld, 1987)

תפקידו של המורה לעזור ללומד להגיע להבנה בנושא הנלמד ואולם, כדי לעשות זאת, למורים עצמם צריך להיות ידע מוצק בנושא מורה בעל הבנה מתמטית מוצקה יוכל לעזור לתלמידיו להגיע ללמידה משמעותית הבנת החומר היא רק אחד מהמרכיבים הנדרשים למורה כדי להיות מוכן להוראה, אך בהחלט מרכיב חשוב ביותר

לאחרונה, כחלק מהניסיונות לעריכת רפורמה בהוראת המתמטיקה בארה"ב נעשים מאמצים לשפר את ההכשרה המקצועית של המורים (Carnegie Task force, 1986, Holmes Group, 1986, NCTM, 1989b) במסגרת זו, אחת המטרות היא לחזק את הידע המתמטי של המורים המועמדים להוראה "יידרשו לעבור בחינה המוכיחה את שליטתם בנושא שאותו ילמדו" (Holmes Group, 1986) במקביל מתעורר צורך להגדיר ולנתח מהו הידע המתמטי הנדרש כדי ללמד מתמטיקה

תפיסות לגבי ידע המורים השתנו במהלך השנים בתחילת המאה דיואי (Dewey, 1904) תיאר ידע של מורים במונחים איכותיים, דבר שלא איפשר למדוד או להעריך באופן ישיר את הידע של המורים כשמחקר על הוראה נטה לכיוון "תהליך־תוצאה" (Process-product research), נקבעו אמות מידה כמותיות לידע של מורים מספר הקורסים שהמורה השתתף בהם, ציונים שקיבל במבחנים סטנדרטיים וכו' (Ball, in press, Wilson, Shulman and Richert, 1987)
אולם מדדים אלה הם בעיתיים, כי הם לא מייצגים את הידע האמיתי שיש למורים שולמן (Shulman, 1986), בהרצאה שנתן כנשיא האיגוד האמריקאי לחקר החינוך (American Educational Research Association) בכנס השנתי ב־1985, אותת חזרה לגישה איכותית להגדרת ידע של מורים מלומדים אחרים גם הם כותבים כיום על ידע של מורים במונחים של איכות (Ball, in press, Leinhardt and Smith, 1985, Tamir, 1987, Wilson et al, 1987)

על־ידי החלפת ההגדרה של ידע מורים המסתמכת על מספר הקורסים שבהם השתתפו או על הצלחתם במבחנים סטנדרטיים בהגדרה הדורשת ניתוח של מה פירושו לדעת מתמטיקה, יש סיכוי לשפר את איכות הכשרת המורים בתחום הידע המתמטי,

* Subject Matter Knowledge for Teaching and the case of Functions, *Educational Studies in Mathematics* 21, no 6 (December 1990) 521-544
התרגום העברי מתפרסם באדיבות המחברת והוצאת Kluwer

ובכך לשפר את ההוראה והלמידה. אולם, ניתוח השאלה מהו ידע מתמטי הנדרש למורה באופן כללי עדיין אינו מספיק כדי לדעת מהו הידע הדרוש למורים כדי ללמד נושא מתמטי מסוים. בעוד שניתוח איכותי של ידע מורים הביא אותנו צעד אחד קדימה ביחס לרשימה פשטנית של מיומנויות אשר שימשה כמדד לידע, ניתוחים כאלה חסרים מאפיינים ספציפיים של ידע הדרוש להוראת נושא מתמטי מסוים.

מאמר זה מראה איך אפשר לבחון את שאלת ההבנה של המורים בתכנים מתמטיים. המאמר מדגים בניית מסגרת אנליטית לידע הנדרש למורה כדי ללמד נושא מתמטי מסוים. ראשית, נדון בפיתוח מסגרת כללית תוך שימת דגש על עקרונות מדריכים כלליים. בהמשך, יתואר היישום של המסגרת בנושא של תפיסת מושג הפונקציה. אנקדוטות, אשר נלקחו ממחקר שבדק הבנה של פרחי הוראה לחטיבה העליונה בנושא פונקציות (Even, 1989), מובאות כדי להבהיר את המסגרת ולהצביע על נקודות חולשה בידע המורים.

המסגרת הכללית

ידע של מורים על נושא מתמטי מסוים מושפע מהידע שיש להם בתחומי דעת שונים. לכן, ניתוח של ידע מורים בנושא מסוים במתמטיקה צריך לשלב מספר גופי ידע: תפקידו וחשיבותו של הנושא במתמטיקה ובתכנית הלימודים במתמטיקה, מחקר ועבודה תיאורטית על למידה, ידע והבנה של מושגים מתמטיים באופן כללי ובנושא הספציפי במיוחד, ולבסוף מחקר ועבודה תיאורטית על ידע המורה והשלכתו על ההוראה. כמו כן יש לקחת בחשבון את האוכלוסיה המסוימת אשר בה דנים. כתוצאה מניתוח זה עולה, כי אפשר להבחין בשבעה היבטים שהם ההיבטים העיקריים של המסגרת לידע המתמטי הנדרש למורים כדי ללמד נושא מתמטי מסוים.

מאפיינים הכרחיים. אחד המרכיבים של המסגרת עוסק בדימוי המושג, תוך מתן תשומת לב למהות המושג. וינר (Vinner, 1983) מגדיר דימוי מושג כתמונה המנטלית של המושג (כלומר אוסף כל ה"תמונות" הקשורות למושג במוחו של האדם) יחד עם קבוצת כל התכונות הקשורות למושג (במוחו של האדם). דימוי המושג עשוי להשתנות מאדם לאדם. רזניק ופורד (Resnick and Ford, 1984) בעקבות הצעתו של גרינו (Greeno, 1978) טוענים כי ההתאמה בין הדימוי המנטלי הסובייקטיבי שיש לאדם על מושג מסוים לבין המושג המתמטי הנכון היא קריטריון חשוב להערכת ידע בנוי היטב במתמטיקה. לא רבים יחלקו על הטיעון הכללי שיש צורך בהתאמה טובה בין האופן שהמורה מבין מושג מסוים שהוא מלמד לבין המושג המתמטי "הנכון" — אך מהו המושג המתמטי הנכון?

למרות שהתשובה לשאלה זו אינה חד־משמעית והיא תלויה הן בתוכן והן בהקשרו, אנו טוענים כי מורים צריכים להיות מסוגלים לקבוע אם דוגמה מסוימת שייכת למשפחת המושג על־ידי שימוש בשיקולים אנליטיים, בניגוד לשימוש בלבדי בשיקולים פרוטוטיפיים. הסוג הראשון של שיקולים מתייחס לתכונות הקריטיות של המושג (התכונות שהכרחי שתתקיימנה כדי להיות דוגמה למושג) הנגזרות מההגדרה המתמטית שלו. שיקולים מהסוג השני עושים שימוש בדוגמה פרוטוטיפית כמסגרת להתייחסות, אם על־ידי יישום של שיפוט חזותי ואם על־ידי התבססות על התכונות של הפרוטוטיפ והשלכתן על דוגמאות אחרות של המושג (Hershkowitz, 1990).

דימוי המושג נקבע בעיקר על־פי הדוגמאות הקשורות למושג שאנשים פוגשים, ולא על־פי הגדרת המושג. אולם, אין די בזה שמורים יהיו מסוגלים להבחין בין דוגמאות הקשורות למושג לכאלה שאינן קשורות בו, כשהדוגמאות מתאימות לדימוי המושג שלהם. מורים, במיוחד אם הם מאפשרים לתלמידיהם לחקור ולהעלות שאלות, יכולים להיקלע למצבים שבהם עליהם לעסוק בדוגמאות לא מוכרות של המושג. ההחלטות הפדגוגיות שלהם — שאלות שהם מעלים, פעילויות שהם מציעים — מבוססות על הידע המתמטי שלהם. לכן, הכרחי שמורים יוכלו להבחין נכונה בין דוגמאות למושג ובין כאלה שאינן דוגמאות למושג.

נוסף על הטיעונים הפדגוגיים שהועלו כאן, קיימים גם טיעונים תרבותיים. מושגים מתמטיים רבים השתנו במהלך השנים. מושגים אלה השתנו לא בגלל החלטות שרירותיות של מישהו, אלא משום שכתוצאה מידע חדש במתמטיקה, נוצר צורך בהרחבת המושג המתמטי. גילויים חדשים יצרו ענפי מתמטיקה חדשים — דבר שאף גרם לשינויים בהגדרות. מורים למתמטיקה השבויים בדימוי מוגבל של המושג, עלולים למצוא עצמם במצב של אי־הבנת מושגים מתמטיים עדכניים, המבוססים על תפיסה מודרנית יותר של המושג.

