שיטות חדשות, תכנים חדשים

זוגי – אי־זוגי

זאהר עאמר
חטיבת הביניים, כפר קאסם

ברשימה זאת מתוארת פעילות שתחילתה במשחק פשוט לשניים והמשכה בפיתוח מתמטי עשיר ומפתיע

המשחק

כל אחד משני השחקנים בוחר מספר שלם בין 1000 ל־2000
כל אחד פועל על המספר שלו באופן הבא
– אם המספר זוגי, מחלקים אותו ב־2
– אם המספר הוא אי־זוגי, מחסרים ממנו 1
פועלים לפי הכללים האלה גם על התוצאות, ומנצח מי שמגיע ראשון לאפס [1]

דוגמה למהלך המשחק

נניח כי שחקן א בחר ב־1240 ושחקן ב בחר ב־1121

שחקן א	שחקן ב	
1240	1121	שלב 1
620	1120	שלב 2
310	560	שלב 3
155	280	שלב 4
154	140	שלב 5
77	70	שלב 6
76	35	שלב 7
38	34	שלב 8
19	17	שלב 9
18	16	שלב 10
9	8	שלב 11
8	4	שלב 12
4	2	שלב 13
2	1	שלב 14
1	0	

המנצח הוא שחקן ב׳
ונגיד כי הוא "הגיע לאפס" ב 14
צעדים (או שלבים)

המנצח הוא שחקן ב, הוא הגיע לאפס ב־14 צעדים (שלבים)

מומלץ להציג את המשחק לתלמידים ולתת להם לשחק מספר פעמים

מנסיוננו, תוך כדי משחק התלמידים מעלים השערות, למשל
– "מהמספר הקטן מבין השניים מגיעים לאפס מהר יותר", לכן בוחרים ב־1001 וב־1002 (מי שבחר ב־1002 טען כי המספרים הזוגיים מגיעים מהר יותר לאפס) אבל כאשר משחקים יש הפתעה מקבלים תיקו שסותר את שתי ההשערות (בעצם אפשר להבחין בתיקו כבר בשלב השלישי במשחק)

תלמידים מתחילים להתרכז באסטרטגיות לבחירת המספר ה"מוצלח" ביותר, כלומר, המספר שממנו מגיעים לאפס מהר יותר

בכיתות ראינו כיצד תלמידים מתמודדים עם שאלה זו קודם מגלים כי חילוק חוזר ב־2 מקרב אותם מהר יותר לאפס ולכן, לא מספיק רק להתחיל ממספר זוגי, אלא חייבים לקבל תוצאות זוגיות לאורך כל הדרך בעזרת המחשבון ועל־ידי ניסוי וטעיה, תלמידים בונים את המספר על־ידי אימוץ אסטרטגיה "הפוכה" שתהיה יעילה מאוד בהמשך הם בונים את המספר מ־1 על־ידי הכפלות חוזרות ב־2, ומהר מאוד הם מגלים כי 1024 (2^{10}) הוא המספר הקטן ביותר בעל מספר הצעדים המינימלי

במקרה זה מספר הצעדים הוא 11 (כי לבסוף יש להפחית 1 כדי להגיע לאפס) בעקבות התיקו שדובר עליו לעיל, עולה לפעמים השאלה "אולי יש מספר אחר בעל אותו מספר צעדים?" אנחנו נטפל בשאלה זאת בהמשך כעת, כאשר יודעים שבחירת 1024 מבטיחה ניצחון, אין טעם למשחק

לכן מכניסים שינוי קטן בכללי המשחק

המשחק – גרסה ב

שני שחקנים בוחרים כל אחד מספר שלם בין 1000 ל־2000 כל אחד פועל עם המספר שלו באופן הבא
– אם המספר זוגי, מחלקים אותו ב־2
– אם המספר אי־זוגי, מחסרים ממנו 1
במהלך הבא מיישמים כללים אלה על התוצאות של המהלך הקודם, וכן הלאה
הפעם, מנצח מי שמגיע **אחרון** לאפס

לאור מה שהתלמידים כבר ראו, הם לא תמיד מתחילים במשחק, אלא מנסים למצוא מספר שממנו מגיעים לאפס במספר מקסימלי של צעדים

הנה אחד הפתרונות שהוצעו על־ידי תלמידים ככל שיהיו יותר שלבים שבהם יש לחסר 1, נגדיל את מספר הצעדים ולכן עושים שימוש חדש באסטרטגיה שראו קודם מתחילים ב־0, מוסיפים 1, כופלים ב־2, מוסיפים 1, כופלים ב־2 וכן הלאה על־ידי כך קיבלו 1023 בעזרת 19 צעדים

התלמידים התפלאו ש־1023 הוא ״שכן״ של 1024, שהוא בעל מספר הצעדים המינימלי כלומר, המקסימלי והמינימלי נמצאים זה לצד זה! אנחנו נחזור למסקנה זו בהמשך ונדון בה מחדש

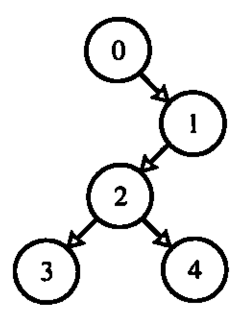
קודם, עלינו להבין יותר לעומק את התופעות שראינו לשם כך, נסיר את המגבלה של התחום 2000-1000 ונציע שאלות נוספות להמשך חקירה ודיון

1 מצא מספר שמגיע לאפס באותו מספר צעדים כמו 20
2 מצא את המספר הקטן ביותר שמגיע לאפס באותו מספר צעדים כמו 20
3 אם a מגיע לאפס במספר מסוים של צעדים, מצא מספר אחר שמגיע לאפס באותו מספר צעדים
4 כמה מספרים מגיעים לאפס ב־5 צעדים? ב־8 צעדים? ב־n צעדים?

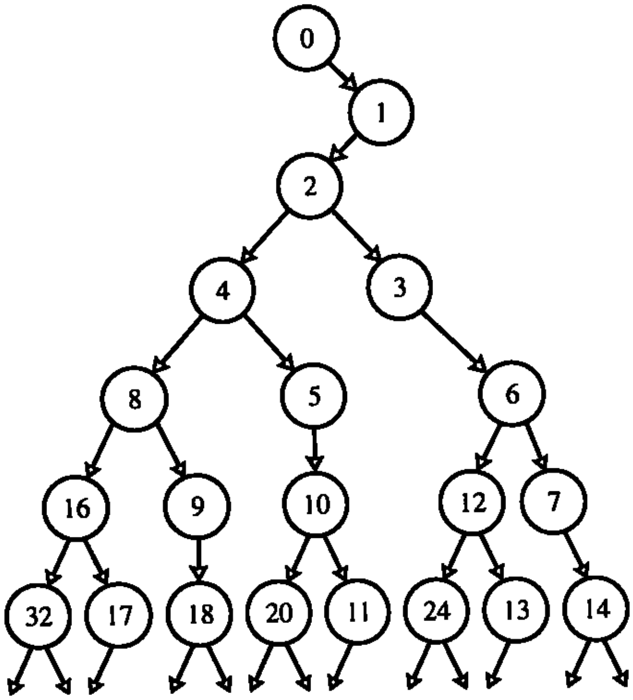
תלמידים ניגשים לשאלות אלה בדרכים שונות, שבדרך כלל מבוססות על ניסוי וטעייה למשל, תלמיד אחד הציע ״בנייה הפוכה״ מהסוג הבא

״כדי להגיע לאפס, יש לעבור דרך ה־1, כדי להגיע ל־1 חייבים לעבור דרך 2 ל־2 אפשר להגיע מה־3 (על־ידי חיסור) או מה־4 (על־ידי חילוק)״ ועל־ידי כך אימצו כשיטה את האסטרטגיה ההפוכה שגילו קודם

כמו בהרבה בעיות במתמטיקה, גם במקרה זה מציאת ייצוג מתאים יכול להיות חלק נכבד מהפתרון על סמך הצעת התלמיד אפשר לבנות ייצוג כזה



כדי להמשיך ולחוש כיצד ״עץ״ זה נוצר, בונים ביחד את התשובה לשאלה 1



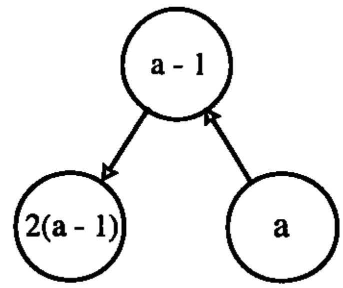
בעזרת ייצוג זה התשובות לשאלות 1 ו־2 מיידיות ולפני שעוברים לשאלות 3 ו־4, חשוב להתעכב עם התלמידים על המשמעות של הייצוג הזה וללמוד לקרוא ממנו למשל, מה משותף לכל המספרים באותה שורה? כיצד נוצרות שורות נוספות? כיצד מראה הייצוג את התיפקודים השונים של מספרים זוגיים ואי־זוגיים? וכדומה

תוך שימוש בייצוג ״העץ״ נגדיר ״יחסי משפחה״ באופן הבא לכל מספר $a > 0$ בשורה n קיים ״בן״ אחד (או שניים) בשורה $n + 1$ ויש לו ״אב״ בשורה $n - 1$ שני מספרים בעלי אותו אב נקראים ״אחים״ וכמובן אפשר להגדיר בני דודים, נכדים וכו׳