הצגות שונות. למושגים רבים במתמטיקה מובנים שונים בהקשרים שונים. בעוד שהגדרה פורמלית של מושג עלולה ליצור את הרושם שלמושג משמעות אחת ויחידה, למושגים מורכבים משמעויות רבות והם מופיעים בהצגות שונות בתחומים הרבים של המתמטיקה. לכן, מרכיב נוסף של המסגרת קשור להצגות השונות שיש למושג.

הבנת מושג בהצגה אחת לא מבטיחה בהכרח את הבנתו בהצגה אחרת. על מורים להבין מושגים בהצגות שונות ולהיות מסוגלים לעבור מהצגה להצגה וליצור את הקשרים ביניהן. הצגות שונות של המושג נותנות תובנות שונות, ובכך מאפשרות הבנה טובה, עמוקה ושלמה יותר של המושג. עיסוק במושג מתמטי בהצגותיו השונות מאפשר הפשטה של המושג על־ידי זיהוי התכונות הרלוונטיות הקשורות בו, והתעלמות מהתכונות הלא־רלוונטיות, הנובעות מההצגה המסוימת, והנמצאות בשימוש באותו רגע (Dufour-Janvier, Bednarz and Belanger, 1987, Lesh, Post and Behr, 1987).

גישות אלטרנטיביות. נוסף על כך שמושג מורכב מופיע בצורות שונות, בהצגות שונות ובסימונים שונים, נעשים בו שימושים מגוונים בתחומים השונים במתמטיקה, בדיסציפלינות אחרות או בחיי היום־יום קיימות גישות אלטרנטיביות לשימוש באותו מושג גישות אלה שונות זו מזו, ואף אחת מהן אינה מתאימה לכל המצבים לעיתים, כשאפשר להשתמש ביותר מגישה אחת, יש גישות מסוימות אשר מתאימות יותר מהאחרות לכן, יש לדעת לבחור את הגישה המתאימה ביותר מבין מספר גישות אפשריות מורים צריכים להכיר את הגישות העיקריות השונות ואת השימוש בהן

עוצמתו של מושג. הצלחתו של מושג בתחום המתמטיקה נעוצה בהזדמנויות החדשות שהוא פותח מושגים נעשים חשובים ובעלי עוצמה בגלל תכונה ייחודית שלהם המציבה אפשרויות חדשות לכן, מורים צריכים להכיר את התכונות הייחודיות ובעלות העוצמה של המושג התת־נושאים החשובים, או התת־מושגים הקשורים למושג, אינם יכולים להיות מובנים לגמרי אם מסתכלים עליהם מנקודת מבט צרה ומוגבלת הבנה של תת־נושאים או תת־מושגים אלה מצריכה הבנה של המשמעות הכללית, הכוללת את תמצית ההגדרה, כמו גם ידע מתמטי פורמלי ומתוחכם יותר

רפרטואר בסיסי. בכל נושא או מושג מתמטי יש צורך בנגישות לדוגמאות ספציפיות הרפרטואר הבסיסי כולל דוגמאות מרכזיות אשר ממחישות עקרונות חשובים, משפטים, תיאוריות וכו' תהליך הגיבוש של הרפרטואר הבסיסי יוצר תובנות והבנה עמוקה יותר של ידע כללי ומורכב יותר כשמתמודדים עם סיטואציות מורכבות, הידע הבסיסי משמש כמשען, ו"מפקח" על דרכי חשיבה ופעולה הרפרטואר הבסיסי חייב להיות ידוע ומוכר היטב, כדי שיהיה אפשר להשתמש בו בקלות בכל עת אולם, אין זה אומר שיש לזכור בעל־פה עובדות ולהשתמש בהן ללא הבנה נהפוך הוא — רק אם הרפרטואר הבסיסי נרכש בצורה משמעותית ועם הבנה, אפשר להשתמש בו כהלכה ובצורה נבונה

ידע של המושג והבנתו. ידע קונספטואלי מתואר על־ידי היברט ולפבר (Hiebert and Lefevre, 1986) כידע העשיר בקשרים וזוהי רשת של מושגים וקשרים (Bell, Costello and Kuchemann, 1983) לימוד מושג, או יחס חדש, משמעותו תוספת קשר חדש למבנה הקוגנטיבי והעשרתו באופן זה משמעות, לפי היברט ולפבר, מתקבלת כאשר נוצרים קשרים בין "יחידות ידע" לכן, ידע קונספטואלי חייב להירכש בצורה משמעותית מצד שני, ידע פרוצדורלי מורכב מהשפה הפורמלית של המתמטיקה ומהאלגוריתמים לפתרון בעיות במתמטיקה ידע פרוצדורלי יכול להירכש גם ללא משמעות

בבית הספר יש נטייה לשים דגש יתר על ידע פרוצדורלי ללא קשר מספיק לידע קונספטואלי ולמשמעות (Davis, 1986, Educational Technology Center, 1988, Lampert, 1988, Lappan and Schram, 1989, NCTM, 1989a, Peterson, 1987, Schoenfeld, 1988) תלמידים מתבקשים לזכור בעל־פה הרבה עובדות וטכניקות, ללא שימת דגש על הבנת המושגים ויישומם, למרות שבעידן הטכנולוגיה המתקדמת פחתה חשיבותן של מיומנויות טכניות

ואולם, אין להסיק כי כתוצאה משאיפתנו להגיע ללמידה משמעותית והבנה, יש להתעלם מהידע הפרוצדורלי למרות שאין סיבה לזכור בעל־פה אלגוריתמים שיכולים להתבצע בקלות על־ידי מחשבים, ידע פרוצדורלי הוא בכל־זאת ידע חשוב נשר (Nesher, 1986) טוענת שההפרדה בין לימוד אלגוריתמים ובין הבנה היא הפרדה שטחית ומטעה, משום שמחקר בתחום לימוד המתמטיקה אינו מראה לנו קשר בין הצלחה בביצוע אלגוריתמים לבין הצלחה בהבנת החומר כמו כן, אין הוכחה לכך שהבנה תורמת להצלחה בביצוע באלגוריתמים רזניק ופורד (Resnick and Ford, 1984) מוסיפים, כי זכירה בעל־פה של טכניקות ואלגוריתמים אינה ערך חשוב בפני עצמו חשיבותה נעוצה בכך שהיא מאפשרת פיתוח תגובות אוטומטיות כשתהליכים מסוימים יכולים להתבצע באופן אוטומטי, ללא צורך בתשומת לב ישירה, יש אפשרות להתמקד בתהליכים הדורשים תשומת לב

באופן כללי, ידע מתמטי צריך לכלול את שני סוגי הידע והקשרים ביניהם כשמשתמשים בידע באופן דינמי, כדי לפתור בעיה או כדי לבצע משימה לא טריוויאלית, הקשרים בין הידע הקונספטואלי והפרוצדורלי הם החשובים (Silver, 1986) אי אפשר לומר כי מישהו יודע מתמטיקה אם אחד מסוגי הידע לוקה בחסר, או אם שני סוגי הידע קיימים אך אינם קשורים ביניהם (Hiebert and Lefevre, 1986) כאשר מושגים ופרוצדורות אינם קשורים ביניהם, יתכן שתהיה לאדם אינטואיציה טובה למתמטיקה, אך לא היכולת לפתור בעיות במתמטיקה או שהוא יוכל להגיע לתשובות, אך ללא הבנה אמיתית של מה שנעשה

ידע על מתמטיקה. ידע בתחום מסוים במתמטיקה כולל יותר מאשר ידע קונספטואלי ופרוצדורלי הוא כולל גם ידע על אופיה וטבעה של המתמטיקה זהו ידע כללי על התחום, אשר מדריך את הבנייה של ידע קונספטואלי ופרוצדורלי והשימוש בו הוא כולל דרכים, אמצעים ותהליכים לביסוס אמיתות ויצירתן, וכמו כן את החשיבות היחסית של רעיונות שונים (Ball, in press, Lampert, 1988, Schoenfeld, 1988, Shulman, 1986, Tamir, 1987, Thompson, 1984) הכרת אופיה של המתמטיקה כוללת גם את האיפיון של ההשתנות התמידית של המתמטיקה, ואת ראייתה כיצירה של האינטלקט האנושי, אשר מושפעת מכוחות שונים, פנימיים וחיצוניים (Wilder, 1972)

עד כה התמקד מאמר זה בידע מורים בנושאים מתמטיים בחלק הבא נתמקד ביישומה של המסגרת הכללית בתחום של תפיסת מושג הפונקציה, עם הדגמות של קשיים הנגרמים כתוצאה מחוסר הבנה ביחס להיבטים השונים

ההדגמות נלקחו ממחקר על פרחי הוראה בחטיבה העליונה, אשר בדק ידע והבנה של פונקציות (Even, 1989) המשתתפים במחקר היו 162 פרחי הוראה בשלב האחרון של לימודיהם הפורמליים, מ־8 אוניברסטאות בארצות הברית נתונים נאספו בשני שלבים, מנובמבר 1987 עד אפריל 1988 במהלך השלב הראשון, מילאו פרחי ההוראה שאלון פתוח, שכלל בעיות מתמטיות לא סטנדרטיות בנושא הפונקציות, הקשורות להיבטים שדנו בהם עד כה כמו כן, הוצגו בשאלון דוגמאות לעבודה של תלמידים, המייצגות ידע מוטעה בנושא הפונקציות, והמורים לעתיד התבקשו להגיב עליהן בשלב השני של איסוף הנתונים, נערכו ראיונות אינטנסיביים ל־10 משתתפים, כדי לבסס ולחזק את תוצאות ניתוח השאלונים

הפונקציות

מאפיינים הכרחיים – מהי פונקציה?