למשל 7, הוא בן של 6, אח של 12 ואב של 14 אם נתבונן ב״עץ״ נגלה כי יש קשר בין מספר הבנים (1 או 2) לזוגיות או אי־זוגיות של האב

כעת נחזור לשאלה 3 וננסה למצוא מספר שממנו מגיעים לאפס באותו מספר צעדים כמו ממספר a כלשהו הדרך הקלה למצוא תשובה לכך היא לחפש אחים
נבחין בין שני מקרים a אי־זוגי ו־a זוגי

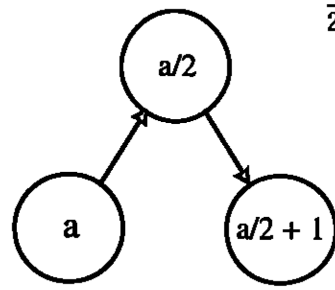
I אם a אי־זוגי, אביו הוא $a - 1$ (לפי כללי המשחק) ואז הבן הנוסף הוא $2(a - 1)$



a אי־זוגי

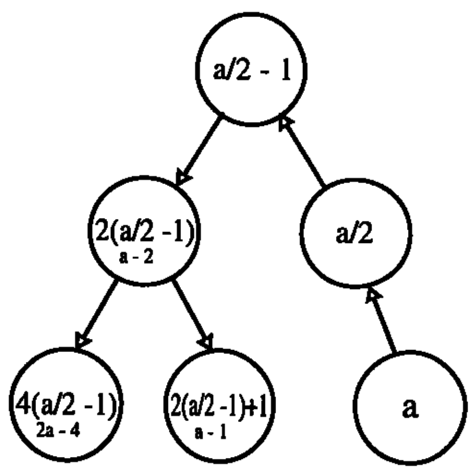
II אם a זוגי, אז אביו הוא $\frac{a}{2}$ בניגוד למקרה הקודם (a אי־זוגי קובע את זוגיות אביו a - 1) כאן $\frac{a}{2}$ יכול להיות זוגי או אי־זוגי

- אם $\frac{a}{2}$ הוא זוגי (כלומר אם a מתחלק ב־4) אז יש לו בן נוסף והוא $\frac{a}{2} + 1$



a זוגי ואביו זוגי

- אם a הוא זוגי, ואביו $\frac{a}{2}$ הוא אי־זוגי אז אין אחים ל־a, וצריכים ללכת לסבא ולחפש בני דודים, כפי שמצוין בדיאגרמה



a זוגי ואביו אי־זוגי

כמובן שכל הניתוח הזה אפשר לעשותו בעזרת דוגמאות ורק אז להכליל

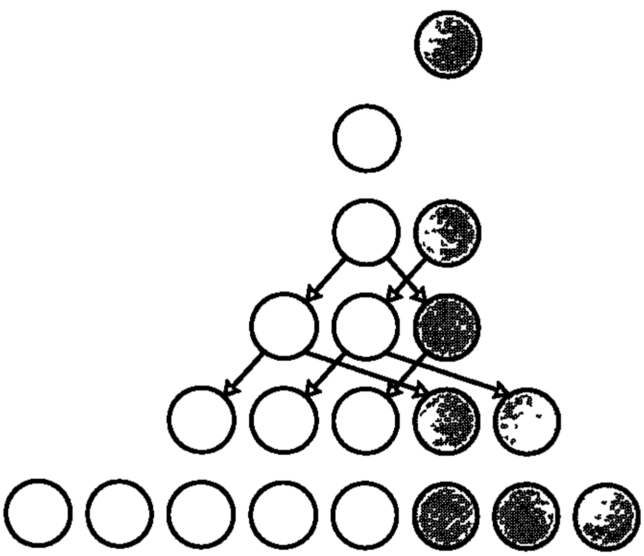
ניגש כעת לשאלה 4, וכן ננסה למצוא חוקיות מתוך הסתכלות בעץ יש רק מספר אחד שממנו מגיעים לאפס בצעד אחד, יש מספר אחד שממנו מגיעים לאפס בשני צעדים, יש שני מספרים שמהם מגיעים לאפס בשלושה צעדים אם מסכמים זאת בטבלה מקבלים

מסי הצעדים	המספרים	מסי המספרים
1 2	1 2	1 1
3	4 ,3	2
4	8 ,5 ,6	3
5	16 ,9 ,10 ,12 ,7	5
6		

בשלב זה מבקשים מהתלמידים להשלים את הטבלה בעזרתנו או בלעדיה מגלים את החוקיות של סדרת פיבונצ'י Fibonacci [2]

בדיאגרמה הבאה רואים כיצד נוצרת חוקיות זאת

⊛ מייצג מספר אי־זוגי ו־○ מספר זוגי



החץ מראה את "יחס ההורות" כל המספרים הזוגיים מסודרים בצד אחד והאי־זוגיים בצד אחר

אפשר להראות את היווצרות הסדרה גם בעזרת סמלים
נתבונן בשלבים i, $i + 1$ ו־$i + 2$ (כלומר המספרים שזקוקים ל־i, $i + 1$ ו־$i + 2$ צעדים כדי להגיע לאפס)
נראה כי מספר המספרים בשלב $i + 2$, אשר נסמן ב־A_{i+2}, הוא

$$A_{i+2} = A_{i+1} + A_i$$

נניח כי בשלב i יש m מספרים זוגיים ו־n אי־זוגיים, לכן בשלב $i + 1$ יהיו $m + n$ זוגיים ו־m אי־זוגיים בשלב $i + 2$ יהיו $m + n + m$ זוגיים ו־$m + n$ אי־זוגיים

לסיכום, בשלב i יהיו $m + n$
בשלב $i + 1$ יהיו $2m + n$
בשלב $i + 2$ יהיו $3m + 2n$
וזה מראה כי נוצרת סדרת פיבונצ'י

נחזור לשאלה ששאלנו בהתחלה מהר מאוד גילו התלמידים כי 1024 הוא המספר שממנו אפשר להגיע לאפס במספר צעדים מינימלי — 11 צעדים אך נשאלה השאלה אם אין מספר אחר בין 1000 ל־2000 שגם ממנו אפשר להגיע לאפס ב־11 צעדים בלבד

לפי מה שראינו, מספר המספרים שמהם מגיעים לאפס ב־11 צעדים שווה לאיבר ה־11 בסדרת פיבונצ'י לכן, יש 89 מספרים כאלה' השאלה הבאה היא מי הם המספרים האלה ברור שנוכל למצוא אותם על־ידי בניית העץ, אך העבודה ארוכה, מייגעת ולא מעניינת לכן עלינו למצוא דרך כללית יותר

אם נתבונן בעץ נגלה כי בכל שורה המספר הגדול ביותר הוא חזקה של 2 חזקות של 2 מזכירות את הבסיס הבינארי בנוסף אם נתבונן בכללי המשחק נראה, כי נוח מאוד לתרגמם לשפה הבינארית

למשל, נסתכל על המספר 101011 (בכתיב בינארי) לפי כללי המשחק צעד לכיוון האפס מתבטא כעת באחת משתי הדרכים האלה

א אם הוא מסתיים באחד, יש להחליפו ב־0 (חיסור ב־1)
כלומר 101010 ← 101011

ב אם הוא מסתיים ב־0 אז פשוט משמיטים את האפס (חילוק ב־2 בשיטה הבינארית) כך
10101 ← 101010

בדרך זו יש אפשרות לדעת כמה צעדים יעבור מספר כלשהו בשיטה הבינארית רק לפי מראה המספר

למשל, "נחזיר" את 101011 לאפס, לפי כללי המשחק

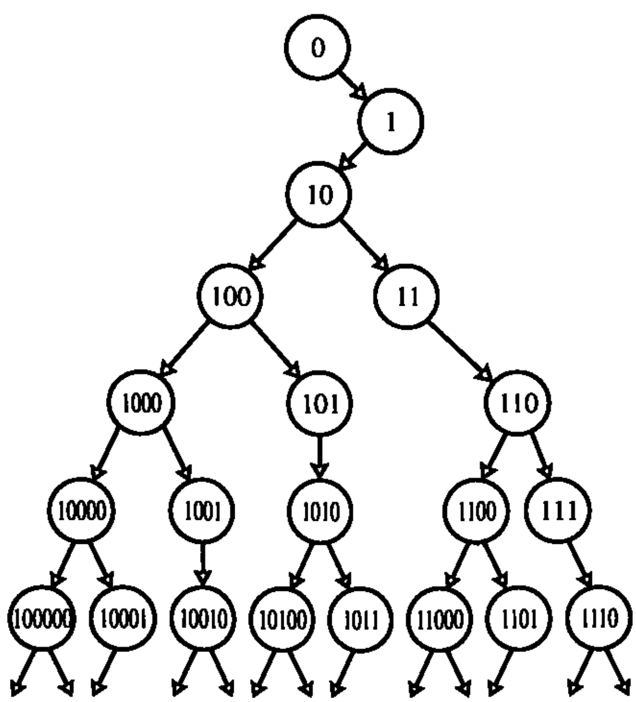
101011
101010
10101
10100
1010
101
100
10
1
0