פרוידנטל (Freudenthal, 1983) בניתוחו המקיף, מחשיב שרירותיות וחד־ערכיות כמאפיינים ההכרחיים של מושג הפונקציה כפי שהוא התפתח במשך השנים שרירותיות קשורה קשר הדוק לשיפוט אנליטי — האם דוגמה מסוימת שייכת למשפחת מושג (כפי שתואר במסגרת הכללית) בזמן שחד־ערכיות היא תכונה ספציפית של פונקציה

שרירותיות של פונקציות — האופי השרירותי של פונקציות מתייחס הן לקשר בין שתי הקבוצות שעליהן מוגדרת הפונקציה והן לקבוצות עצמן הסוג הראשון של שרירותיות, פירושו שפונקציות אינן חייבות להיות מתוארות על־ידי ביטוי מסוים, לקיים חוקיות מסוימת, או להיות מתוארות על־ידי גרף בעל צורה מסוימת הפונקציה המתארת את הקשר בין זמן וטמפרטורה היא דוגמה להתאמה "שרירותית" שכזאת האופי השרירותי של הקבוצות פירושו שפונקציות לא חייבות להיות מוגדרות על קבוצה מסוימת של עצמים, ובפרט, הקבוצות לא חייבות להיות קבוצות מספרים סיבוב במישור הוא דוגמה לפונקציה לא־מספרית, שכן סיבוב מוגדר על קבוצת נקודות

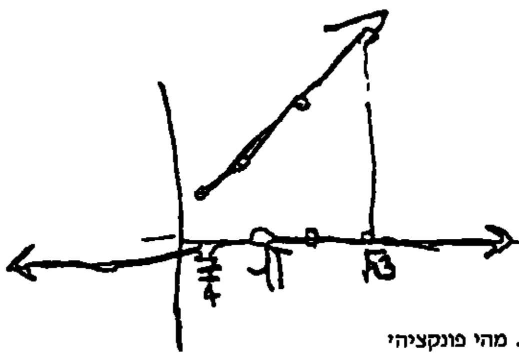
רעיון שרירותיות הפונקציה היה בעיה למתמטיקאים במאה ה־18 רק במאה ה־19, כאשר דיריכלה (Dirichlet) הציג את הפונקציה (המוכרת כיום כפונקציית דיריכלה) המתאימה לכל מספר רציונלי את המספר 1 ולכל מספר אי־רציונלי את המספר 0, פונקציות שרירותיות התחילו להיחשב כפונקציות, וכך התרחבה משמעות המושג מאוחר יותר, נוסף על שרירותיות הקשר בין המשתנים עצמם או הקבוצות שעליהן הוגדרה הפונקציה, הוענק מימד השרירותיות למושג הקבוצה עצמו

הדוגמה הבאה מראה, כי האופי השרירותי של פונקציה אינו מתקבל על דעתם של פרחי הוראה רבים את התופעה הזו אפשר לראות כתוצאה משימוש בשיפוט פרוטוטיפי לקביעה אם דוגמה מסוימת היא פונקציה, ומדימוי מוגבל של המושג

פרח הוראה נשאל אם g(x) היא פונקציה

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{אם x מספר רציונלי} \\ 0, & \text{אם x מספר אי־רציונלי} \end{cases}$$

בתשובתו ש־g(x) היא אכן פונקציה, התבסס המועמד על ההגדרה הנכונה של המושג פונקציה, "לכל מספר מתאים ערך יחיד" תשובתו יכולה ליצור את הרושם, כי אדם זה משתמש בהגדרה לצורך שיפוט אנליטי בבואו לקבוע אם דוגמה מסוימת היא פונקציה או לא, כלומר, הוא מקבל את האופי השרירותי של פונקציות אולם, מאוחר יותר התברר, שהעניין אינו כל־כך פשוט כשהתבקש פרח ההוראה לשרטט סקיצה של הפונקציה הוא שרטט מספר נקודות על ציר ה־x למספרים האי־רציונליים π, $\frac{7}{4}$ (!), $\sqrt{13}$, וקו אלכסוני $y = x$ עם חורים עליו (ראה איור 1)



איור 1. מהי פונקציה?

כשלפניו גרף לא מוכר, קשה היה לו להחליט אם גרף זה הוא גרף של פונקציה הקושי שלו נבע מאי־התאמה בין הדימוי שלו של מושג הפונקציה, לבין ההגדרה הפורמלית של המושג

> אני לא יודע אם זו פונקציה זה עונה על הקריטריון אבל לא נראה יפה אי אפשר באמת לשרטט את זה אולי זה לא אבל זו פונקציה לא רציפה מרשים אי־רציפות נו טוב (מושך בכתפיו ולא יכול להחליט האם זו פונקציה)

סיטואציה כזו, בצורה זו או אחרת, לא הייתה נדירה בקרב פרחי ההוראה שהשתתפו במחקר לרבים מהם היה קושי בקבלת האופי השרירותי של פונקציות בגלל מספר סיבות במקרים מסוימים הם ציפו שפונקציות תמיד תוכלנה להיות מתוארות על־ידי נוסחאות, ובמקרים אחרים דרשו שהגרפים יהיו "יפים" ו"הגיוניים" רבים מהם ציפו שהפונקציות תהיינה מוכרות להם

תוצאות אלה מתאימות לתוצאות שאליהן הגיעו חוקרים אחרים, שחקרו תפיסות של תלמידי תיכון וסטודנטים באוניברסיטה לגבי מה ש"נחשב" בעיניהם לפונקציה, והשוו בין דימוי המושג של תלמידים לבין ההגדרה המתמטית (Vinner, 1983; Dreyfus and Eisenberg, 1983, 1987, Lovell, 1971, Markovits, Eylon and Bruckheimer, 1983, 1986, Marnyanskii, 1975, Thomas, 1975, Vinner, 1983, Vinner and Dreyfus, 1989)

תוצאות מחקרים אלה מצביעות על תפיסה מוגבלת של פונקציות, הנגרמת מציפיות מסוימות מפונקציות ומהתנהגותן מצב זה אינו מפליא — כמעט כל הפונקציות שבהן פוגשים תלמידי תיכון ולעיתים אפילו סטודנטים באוניברסיטה הן פונקציות שיש להן גרף "יפה", ואפשר לתארן בנוסחה לכן, דימוי המושג של תלמידים נקבע על־פי הפונקציות שהם פוגשים, ולא על־פי ההגדרה המודרנית של פונקציה המדגישה את האופי השרירותי של הפונקציות אולם, בעוד שאפשר לקבל הסבר זה לגבי תפיסות של תלמידים, המצב בעייתי יותר לגבי מורים אי אפשר לקבל מצב שלמורי תיכון בסוף המאה ה־20 יש דימוי מוגבל של פונקציה בדומה למה שהיה במאה ה־18 תפיסה חלקית של פונקציות אצל מורים היא בעייתית ועלולה לתרום לאי־ההתאמה בין הגדרת המושג ובין דימוי מושג הפונקציה בעיני תלמידים, תוך היצמדות לאופן שבו נתפס המושג במאה ה־18

חד־ערכיות — בעוד שהאופי השרירותי של פונקציות נובע באופן עקיף מההגדרה, דרישת החד־ערכיות — כלומר שלכל איבר בתחום מתאים איבר יחיד בטווח — מבוטאת באופן מפורש דרישה זו היא חלק אינטגרלי בכל תכנית לימודים העוסקת בפונקציות ומודגשת בכל הגדרה הנתנת בספר לימוד לדוגמה "יהיו D ו־R שתי קבוצות פונקציה מ־D ל־R היא חוק המתאים לכל איבר ב־D איבר יחיד ב־R" (Dolciani et al , 1986)

הבחנה בין פונקציות ולא־פונקציות על־ידי שימוש בדרישת החד־ערכיות היא פעילות אופיינית מאוד ברוב ספרי הלימוד בנושא פונקציות לדוגמה, "קבע אם קבוצת הזוגות הסדורים הנתונה היא פונקציה כשהיחס לא מתאר פונקציה, נמק מדוע לא" (Coxford and Payne, 1987, pp 178-9) תרגילים דומים ניתנים ברוב ספרי־הלימוד המציגים פונקציות (לדוגמה, Dolciani et al , 1986, Keedy et al , 1986, Nichols et al , 1986)