כיצד המספר מתקצר לכיוון האפסי
אם הוא נגמר ב־1 הוא יתקצר (בספרה אחת) רק אחרי שני צעדים, אם הוא נגמר ב־0 הוא יתקצר אחרי צעד אחד לכן אפשר לספור את מספר הצעדים לאפס על־ידי הנוסחה

$$2A + B - 1 = n$$

כאשר A הוא מספר האחדים ($A \geq 1$) ו־B הוא מספר האפסים, ($B \geq 0$) ו־n הוא מספר צעדים (את התשובה לשאלה למה מפחיתים 1 אפשר לראות מהדוגמה למעלה) בשלב זה ברורים היתרונות של הייצוג הזה, אך ייתכן מאוד שתלמידים לא יציעו אותו ולכן יש לעזור להם בכך

כעת מתבוננים בעץ כשהוא מוצג בכתיב הבינארי, ורואים שהמספרים באותה השורה אכן מקיימים את הנוסחה



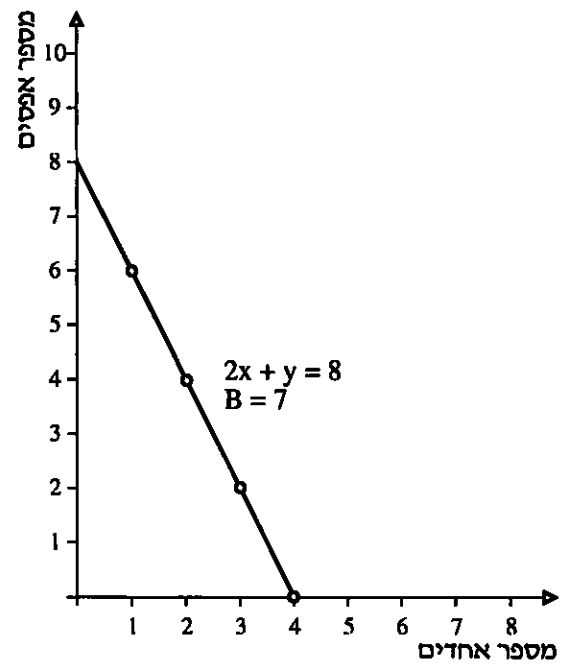
למשל, אם נרצה למצוא את כל המספרים שמגיעים לאפס ב־7 צעדים, נצטרך למצוא את כל הפתרונות השלמים של

$$2A + B - 1 = 7$$

או

$$2A + B = 8$$

למשל, אפשר לפתור זאת בעזרת טבלה או בעזרת גרף, על־ידי מציאת נקודות השריג ברביע הראשון, הנמצאות על $2A + B = 8$



הנקודות הן (1,6), (2,4), (3,2), (4,0) כלומר בשבעה צעדים יהיו כל המספרים אשר בצורה בינארית יהיו מורכבים

מ־1 אחד ושישה אפסים

1,000,000

מ־2 אחדים וארבעה אפסים

100001, 100010, 100100, 101000, 110000

מ־3 אחדים ושני אפסים

10101, 10011, 10110, 11001, 11010, 11100

מ־4 אחדים ואפס אפסים

1 1 1 1

אם נעבור לשיטה עשרונית נקבל

(1,6)	1000000	64
	100001	33
	100010	34
(2,4)	100100	36
	101000	40
	110000	48
	10011	19
	11100	28
(3,2)	11010	26
	11001	25
	10101	21
	10110	22
(4,0)	111	15

ואלה כל המספרים שמהם מגיעים לאפס ב־7 צעדים

כעת כדאי לחזור להשערה ש־1023 הוא המספר האיטי ביותר מבין אלה הנמצאים בין 1000 ל־2000 ראינו שהוא מגיע לאפס ב־19 צעדים אנחנו יכולים לבדוק אם אין מספר אחר שמגיע ב־19 צעדים כיוון שיש לנו כעת שיטה, נוכל לגלות שגם 1279 מגיע ל־0 ב־19 צעדים האם אין מספר (בין 1000 ל־2000) שהוא איטי יותר, כלומר מגיע לאפס ביותר מ־19 צעדים׳ כן, למשל 1535 מגיע לאפס ב־20 צעדים ויש עוד שלושה כאלה האם יש מספרים בין 1000 ל־2000 שמגיעים לאפס ב־21 צעדים׳