בעוד שאפשר, אולי, להתווכח על הדגשת היתר של דרישה זו ביחס להבנת מושג הפונקציה ועל המקום בתכנית הלימודים שרצוי להעניק לה, אי אפשר להתעלם מכך שחד־ערכיות היא חלק אינטגרלי מהמושג המודרני של פונקציות אולם לא די לדעת שפונקציות צריכות להיות חד־ערכיות מורי תיכון צריכים לדעת **למה** פונקציות הוגדרו כך הם צריכים להכיר את ההתפתחות ההיסטורית של פונקציות, שכן כך אפשר ללמוד את הסיבה לדרישת החד־ערכיות בעקבות ידיעה זו ההגדרה מקבלת משמעות

כפי שמראה ההתפתחות ההיסטורית של מושג הפונקציה, חד־ערכיות לא נדרשה בהתחלה פרוידנטל (Freudenthal, 1983) מסביר, כי דרישה זו נובעת מרצונם של המתמטיקאים לשמור על מצב שנות יותר לעבוד בו מעקב אחרי המשמעות של סימנים רבי ערכים (כמו $\sqrt{}$) והקפדה על שמירה של אותה משמעות באותו הקשר אינן מטלות קלות, והן דורשות זהירות ועירנות רבה כאשר עוסקים בדיפרנציאלים מסדר גבוה יותר מסדר ראשון, וכאשר צריך להבחין בין המשתנה הבלתי תלוי והתלוי, הסמלים הרב־ערכיים נעשים מסורבלים מאוד אנליסה מתקדמת של פונקציות הובילה לצורך בהגבלה על המושג לפונקציות חד־ערכיות בלבד

רוב המשתתפים במחקר היו מודעים לדרישת החד־ערכיות וידעו איך להשתמש בה כקריטריון לקביעה אם התאמה מסוימת היא פונקציה או לא רבים החשיבו את החד־ערכיות כתכונה חשובה אולם כמעט אף אחד לא ידע להסביר מדוע זה חשוב ומה מקור הדרישה לדוגמה, כשאחת מפרחי ההוראה התבקשה להסביר את חשיבות החד־ערכיות היא אמרה — "לא יודעת למה אני לא יודעת למה צריך את זה אבל זו הדרך שבה למדתי תמיד"

אחרי "שנלחצו" לחשוב על הסבר לדרישה זו, ניסו חלקם להשתמש בצרכי היומיום, הנדסה או מדע כמקור לדרישה זו בלי לראות קשר כלשהו למתמטיקה טהורה אחרים חשבו שחשיבותה של דרישה זו מקורה במתמטיקה אבל ההסבר ההיסטורי לשמירת "נוחיות" לא היה המקור לאמונה זו אדם אחד, לדוגמה, תיאר את הסיבה לדרישה זו כשרירותית

> זה נראה כאילו מי שהחליט לקרוא לזה פונקציה פשוט קבע את זה בתור אחת הדרישות הייתי חושב שמי שקבע לקרוא לזה פונקציה פשוט החליט אם זה נראה כמו גרף, כזה, ויש לו רק אחד, ואני אקרא לזה פונקציה

שאלות רציניות מתעוררות כתוצאה מכך שכמעט אף אחד מהנשאלים לא היה יכול להעלות הסבר הגיוני לדרישת החד־ערכיות דרישה זו, בדרך כלל, מוצגת לתלמידינו כאחת התכונות החשובות ביותר של פונקציות וכך הם רואים אותה הם יודעים שהיא מבדילה בין יחסים שהם פונקציות ויחסים שאינם פונקציות, אבל ברוב המקרים לא נאמר להם למה חשוב להבדיל בין הקבוצות האלה

מורים רבים למתמטיקה לא מסבירים מה אפשר לעשות עם יחסים שהם פונקציות לעומת יחסים שאינם פונקציות גישה זו יכולה לתרום לכך שהמתמטיקה נתפסת כאוסף שרירותי של כללים והגדרות — גישה שפרח ההוראה דלעיל מחזיק בה, כנראה

שרירותיות וחד־ערכיות הם בלב המושג המודרני של הפונקציה אנו טוענים, כי צריכה להיות התאמה טובה בין דימוי מושג הפונקציה שיש למורים ובין **המושג המתמטי המודרני אין נובע מכאן**, בהכרח, שמורים צריכים לדעת את **ההגדרה הפורמלית המודרנית**, לפיה פונקציה f מוגדרת להיות קבוצה כלשהי של זוגות סדורים כך שאם $(a,b) \in f, (c,d) \in f$ ו־$a = c$, אז $b = d$ במילים אחרות, אין הכרח שמורים יחשבו על פונקציה כעל קבוצה חלקית של המכפלה הקרטזית של שתי קבוצות, כאשר כל איבר בתחום (קבוצת כל האיברים הראשונים בזוגות הסדורים) משודך לאיבר אחד ויחיד בטווח (קבוצת כל האיברים השניים בזוגות הסדורים) בעוד שההגדרה מתורת הקבוצות היא

נכונה, כמובן, היא אינה מעבירה את משמעות הפונקציה כפי שהיא נתפסת, בדרך כלל, במתמטיקה, במדע או בחיי היומיום, כפי שכבר טענו פרוידנטל (1983) ומאליק (1980) במקרים רבים פונקציה לובשת את הצורה של התאמה, תלות או השמה בין שתי קבוצות או משתנים

הצגות שונות של פונקציה

פונקציות מתוארות כמושג מאחד, אולם פונקציות מופיעות ומתנהגות בדרכים שונות פונקציות נמצאות כיום בכל מקום במתמטיקה מקליין (MacLane, 1986) מספק הרבה דוגמאות פעולות אלגבריות הן דוגמאות לפונקציות על מספרים, הגדרות גיאומטריות מייצרות פונקציות טריגונומטריות פונקציית החזקה וההפוכה לה, הפונקציה הלוגריתמית, גם הן פונקציות מספריות פונקציות המוגדרות על נקודות במישור או במרחב כגון סיבוב, שיקוף והזזה מופיעות בגיאומטריה בתורת החבורות ההופכי הוא פונקציה מהחבורה אל עצמה במרחב מטרי, המרחק הוא פונקציה ממשית המוגדרת על זוגות של נקודות באלגברה בוליאנית, חיתוך ואיחוד הם פונקציות על זוגות של קבוצות בגיאומטריה, אורך הוא פונקציה ממשית של עקומות גם מדעי המחשב מספקים דרכים חדשות לשימושים בפונקציות

פרוידנטל (1983) מצביע גם על התוויות השונות שיש לפונקציות במתמטיקה העתקה, טרנספורמציה, תמורה, פעולה, פונקציונל, אופרטור, סדרה, מורפיזם וכו׳ כמו כן, יש גם סימונים שונים לפונקציה, דבר היוצר את הרושם כי מושג הפונקציה אינו מושג אחד ומאחד, אלא מספר מושגים שונים כאשר משתמשים בפעולות אלגבריות לתאר פונקציה, הסימון המקובל הוא f $x \to 2 + x$ לפונקציות רבות, אשר נחשבו לפונקציות כבר בתחילת ההתפתחות של המושג — כאלה בעלות חשיבות מיוחדת או שימושיות במיוחד — ניתנו שמות וסימונים מיוחדים כאלה הן, לדוגמה, הפונקציות הטריגונומטריות tan, cos, sin וכו׳, פונקציית החזקה והלוגריתם וכמו כן פונקציית המשתנה הרנדומלי בהסתברות טרנספורמציות ליניאריות, בהרבה מקרים, מתוארות בעזרת מטריצות אשר אינן נראות כלל כמו הסימון המקובל של פונקציות בתורת הקבוצות משתמשים בסימונים מיוחדים כגון $\in$, $\langle x,y \rangle$, וכו׳

נוסף על ריבוי הסימונים, אותה הפונקציה יכולה להופיע בהצגות שונות ההצגות המקובלות ביותר של פונקציות הן נוסחאות וגרפים קרטזיים הצגות אחרות הן דיאגרמות חצים, טבלאות, קבוצות זוגות סדורים ומצבים מחיי היומיום או מתחומים אחרים במתמטיקה גבוהה, פונקציות מתוארות לעיתים קרובות על־ידי סמל בלבד הדוגמה הבאה ממחישה את הקשיים הנגרמים כתוצאה מחוסר קישור בין הצגות שונות
נתבונן בבעיה הבאה

שאלה

אם מציבים 1 במקום x בביטוי
$ax^2 + bx + c$ (c,b,a מספרים ממשיים)
מתקבל מספר חיובי
הצבת 6 תתן מספר שלילי
כמה פתרונות ממשיים יש למשוואה
$ax^2 + bx + c = 0$? הסבר