סוף דבר

פעילות זאת התפתחה בעקבות הבעיה המפורסמת המוכרת בשם ״השערת ה־1 + 3x״ (ראה למשל Anderson S 1987, Struggling with 3x + 1 Problem, Mathematical Gazett 71, 271-274) אשר אין לה פתרון בכל ניסוי בכיתה התווספו שלבים, רעיונות והצעות אפילו בשלבי כתיבת שורות אלה עולים רעיונות ושאלות נוספות לחקירה הידע הקודם במתמטיקה הנדרש לטיפול בבעיות אלה הוא פשוט, אך רמת הדיונים סביבן יכולה להיות מעמיקה ביותר לכן פעילות זאת מתאימה לכיתות שונות ולגילאים שונים

הערות

1 נוכל לתת פונקציה (נוסחה) אשר מתארת את כללי המשחק

$f\ N \to N$

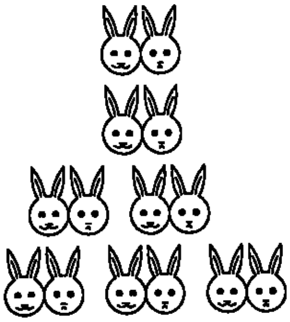
$$f(n) = \frac{3n - 2 + (-1)^n(2 - n)}{1}$$

2 הדיאגרמה של העיגולים המתארים מספרים זוגיים או אי־זוגיים יכולה להתקשר לבעיית הארנבות, המתוארת בספר בשם Liber Abaci של פיבונצ׳י

והנה הבעיה

מישהו כלא בין חומות זוג ארנבות שזה עתה נולדו ורצה לבדוק מהו מספר הארנבות שייוולדו במשך שנה אחת מניחים כי כל זוג בוגר של ארנבות מוליד זוג נוסף מדי חודש, וארנבות מגיעות לבגרות חודשיים מיום היוולדם ראה ציור מצורף

אם נשווה בין הדיאגרמות נראה כי זוג ארנבות צעיר אנלוגי לעיגול מלא (המציין אי־זוגי), כלומר ממשיך להתקיים אחרי חודש, לא מוליד אך הופך לבוגר כעבור חודש נוסף הזוג הבוגר, אם כך הוא אנלוגי למספר זוגי, כלומר ממשיך להתקיים כעבור חודש ובנוסף מוליד זוג צעיר



סדרת פיבונצי

1,1,2,3,5,8,13,21,

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 1$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Abraham Robinson The creation of nonstandard analysis, a personal and mathematical odyssey

Joseph Warren Dauben, Princeton UP, 559pp, $49.50

יבשם עוגד

במה קטן הוא גדול "קטן לאין סוף"? השאלה הזאת, שעשויה אולי להיראות תלושה מהמציאות, עומדת למעשה בבסיס של תחום מחקר מתמטי, שיש לו השלכות רבות חשיבות על מחקרים בפיסיקה ובמדעים נוספים, לרבות כלכלה, טכנולוגיה והנדסה. תחום המחקר הזה קרוי אנליזה, והוא כולל בתוכו את החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי, מיסודם של אייזיק ניוטון וגוטפריד וילהלם לייבניץ.

את הבעיות שניוטון ולייבניץ ביקשו לפתור באמצעות החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי, היתה הצורך לקבוע בדיוק רב ערכים מספריים של שלבים מסוימים בתהליך מתמשך. למשל, את מהירותה העכשווית של מכונית הנוסעת מירושלים לתל אביב.

חישוב פשוט יכול להתבצע כך: אם יודעים שהמרחק שעשתה המכונית הוא 50 קילומטרים, ואם יודעים שהיא עשתה את הדרך הזאת בשעה, לא נותר אלא לחלק אותם זה בזה (מהירות היא דרך חלקי זמן). במקרה זה, התוצאה המתקבלת היא 50 קמ"ש אבל, ברור שהמכונית לא נסעה במהירות אחידה במשך כל הנסיעה. אפשר כמובן להגיע לרמת דיוק טובה יותר, אם מבצעים את החישוב הזה ביחידות קטנות הולכות (תהליך שנקרא קירוב). כך אפשר להגיע לשאלות כגון כמה זמן נדרש למכונית כדי לעבור את המילימטר שהיא עוברת עכשיו?

במקרה של מכונית שנוסעת מירושלים לתל אביב, רמה כזאת של קירוב יכולה להיחשב מספיקה כמעט לכל צורך ועניין מעשי אבל במדידת קטעים בתהליכים מתמשכים אחרים, לא תמיד אפשר להסתפק בשיטת הקירובים. לפיכך הציעו ניוטון ולייבניץ את המושג של הגודל ה"קטן לאין סוף" (אינפיניטסימלי), זהו הגודל שאין קטן ממנו. אם לחזור לדוגמת המכונית, אפשר לומר שמי שמבקש לדעת את מהירותה העכשווית המדויקת של המכונית, לא יסתפק עוד בשאלה כמה זמן נדרש למכונית כדי לעבור מילימטר אחד במקום זה הוא ישאל, כמה זמן נדרש למכונית כדי לעבור את המרחק ה"קטן לאין סוף" שהיא עוברת עכשיו.