בבעיה זו מופיע ביטוי ריבועי בהצגה אחת (אלגברית) רוב נשואי המחקר (בערך 80%) ניסו לפתור בעיה זו (ללא הצלחה) על־ידי שימוש בהצגה זו בלבד, למרות שהשימוש בהצגה אחרת (גרפית) היה יכול להיות קל ומתאים הרבה יותר* הפונקציה הריבועית היא פונקציה יסודית ובסיסית מאוד בתכנית הלימודים בתיכון פרחי ההוראה למדו אותה והשתמשו בה מאז שהיו בתיכון סביר להניח שהם הכירו גם את ההצגה האלגברית וגם את ההצגה הגרפית יחד עם זאת, ראייה של ביטוי ריבועי לא גרמה לכך שההצגה הגרפית מיד תעלה במחשבתם נראה, כי העדר קשרים עשירים בין שתי ההצגות מנע מרבים מבין פרחי ההוראה לקשר בין המשוואה הנתונה $ax^2 + bx + c = 0$ לבין ההצגה הגרפית של הפונקציה $f(x) = ax^2 + bx + c$ דרייפוס ואייזנברג (Dreyfus and Eisenberg, 1986) מדווחים על ממצאים דומים מניסוי שערכו בקורס על־תיכוני למרות שהודגשה בו השיטה הגרפית לפתרון אי־שיוויונים, רק מעטים מהסטודנטים בחרו בדרך הגרפית כאשר פתרו את הבעיות בבחינת הסיום

גישות אלטרנטיביות לטיפול בפונקציות

השימושים השונים בפונקציות מכתיבים לנו גישות שונות לטיפול בפונקציות לפעמים עלינו לטפל בפונקציות בגישה נקודתית, כלומר לשרטט, לקרוא או לעסוק בנקודות בדידות של הפונקציה, אם משום שאנו מתעניינים בנקודות מסוימות, או משום שהפונקציה מוגדרת בתחום בדיד קריאת ערכים מגרף נתון, או מציאת הצפיפות הבדידה של משתנה רנדומלי בדיד, הן דוגמאות לגישה נקודתית לפונקציות במקרים אחרים, עלינו להסתכל על תחומים כך למשל, כשאנו עוסקים בנקודת קיצון מקומית יש גם מקרים שבהם עלינו להתייחס לפונקציה באופן גלובלי ולבחון את התנהגותה כך, למשל, כשאנו מעוניינים לשרטט גרף של פונקציה המוצגת על־ידי ביטוי אלגברי או כשאנו רוצים למצוא נקודת קיצון של פונקציה המוגדרת על המספרים הממשיים ויש פעמים שבהן אנו מטפלים בפונקציות כישויות או עצמים לדוגמה, כשאנו עוסקים במשפחות של פונקציות או כשאנו מגדירים פונקציות של פונקציות

כל אחת מהגישות האלטרנטיביות לטיפול בפונקציות שונה מהאחרות ואף לא אחת מתאימה לכל המצבים לעיתים, כשמתאימה יותר מגישה אחת, גישות מסוימות מתאימות יותר מהאחרות הדוגמה הבאה מדגימה את חשיבות הבחירה בין הגישות הנכונות

כשנשאלו המרואיינים כיצד יסבירו לתלמיד תיכון איך לשרטט את הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$

מחצית מהם התחילו את הסבריהם בהצעת טבלת ערכים ל־x ו־y (בדרך כלל מספרים קטנים ונוחים שקל לחשב), שרטוט הנקודות וחיבורן בקו "חלק" האחרים, הציעו להסתכל תחילה על נקודות אי־ההגדרה — גישה המקדישה תשומת לב להתנהגות הפונקציה

הגישה הראשונה, המדגימה גישה נקודתית לפונקציות, קלה יחסית ללימוד חוקרים אחדים (Bell and Janvier, 1981, Janvier, 1978, Lovell, 1971, Marnyanskii, 1975, Monk, 1988) מדווחים כי תלמידים רבים מסוגלים לטפל בפונקציות רק בטיפול נקודתי תלמידים אלה יכולים לשרטט ולקרוא נקודות, אבל אינם מסוגלים לחשוב על התנהגות הפונקציה בתחומים מסוימים או בצורה גלובלית אולם במקרים רבים, גישה נקודתית לשרטוט פונקציות מתאימה הרבה פחות מאשר שיטה המדגישה ניתוח גלובלי יותר של התנהגות פונקציות, לצורך שרטוט גרף לדוגמה, שרטוט פונקציה ריבועית שקודקודה הוא ב־(‎-100, 78), על־פי שרטוט מספר נקודות בקרבת (0,0) לא יצור גרף מתאים יתרה מזו, שרטוט פונקציה שלה נקודת אי־רציפות ב־x = 0 3 על־ידי שרטוט מספר נקודות ששיעוריהן מספרים שלמים וחיבורן בקו "חלק", יצרו גרף שגוי

המעניין הוא, שכל פרחי ההוראה שהשתתפו במחקר למדו חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי וקורסים מתקדמים אחרים במתמטיקה לכן, על כולם היה לדעת שניתוח תכונות מסוימות של הפונקציה הוא הדבר החשוב ביותר כדי לשרטט גרף פונקציה כמו כן, היה עליהם לדעת שנקודות מסוימות חשובות יותר מהאחרות, ולכן שרטוט גרפים נכונים לא יכול להיות מבוסס על בחירת מספרים שקל לחשב אותם במיוחד, חישוב קל אינו יכול להיות שיקול, כשמחשבונים ומחשבים הם שכיחים למדי גם ארגון מורי המתמטיקה בארצות הברית (The National Council of Teachers of Mathematics) ממליץ להימנע משרטוט גרפים על־פי טבלת ערכים (NCTM, 1989a) אולם, נראה כי לחלק מפרחי ההוראה הייתה נטייה חזקה להשתמש בשיטה זו כדי לשרטט גרפים כדי שמורים יהיו מסוגלים לעזור לתלמידיהם להיות גמישים בגישתם לפונקציות ולבחור בצורה נבונה בין הגישות השונות האפשריות, על המורים עצמם להכיר ולהבין גישות אלה

חשוב מאוד לדעת מה הן פונקציות, ולהיות מסוגלים לעבוד איתן בצורות, הצגות וסימונים שונים אולם, כפי שטוען פרוידנטל (1983), "כוחו של מושג הפונקציה נובע מהפעולות החדשות — הרכבה והפיכת פונקציות — אשר יצרו אפשרויות חדשות" (עמ׳ 523), ועל כך בסעיף הבא

עוצמתו של המושג — הפונקציה ההפוכה והרכבת פונקציות
פונקציות פתחו הזדמנויות חדשות, שהן לפי פרוידנטל (1983) הסיבה להצלחתן נוסף על הפעולות האלגבריות הטיפוסיות — חיבור, חיסור, חילוק והעלאה בחזקה — אפשר גם להרכיב ולהפוך פונקציות הרכבת פונקציות מאפשרת יצירת "עצמים חדשים שלא היו ידועים לפני כן — פונקציות פרועות ככל שאפשר להעלות על הדעת" (עמ׳ 523) היכולת להציב פונקציות זו בזו ולהפוך אותן איפשרה יצירת פונקציות חדשות, וקידמה את לימודי הדיפרנציאלים והאינטגרלים פרוידנטל מייחס לכך את ההתפתחות העצומה של האנליסה לכן, הבנת מושג הפונקציה חייבת לכלול הבנה של הרכבת פונקציות והפונקציה ההפוכה כמו כל מושג אחר, הפונקציה ההפוכה והרכבת פונקציות לא יכולות להיות מובנות בדרך פשטנית אחת הבנת תת־מושגים אלה של המושג פונקציה, מחייבת הבנה של המשמעות הכללית לצד הבנה של ההגדרה הפורמלית המתמטית הדוגמה הבאה, המציגה ראייה מוגבלת של הפונקציה ההפוכה כ"מחזירה למצב המקורי" (undoing), רק מחזקת נקודה זו

"החזרה למצב המקורי" היא משמעות חשובה של הפונקציה ההפוכה אשר מתמצתת את ההגדרה חשיבותה של המשמעות הלא־פורמלית הזו הוכרה גם על־ידי הארגון האמריקאי של המורים למתמטיקה (NCTM 1989a) אשר ממליץ שכל התלמידים ייפגשו עם מושג הפונקציה ההפוכה באופן בלתי פורמלי כתהליך של ביטול התוצאה של הפעלת פונקציה נתונה (החזרה למצב המקורי) בעוד שאת ההגדרה המדויקת של פונקציה הפוכה והרכבה של פונקציות צריכים ללמוד רק תלמידים ברמות הגבוהות

אבל תפיסה של הפונקציה ההפוכה רק כ"מחזירה למצב המקורי" אין די בה מונח זה מעורפל מדי ולא מדויק, כפי שאנו יכולים ללמוד מהדרך שבה ענו פרחי ההוראה כשנשאלו את השאלה הבאה

שאלה
תלמיד אמר כי יש שתי פונקציות הפוכות שונות לפונקציה $f(x) = 10^x$
אחת היא פונקציית השורש והשנייה היא פונקציית הלוגריתם
האם התלמיד צודק? נמק