זה נראה פתרון יפה, אלא שלמעשה, כפי שניוטון ולייבניץ הציעו אותו והבינו אותו, הוא היה חסר משמעות. לפי ניסוחיהם של ניוטון ולייבניץ, הגודל ה"קטן לאין סוף" היה למעשה אפס. למשל, כדי לחשב בדרך זו את מהירותה של המכונית הנוסעת, יהיה צורך לחלק אפס דרך באפס זמן. זוהי פעולה חסרת משמעות שאינה מסתיימת בשום תוצאה.

אלה היו פני הדברים עד שבמאה ה-19 הציע המתמטיקאי הצרפתי אגוסטן לואי קושי לבטא שלב רגעי בתהליך (למשל, מהירות רגעית), כמעין גבול שבין שני ערכים מספריים. כלומר, כדי למצוא את מהירותה הרגעית של מכונית נוסעת, הציע קושי לחלק את תוספת הדרך שהיא עושה בתוספת הזמן שנדרש לה לשם כך. לפי הצעתו, מניחים לתוספת הדרך "לשאוף לאפס" דרך סדרת ערכים, אבל אין מניחים לה להיות ממש "קטנה לאין סוף".

פירוש מושג ה"גודל הקטן לאין סוף" באמצעות השאיפה לאפס העמידה את ניוטון ואת לייבניץ באור לא כל כך מכובד למעשה, הרעיון שלהם בדבר הגדלים ה"קטנים לאין סוף" הוגחך על ידי המתמטיקאים הגדולים של המאה ה-19 והמאה ה-20, כ"שטות". זו היתה הדעה הרווחת עד שאברהם רובינסון נכנס לעובי הקורה.

רובינסון יצא להחזיר את כבודם האבוד של ניוטון ולייבניץ, אבל בדרכו נאלץ לדלג מעל לאכסיומה של ארכימדס

רובינסון, שסיפור חייו המרתק, השזור בסיפורי מחקריו המתמטיים מובא בספר הזה, יצא להחזיר את כבודם האבוד של ניוטון ולייבניץ, אבל בדרכו נאלץ לדלג מעל לאכסיומה של ארכימדס. מדובר באכסיומה המתארת אחת מתכונותיהם הבסיסיות של המספרים ה"ממשיים". לפי האכסיומה של ארכימדס, כאשר מוסיפים מספר ממשי לעצמו די פעמים, מקבלים גודל הגדול מאחר. לדוגמה: המספר 0.1 (עשירית). כאשר מחברים עשיריות (עשירית, ועוד עשירית, ועוד עשירית, וכך הלאה, ומגיעים לאחת עשרה עשיריות, מקבלים את הגודל 1.1 שהוא גדול מאחד התהליך הזה אפשרי, מכיוון שהמספר 0 1 הוא מספר "ממשי" חיובי.

רובינסון השתמש בתורת המודלים (שהיא פלג של תחום הלוגיקה המתמטית), לבניית מודל של מספרים שכלל מספרים ממשיים מסוג חדש, שגם כשהם מוסיפים לעצמם שוב ושוב, לעולם אינם מסתכמים ביותר מאחד. במלים אחרות, המספרים הממשיים הלא סטנדרטיים האלה, שיצר רובינסון,

אברהם רובינסון, 1974-1918

הם מספרים קטנים לאין סוף אי אפשר לגרום להם "לגדול" אל מעבר לאחד. במערכת המספרים הזאת, אפשר לבצע חישובים בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי, תוך כדי שימוש מעשי ובעל מובן במושג הגודל הקטן לאין סוף – ולקבל תוצאה בעלת משמעות (לדוגמה, מהירותה העכשווית האמיתית של המכונית בקטע דרך קטן לאין סוף).

רובינסון נחשב לאחד מהמתמטיקאים החשובים של המאה הנוכחית. האנליזה הלא סטנדרטית שפיתח עיצבה מחדש תחומי מחקר חדשים במתמטיקה ובאה לידי ביטוי גם בתחומי פעילות גשמיים לחלוטין, כמו חישובים כלכליים, הנדסה, ומחקרים פיסיקליים (שם יש חשיבות מיוחדת, למשל, ליכולת לחשב ולדעת את מהירותו המדויקת, בכל רגע נתון, של חלקיק הנע במאיץ חלקיקים).

מחבר הביוגרפיה ג'וזף דאבן, פרופסור להיסטוריה של המדע באוניברסיטת ניו יורק, נודע בזכות הביוגרפיות המפורסמות והמקיפות שכתב על חייהם של מדענים מהשורה הראשונה. בחירתו ברובינסון כנושא לכתיבת ביוגרפיה מרכזת בעד עצמה. בשביל הקורא הישראלי, יש בביוגרפיה הזאת – נוסף על תיאור ההתפתחות המחקרית – הזדמנות להיווכח כיצד נראים ישראל והישראלים בעיני אדם נבון במיוחד, שראה הרבה, ושבשבילו העולם היה באמת לא יותר מכפר קטן.

רובינסון נולד בעיירה ברסלאו שבפרוסיה בשנת 1918. בשנת 1933, לאחר מות אביו עלה, בנער, עם אמו ועם אחיו הבכור לארץ. בתחילה התיישבו בתל אביב, אך כעבור שנה עברו לירושלים, שם התגוררו משך זמן מה בביתו של הד"ר אברהם ברתנא, מנהל גימנסיה רחביה, שבה החל אברהם רובינסון הצעיר את לימודיו הילד, שכתב שירים בגרמנית, למד עברית כמהירות והתערה בחברה הירושלמית, אך לא ויתר על דעותיו העצמאיות בתחומים שונים. "לימודים לא נחשבו בין חברי כעיסוק ראוי", מספר רובינסון, "כולם היו עסוקים אז בלוחמה נגד הערבים או בדיבורים על המצב". במצב העניינים הזה, מספר דאבן, החליטו התלמידים "לסתור" את בחינות הבגרות במתמטיקה יום לפני הבחינה. "הנחת העבודה" של התוכנית הזאת היתה שרובינסון יספק את הפתרונות, אבל רובינסון הפתיע "אתם יכולים לעשות מה שאתם רוצים", אמר לחבריו, "אבל אני לא משתתף במעשה המרמה הזה, לא באופן פעיל, ולא באופן סביל". בניגוד למה שאפשר לצפות, ה"סרבן" לא נענש בחרם חברתי, ולמעשה, לפי עדויות אחרות שמצטטות בספר, מניותיו אפילו עלו בעיני החבר'המנים מרחביה.

בשנים 1939-1936 למד רובינסון מתמטיקה באוניברסיטה העברית בירושלים, שם קירב אותו פרופ' אברהם הלוי פרנקל אל הלוגיקה המתמטית. שם גם פגש את מיכאל רבין, תלמיד נוסף של פרופ' פרנקל, שלימים נעשה רקטור האוניברסיטה העברית, וזכה בפרס טיורינג (על שמו של המתמטיקאי הבריטי אלן טיורינג, מאבות תורת החישוביות) – הפרס החשוב ביותר בעולם בתחום מדעי המחשב. הפרופ' פרנקל "גילה" את רובינסון ואת רבין, וטיפח אותם. "רובינסון היה אדם נדיר ותבר נהדר", אומר רבין, "היה לו חוש הומור יוצא מהכלל, ששולב ביכולת אינטלקטואלית גבוהה ובהשכלה רחבה. תענוג היה לשוחח אתו, להחליף רעיות, להתבדח, להתווכח". הסטודנט הצעיר אברהם רובינסון התגייס – כמו כולם – להגנה, וגם הוא, כמעט כמו כולם באותם זמנים, הלך בשורות בספר מודפסות תמונות שלו, על משמרתו בקריית ענבים, כשהוא אוחז רובה צ'כי בפוזה המשותפת לסרטי כל העולם. בעמודות המספר האלה שוחח רובינסון עם שמעון אברמסקי על תפיסותיהם של קאנט והגל

רובינסון ידע שהסיכוי היחיד שלו לממן לעצמו לימודים אקדמיים ברמה גבוהה תלויים ביכולתו לזכות במלגות ואכן, כשזכה במלגה ללימוד מתמטיקה בפאריס, לא היסס ונסע כשצבאות הנאצים עמדו בשערי פאריס, ברח יחד עם ההיסטוריון יעקב טלמון לאנגליה, שם עבד כחוקר בשירות הצבא הבריטי, עד לסיומה של מלחמת העולם השנייה. אחר כך יצא למסע נדודים שעבר דרך אנגליה, קנדה וישראל, והסתיים בארצות הברית.

בכל מקום שאליו הגיע, פעל – נוסף על פעילותו המחקרית – כדי לצמצם פערים כלכליים, חברתיים, פוליטיים וגזעיים, בין בני אדם. בשנת 1974 נבחר רובינסון כחבר באקדמיה הלאומית למדעים של ארה"ב וזמן קצר לאחר מכן מת בניו הייבן, בגיל 55. הוא נקבר בבית העלמין בגבעת שאול.