רוב המשיבים התייחסו לפונקציה הפוכה כאל "מחזירה למצב המקורי" השורש ה־x־י של 10 נראה להם "מחזיר למצב המקורי" ביחס לפעולתה של 10^x כדי לקבל 10^x מתחילים ב־10 ומעלים אותו בחזקת x על־ידי הוצאת השורש ה־x־י של 10^x מקבלים את 10 בחזרה התפיסה של פונקציה הפוכה כ"החזרה למצב המקורי" הטעתה רבים מן המשתתפים בחפשם אחר הפונקציה ההפוכה ל־$f(x) = 10^x$ התחושה כי פונקציה הפוכה מחזירה אותנו להתחלה (10 בדוגמה שלנו, במקום x) הובילה רבים מהמשיבים להסיק באופן מוטעה כי השורש הוא הפונקציה ההפוכה ל־10^x רואים, כי הבנה מוצקה של מושג הפונקציה ההפוכה אינה יכולה להיות מוגבלת רק ל"החזרה למצב המקורי" מורים צריכים להבין את המושג בצורה בלתי פורמלית יחד עם ידע פורמלי יותר

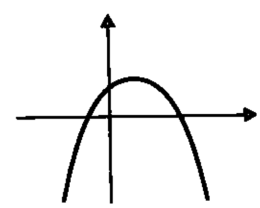
רפרטואר בסיסי — פונקציות מתכנית הלימודים בחטיבה העליונה

מה צריך לכלול רפרטואר בסיסי של מורי תיכון בנושא הפונקציות? תשובה חלקית לשאלה זו נמצאת כמעט בכל מדריך של תכנית לימודים (Academic Preparation in Mathematics 1985, Chambers et al. 1986, NCTM 1989a, Michigan Essential Goals And Objectives For Mathematics Education, 1988, Oregon Mathematics Concept Paper No. 2, 1987).

אלה הן הדוגמאות המוכרות שתלמידים פוגשים בתיכון: לדוגמה, פונקציות לינאריות, ריבועיות ופולינומים כלליים, פונקציות חזקה ולוגריתם, פונקציות טריגונומטריות ופונקציות רציונליות. יש לכלול גם דוגמאות לפונקציות ממתמטיקה דיסקרטית.

פונקציות אלה חשובות לא רק לצורך רפרטואר בסיסי בנושא הפונקציות. הן חשובות במיוחד למורי תיכון — האוכלוסיה שאנו דנים בה במאמר זה — משום שאלה אותן הפונקציות, שמורים אלה צריכים כרפרטואר בסיסי לתלמידיהם. כל ספר מתמטיקה ברמת תיכון עוסק בחלק הפונקציות שנמנו לעיל, או בכולן. לכן סביר להניח, שלכל מורה בתיכון צריכה להיות הבנה טובה של פונקציות ספציפיות אלה במיוחד. הדוגמה הבאה מאירה את החשיבות ברפרטואר בסיסי משמעותי.
שאלו את פרחי ההוראה את השאלה הבאה:

שאלה
לפניך גרף הפונקציה $f(x) = ax^2 + bx + c$. קבע אם c,b,a הם חיוביים, שליליים או 0. הסבר תשובתך.



איור 2.

כמעט כל המשתתפים זכרו כי גרף של פונקציה ריבועית נראה כך $\cap$ אם "a" (בביטוי) שלילי, אבל רבים מהם לא יכלו להסביר מדוע כלל זה נכון.

> בסדר, זה, אה, באופן כללי יש חוקים הקשורים למשוואה מהסוג הזה... אה, ברוב המקרים לומדים את זה על־ידי זכירת החוקים בעל־פה, וזה מה שאני עשיתי: זכרתי את החוקים, ואם המקדם של x^2 הוא שלילי, אז זה נפתח כלפי מטה, וכשזה חיובי זה נפתח כלפי מעלה. וזה כלפי מטה, ולכן זה חייב להיות שלילי.

הפונקציה הריבועית היא אחת הפונקציות המרכזיות בתכנית הלימודים. אם מבינים את הקשר בין "a" בביטוי הריבועי ובגרף, אפשר להכליל זאת לקשרים דומים בין המקדם הראשי בכל פולינום, וצורת הגרף שלו. לעומת זאת, זכירה בעל־פה של "החוק" אינה מספקת שום בסיס להכללה. לכן, הבנת הקשר בין תפקיד ה־"a" בהצגה האלגברית של המשוואה הריבועית לבין ההצגה הגרפית מעשירה את הלומד, אולם זכירה בעל־פה בלבד אינה מחזקת את הלומד.

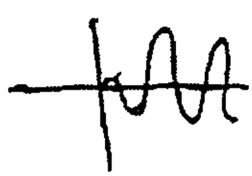
הבנת מושגים בנושאים מתמטיים הקשורים קשר הדוק למושג הפונקציה קשורה גם היא לרפרטואר הבסיסי, למרות שאינה מקבילה לו באופן מלא. אחד הנושאים האלה הוא הבנת המבנה של קבוצות מספרים שונות המשמשות כתחום וטווח לרוב הפונקציות הכלולות ברפרטואר הבסיסי: קבוצות המספרים הטבעיים, שלמים, רציונליים, אי־רציונליים, ממשיים ואפילו מספרים מרוכבים. היות שפונקציות טריגונומטריות צריכות להיכלל ברפרטואר הבסיסי, מורים זקוקים להבנה של רדיאנים. הדוגמה הבאה ממחישה הבנה לא שלמה של מבנה קבוצת מספרים הגורמת לקשיים בהבנה של פונקציות.

שאלה
פרחי ההוראה נתבקשו לשרטט את גרף הפונקציה הבאה:

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{אם x מספר רציונלי} \\ 0, & \text{אם x מספר אי־רציונלי} \end{cases}$$

חלקם ניגשו לבעיה בגישה נקודתית: הם התחילו מ־0 ואז ניסו לשרטט את הגרף נקודה אחר נקודה, כאילו קבוצת המספרים הממשיים ו/או קבוצת המספרים האי־רציונליים היא בת־מניה. לדוגמה, אחת המשתתפות במחקר שרטטה את הגרף המופיע באיור 3 ובהמשך הסבירה:

> 1 יהיה 1, π יהיה 0, e יהיה 0, 2 יהיה 2 (הפסקה) ובכן, זה יהיה "חלקי" בכל מקום חוץ מהמקומות בהם יש נקודות אי־רציונליות שם יהיו נקודות "חדות" שזה לא יהיה רציף. כל פעם שתהיה נקודה אי־רציונלית זה לא יהיה רציף. זה יתעקם כלפי מעלה עד שזה יגיע, כאילו, כשיש מספר אי־רציונלי בין 0 ל־1 זה ירד למטה אל המספר האי־רציונלי, ואז זה, יש לנו גם את המספרים השליליים. אולי זה ככה (מצביעה על הגרף — ראה איור 3) חוץ מזה שזה לא יהיה חלק בגלל שכל פעם שאתה מגיע לאפס, זה ירד ישר למטה ואז זה יצטרך ללכת למספר הרציונלי או האי־רציונלי הבא. אני מתארת את זה באופן כללי מאוד.



איור 3. סרטוט של g(x)

מועמדת זו חשבה על המספרים הממשיים כעל קבוצה בת־מניה ואפילו בדידה: כאילו מתחילים מאפס וממשיכים **למספר הבא**, כאילו עוברים דרך מספר מספרים, עד שפוגעים במספר אי־רציונלי. הייתה לה תפיסה מוטעית לגבי מבנה קבוצת המספרים הממשיים, אשר התאימה לגישה הנקודתית שבה השתמשה

לשרטוט הגרף. אבל התחום והטווח של פונקציות רבות מתכנית הלימודים בתיכון ובאוניברסיטה הם קבוצות מספרים ממשיים, ולכן תפיסה מוטעית של קבוצת המספרים הממשיים, המשמשים כתחום וטווח, מובילה להבנה מוטעית של מושג הפונקציה עצמו.

ידע והבנה של מושג הפונקציה

שתי הדוגמאות הבאות מדגימות את החשיבות שיש גם לידע הפרוצדורלי, גם לידע הקונספטואלי וגם לקשר ביניהם. הדוגמה הראשונה מחזירה אותנו לבעיה שבה דנו בסעיף "הצגות שונות של פונקציות", כשפרחי ההוראה נשאלו כמה פתרונות ממשיים יש למשוואה הריבועית $ax^2 + bx + c = 0$ אם בהצבת 1 במקום x בביטוי $ax^2 + bx + c$ (c, b, a מספרים ממשיים) מתקבל מספר חיובי, ובהצבת 6 מתקבל מספר שלילי. כפי שכבר ראינו, המחסור בקשרים מגוונים בין ההצגות השונות לאותה פונקציה (ידע קונספטואלי) מנע מהנשאלים לפתור את הבעיה. לא זו בלבד, אלא שידע קונספטואלי לוקה בחסר התבטא בשימוש לא נכון בידע פרוצדורלי בפתרון מערכת של שתי משוואות $a + b + c = 0$ ו-$36a + 6b + c = 0$. פרחי ההוראה קיבלו תשובות בלתי הגיוניות, כמו ∞ ואפילו 3, 4, 5, כמספר הפתרונות של המשוואה הריבועית, למרות שסביר להניח כי "ידעו" שלמשוואה ריבועית יש לכל היותר שני פתרונות. חסרו לפרחי ההוראה קשרים ההופכים ידע קונספטואלי לידע נגיש.

בניגוד לכך, בדוגמה אחרת שהוצגה בפרק "עוצמתו של המושג – הפונקציה ההפוכה והרכבת פונקציות", משתתפי המחקר נתבקשו להחליט אם תלמיד צדק כאשר טען שגם פונקציית השורש וגם פונקציית הלוגריתם הן פונקציות הפוכות לפונקציה $f(x) = 10^x$. ניתוח התגובות מלמד, כי שימוש נכון בידע פרוצדורלי יכול לעזור במקרים שבהם הידע הקונספטואלי נאיבי ולא בשל.

התיאור השכיח ביותר של פונקציית השורש על-ידי המשתתפים היה השורש ה-x-י של 10 או סתם השורש ה-x-י (בלי לציין "של מה"). חלק מהאנשים השתמשו בידע הפרוצדורלי שלהם בנושא פונקציות הפוכות, ויישמו נכונה את השיטה לבדיקה אם פונקציה היא פונקציה הפוכה. הם עשו זאת על-ידי הרכבת שתי הפונקציות ובדיקה אם כתוצאה מכך מתקבלת פונקציית הזהות $f(x) = x$. לדוגמה:

נכון $\log 10^x = x \log 10 = x$ $\quad f^{-1}(x) = \log x$

לא נכון $(10^x)^{\frac{1}{x}} = 10$ $\quad f^{-1}(x) = \sqrt[x]{x}$

(שימו לב, שלאמיתו של דבר לא בדק המועמד את הפונקציה $f^{-1}(x) = \sqrt[x]{x}$)

אך רוב האנשים לא השתמשו בידע הפרוצדורלי שלהם לגבי פונקציות הפוכות. במקום זאת, הם השתמשו בידע הקונספטואלי הנאיבי שלהם לגבי מה זה פונקציות הפוכות. אנשים אלה השתמשו ברעיון ה"החזרה למצב המקורי" כפירוש שלהם לפונקציה הפוכה, והסיקו באופן מוטעה כי השורש הוא פונקציה הפוכה לפונקציה $f(x) = 10^x$. לכן, ידע פרוצדורלי נכון יכול לעיתים לשמש כבקרה לידע קונספטואלי נאיבי.

ידע על המתמטיקה

ידע על אופי המתמטיקה משפיע על הידע של פונקציות. שימוש מוטעה בכלים מתמטיים עלול להוביל לידע שגוי של פונקציות. לדוגמה, שיקולים אינדוקטיביים ודדוקטיביים הם בסיס למתמטיקה. חשיבותם הוכרה גם על-ידי הארגון האמריקאי של מורי מתמטיקה (NCTM 1989a) שהמליץ כי תכנית הלימודים במתמטיקה לכיתות ט-יב תכלול עקרונות של שיקולים אינדוקטיביים ודדוקטיביים. תלמידים צריכים להתנסות בהעלאת השערה על-ידי הכללה של חוקיות או של תצפיות במקרים מסוימים (שיקולים אינדוקטיביים), ואחר-כך בחינת ההשערה על-ידי בניית הוכחה לוגית או מציאת דוגמה נגדית (שיקולים דדוקטיביים).

חקירת סיטואציה על-ידי בדיקת מקרים ספציפיים היא אסטרטגיה רבת עוצמה במתמטיקה. גילויים רבים נעשו על-ידי שימוש בשיקולים אינדוקטיביים. הסתכלות על מקרים ספציפיים עוזרת לא רק בגיבוש וניסוח הכללה, אלא גם בהבנת הסיטואציה. אולם שיקול אינדוקטיבי אינו מספיק כהסבר לקיומו של כלל. במילים אחרות, בדיקת דוגמאות היא לא הוכחה. הדוגמה הבאה ממחישה נקודה זו. לפרחי ההוראה הוצג גרף של פונקציה ריבועית והם נתבקשו להחליט מהם סימני "a", "b" ו-"c" בהצגה האלגברית המתאימה, $f(x) = ax^2 + bx + c$. רבים ממשתתפי המחקר השתמשו בשיטה של הכללת חוקים, המבוססת על בדיקת מספר קטן מאוד של פונקציות ריבועיות פשוטות. הם "מצאו" למשל ש-"b" חיובי אם ורק אם ציר הסימטריה עובר דרך x חיובי.

הסקת מסקנות המבוססת רק על בדיקת דוגמאות מסוימות, בלי לוודא שכל האפשרויות מוצו, או שימוש בשיקול דדוקטיבי, כפי שראינו בדוגמה לעיל, מצביעה על אי הבנת הרעיון של הסבר, וחוסר ידיעה בכל הקשור לדרכים הנחשבות מתאימות למעבר מהשערה לטענה. במלים אחרות, הם מתקשים להבין מה מקובל כהוכחה. לכן, ידע על אופי המתמטיקה הוא חלק אינטגרלי וחשוב בידע על פונקציות.

סיכום

איך מורים בונים את הידע המתמטי שלהם? חלק נכבד מכך נעשה במהלך לימודיהם בתיכון ובאוניברסיטה או במכללה. אולם, כפי שאפשר ללמוד מהדוגמאות במאמר זה, הידע של פרחי הוראה לתיכון בנושא פונקציות לוקה בחסר. איננו יכולים להניח שיש להם ידע מקיף ומאורגן היטב במתמטיקה שעליהם

ללמד למסקנה זהה הגיעה בול (Ball 1988, 1990) ביחס למורים למתמטיקה בבית ספר יסודי ותיכון לכן, יש להשקיע מאמצים בשיפור הקורסים במתמטיקה באופן כללי, וכמו כן יש ללמד פרחי הוראה את המתמטיקה שעליהם ללמד קורסי המתמטיקה צריכים להיבנות אחרת, כך שתתפתח הבנה טובה יותר עם זאת, נוסף על הקורסים הרגילים במתמטיקה צריכים המורים להשתתף בקורסים מיוחדים, קורסים שיתמקדו בלימוד מתמטיקה **למורים** קורסים אלה צריכים להיבנות לאור שבעת האספקטים של המסגרת שתוארה במאמר זה, ועליהם להעמיק ולארגן את הידע שהמורים צריכים כדי ללמד

בקורסים אלה המורים צריכים לפגוש את התכנים שהם אמורים ללמד בדרכים שונות מהדרכים שבהם השתמשו בעבר דוגמאות לכך אפשר למצוא אצל Lappan and Even 1989, Tirosh, Nachmias and Arcavi 1990 הראשונים מתארים התנסויות מתמטיות לפרחי הוראה לבתי ספר יסודיים, שבהם הם חוקרים, לדוגמה, את מושג המרחק בגיאומטריה לא מוכרת תירוש, נחמיאס והרכבי מתארים נקודת מבט חדשה על פונקציות ליניאריות, המיועדת למורים בתיכון, וזאת על־ידי חקירה של הצגה גרפית לא מוכרת פגישת מושג "מוכר" בסיטואציה לא מוכרת מכריחה את המורים לבדוק מחדש את הידע שלהם, להתגבר על קשיים ולבנות מושגים ותפיסות טובים יותר ועמוקים יותר

רשימת ספרות

Academic Preparation in Mathematics [1985] *Teaching for Transition from High School to College* College Entrance Examination Board, New York

Ball, D L [1988] *Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy Examining what prospective teachers bring to teacher education* Unpublished doctoral dissertation, Michigan State University, East Lansing, MI

Ball, D L [1990] *Examining the Subject Matter Knowledge of Prospective Mathematics Teacher's Journal for Research in Mathematics Education* 21(2) 132-143

Ball, D L [In press] Research on Teaching Mathematics Making Subject Matter Knowledge Part of the Equation In J Brophy (ed), *Advances in Research on Teaching* (Vol 2), JAI Press, Greenwich, CT

Bell, A W , J Costello, and D Kuchemann [1983] *A Review of Research in Mathematics Education, Part A* NFER-NELSON, Windsor, Canada

Bell, A and C Janvier [1981] The Interpretation of Graphs Representing Situations *For the Learning of Mathematics* 2(1) 34-42

Carnegie Task Force on Teaching as a Profession [1986] *A Nation Prepared Teachers for the 21st Century* Carnegie Forum on Education and the Economy, Washington, DC

Chambers, D L , J Benson, A Chandler and E Bethke [1986] *A Guide to Curriculum Planning in Mathematics* Wisconsin Department of Public Instruction, Madison, WI

Coxford, A F and J N Payne [1987] *HBJ Algebra 1 Revised Edition* Harcourt Brace Jovanovich, Inc , Orlando, Florida

Davis, R B [1986] Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics A Summary Analysis In J Hiebert (ed), *Conceptual and Procedural Knowledge The Case of Mathematics*, pp 265 300 Lawrence Erlbaum Associates, Inc , New Jersey

Dewey, J [1904] The Relation of Theory to Practice in Education In M L Borrowman (ed), [1971] *Teacher Education in America A Documentary History*, pp 140-171 Teachers' College Press, New York

Dolciani, M P , R H Sorgenfrey, R G Brown and R B Kane [1986] *Algebra and Trigonometry, Structure and Method Book 2* Houghton Mifflin Company, USA

Dreyfus, T and T Eisenberg [1983] The Function Concept in College Students Linearity, Smoothness and Periodicity *Focus on Learning Problems in Mathematics* 5(3&4) 119-132

Dreyfus, T and T Eisenberg [1987] On the Deep Structure of Functions In J C Bergeron and C Kieren (eds), *Proceedings of the 11th International Conference of PME*, Vol I, pp 190-196 Montreal, Canada

Dufour Janvier, B , N Bednarz and M Belanger [1987] Pedagogical Considerations Concerning the Problem of Representation In C Janvier (ed), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, pp 109-122 Lawrence Erlbaum Associates, Inc , New Jersey

Educational Technology Center [1988] *Making Sense of the Future* Harvard Graduate School of Education, MA

Eisenberg, T and T Dreyfus [1986] On Visual versus Analytical Thinking in Mathematics *Proceedings of PME 10* London, England

Even, R [1989] *Prospective secondary teachers' knowledge and understanding about mathematical functions* Unpublished doctoral dissertation, Michigan State University, East Lansing, MI

Freudenthal, H [1983] *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures* D Reidel Publishing Company, Dordrecht

Greeno, J G [1978] Understanding and Procedural Knowledge in Mathematics Instruction *Educational Psychologist* 12(3) 262-283

Hershkowitz, R [1990] Psychological Aspects of Learning Geometry In P Nesher and J Kilpatrick (eds), *Mathematics and Cognition* Cambridge University Press, Cambridge, England

Hiebert, J and P Lefevre [1986] Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics An Introductory Analysis In J Hiebert (ed), *Conceptual and Procedural Knowledge The Case of Mathematics*, pp 1-27 Lawrence Erlbaum Associates, Inc , New Jersey

Holmes Group [1986] *Tommorrow's Teacher* Michigan State University, College of Education, East Lansing, MI

Janvier, C [1978] *The interpretation of complex Cartesian graphs representing situations — Studies and teaching experiments* Doctoral dissertation, University of Nottingham, Shell Centre for Mathematical Education and Université du Quebec à Montreal

Keedy, M L , M L Bittinger, S A Smith and L J Orfan [1986] *Algebra* Addison-Wesley Publishing Company, Inc , USA

Lampert, M [1988] The Teacher's Role in Reinventing the Meaning of Mathematical Knowing in the Classroom In M J Behr, C B Lacampagne and M M Wheeler (eds), *Proceedings of the 10th Annual Meeting of PME-NA*, pp 433 480 DeKalb, Ill

Lappan, G and R Even [1989] *Learning to Teach Constructing Meaningful Understanding of Mathematical Content* (Craft Paper 89 3) Michigan State University, National Center for Research of Teacher Education, East Lansing, MI

Lappan, G and P Schram [1989] Communication and Reasoning Critical Dimensions of Sense Making in Mathematics In P R Trafton and A P Shulte (eds), *New Directions for Elementary School Mathematics — 1989 Yearbook*, NCTM, pp 14 30 Reston, Virginia

Leinhardt, G and D A Smith [1985] Expertise in Mathematics Instruction Subject Matter Knowledge *Journal of Educational Psychology* 77 247-271

Resnick, L B and W W Ford [1984] *The Psychology of Mathematics for Instruction* Lawrence Erlbaum Associates Ltd, London
Romberg, T A [1983] A Common Curriculum for Mathematics In G D Fenstermacher, J I Goodlad, and K J Rehage (eds), *Individual Differences and the Common Curriculum — 82nd Yearbook of the NSSE*, pp 121-159 The University of Chicago Press, Chicago, Illinois
Schoenfeld, A H [1987] *On mathematics as sence-making An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics* Paper presented at the OERI/LRDC Conference on Informal Reasoning and Education, Pittsburgh, PA
Schoenfeld, A H [1988] When Good Teaching Leads to Bad Results The Disasters of "Well-Taught" Mathematics Classes *Educational Psychologist* 23(2) 145-166
Shulman, L S [1986] Those Who Understand Knowledge Growth in Teaching *Educational Researcher* 15(2) 4-14
Silver, E A [1986] Using Conceptual and Procedural Knowledge A Focus on Relationships In J Hiebert (ed), *Conceptual and Procedural Knowledge The Case of Mathematics*, pp 181-198 Lawrence Erlbaum Associates, Inc, New Jersey
Tamir, P [1987] *Subject matter and related pedagogical knowledge in teacher education* Paper presented at the annual meeting of the American Association for Educational Research, Washington, DC
Thomas, H L [1975] The Concept of Function In M E Rosskopf (ed), *Children's Mathematical Concepts Six Piagetian Studies in Mathematics Education*, pp 145 172 Teachers College Press, New York
Thompson, A G [1984] The Relationship of Teachers' Conceptions of Mathematics and Mathematics Teaching to Instructional Practice *Educational Studies in Mathematics* 15 105-127
Tirosh, D, R Machmias and A Arcavi [1990] *The effects of exploring a new representation on prospective teachers' conception of functions* Unpublished manuscript
Vinner, S [1983] Concept Definition, Concept Image and the Notion of Function *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 14 239-305
Vinner, S and T Dreyfus [1989] Images and Definitions for the Concept of Function *Journal for Research in Mathematics Education* 20 356-366
Wilder, R L [1972] The Nature of Modern Mathematics In W E Lamon (ed), *Learning & the Nature of Mathematics*, pp 35-48 Science Research Associates, Inc, USA
Wilson, S M, L S Shulman and R Richert [1987] "150 Ways of Knowing" Representations of Knowledge in Teaching In J Calderhead (ed), *Exploring Teacher Thinking*, pp 104-124 Holt, Rinehart, and Winston, Sussex
Lesh, R, T Post and M Behr [1987] Representations and Translations among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving In C Janvier (ed), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, pp 33-40 Lawrence Erlbaum Associates, Inc, New Jersey
Lovell, K [1971] Some Aspects of the Growth of the Concept of a Function In M F Rosskopf, L P Steffe and S Taback (eds), *Piagetian Cognitive Development Research and Mathematical Education*, pp 12-33 NCTM, Washington, D C
MacLane, S [1986] *Mathematics Form and Function* Springer-Verlag New York Inc, USA
Malik, M A [1980] Historical and Pedagogical Aspects of the Definition of Function *International Journal of Mathematics Education in Science & Technology* 11
Markovits, Z, B Eylon and M Bruckheimer [1983] Functions Linearity Unconstrained In R Hershkowitz (ed), *Proceedings of the 7th International Conference of PME*, pp 271-277 Weizmann Institute of Science, Israel
Markovits, Z, B Eylon and M Bruckheimer [1986] Functions Today and Yesterday *For the Learning of Mathematics* 6(2) 18 24, 28
Marnyanskii, I A [1975] Psychological Characteristics of Pupils' Assimilation of the Concept of a Function In J Kilpatrick, I Wirszup, E Begle and J Wilson (eds), *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics XIII*, pp 163-172 SMSG, University of Chicago Press, USA (Original work published 1965)
Michigan Essential Goals And Objectives For Mathematics Education [1988] Michigan State Board of Education
Monk, G S [1988] Students' Understanding of Functions in Calculus Courses *Humanistic Mathematics Network Newsletter* 2
NCTM [1989a] *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* NCTM, Virginia, USA
NCTM [1989b] *Professional Standards for Teaching Mathematics (working draft)* NCTM, Virginia, USA
Nesher, P [1986] Are Mathematical Understanding and Algorithmic Performance Related? *For the Learning of Mathematics* 6(3) 2-9
Nichols, E D, M L Edwards, E H Garland, S A Hoffman, A Mamary and W F Palmer [1986] *Holt Algebra 2 with Trigonometry* Holt, Rinehart and Winston, Publishers, USA
Oregon Mathematics Concept Paper No 2 [1987] *Middle School Mathematics*, 6-8
Peterson, P L [1988] Teaching for Higher Order Thinking in Mathematics The Challenge for the Next Decade In D A Grouws, T J Cooney and D Jones (eds), *Effective Mathematics Teaching*, pp 2-26 NCTM, Reston, Virginia
Resnick, L B [1987] *Education and Learning to Think* National Academy Press, Washington, D C