עורך המדור **עופר ליבה**

בין אסתטיקה למתמטיקה

עופר ליבה
אוניברסיטת בן-גוריון בנגב, באר-שבע

אנו מכירים היטב את המצבים שבהם יוצא לנו לשוחח על המתמטיקה עם בן-שיח אשר אינו מעורה בה, או אשר "סוחב" טראומה מלימודיו-הוא, ואחת מהצהרותיו היא שמדובר במקצוע יבש, תלוש, טכני, ובעצם לא מעניין במקרים גרועים יותר אף נשאלת השאלה "בשביל מה צריך ללמוד אותה בכללי" ואני עונה התיאוריות המתמטיות הן יפות, אלגנטיות, מתוחכמות, הן מעוררות בי התרגשות והנאה " תשובה זו גורמת לבן שיחי להרים גבה, כי הרי תשובתי מתאימה לתיאור האמנות, המוסיקה והשירה, אך בשום אופן אינה יכולה לתאר את המתמטיקה

אנשי ההומניסטיקה נהנים משהייה באולמות קונצרטים, מסיור בגלריות של אמנות, ומקריאה של ספרים, אך בורחים מהמתמטיקה כמו מאש הם לא הורגלו לראות **נכונה** את המתמטיקה, על היבטיה האסתטיים והמענגים

פרופ' ג'רי קינג, מתמטיקאי ומשורר, מצליח להסיר את ההפרדה הלא-מוצדקת בין שני עולמות שונים לכאורה, כבר בכותרת אשר בחר לספרו "אמנות המתמטיקה" * הספר הוא מסע מהנה אל כמה מהאוצרות והמחוזות הנפלאים של המתמטיקה, ואל פעילותם של המתמטיקאים

הפשטה

המושגים המתמטיים נבעו במקור מתצפית באובייקטים של הטבע, כי המתמטיקה רצתה אז להבין ולתאר את המציאות אנו רואים זאת היטב בקווים, במשולשים, ובצורות ההנדסיות האחרות של הגיאומטריה האוקלידית, אשר תכונותיהן תואמות את מושאי ייצוגיהן בעולם הממשי אף-על-פי-כן, הצורות של הגיאומטריה האוקלידית הן **אובייקטים מופשטים** והן "חיות" בעולם המתמטי ולא בעולם המציאות משולש הוא אובייקט אשר קיים במוחו של המתמטיקאי תכונותיו מוכתבות על-ידי האקסיומות וכללים נוספים הנובעים מהן באמצעות כללי הלוגיקה העובדה שהתכונות אשר אנו מסיקים באופן דדוקטיבי אומרת לנו משהו על אי-אלו "משולשים" במציאות היא דבר נפלא, אך אין זו מתמטיקה **האובייקטים המתמטיים קיימים בעולם הרעיונות ולא במציאות הממשית.**

המספרים הטבעיים אינם קיימים בטבע, על-אף שהם עצמים יסודיים של המתמטיקה הם למעשה הפשטה, אשר נולדה מתוך הניסיון לאפיין את המשותף בין קבוצות של עצמים אשר להם "גודל" משותף "3" הוא הדבר המשותף לשלשה של כבשים, שלשה של ספרים, שלשה של עצים, וכיו"ב "3" עצמו אינו קיים במציאות המספרים הטבעיים היו הראשונים שבהם השתמשו בני האדם באופן שיטתי ומסודר, והם אלה שבהם משתמש ילד קטן בלומדו לראשונה את תהליך הספירה אף בתקופה שבה הספיקה המתמטיקה להכיל עוד הרבה מאוד "יצורים" נוספים אשר יכלו להיקרא מספרים, אמר קרונקר (Leopold Kronecker) "אלוהים ברא את המספרים הטבעיים, השאר הוא מעשה ידי אדם "

ההפשטה היא למעשה **חשיבה סלקטיבית.** כשאנו יוצרים מודל מופשט של אובייקט מציאותי, אנו בוחרים מספר מאפיינים שבהם אנו מתמקדים אפשר לבצע מנוון של הפשטות על אותו אובייקט עצמו, בהתאם לצרכים ולרצונות ההפשטה עצמה אינה מחווה בהכרח קושי רציני במתמטיקה מה שעושה את המתמטיקה לקשה, היא **הדיוק המושלם** הנדרש ממנה אינך יכול לרמות או שאתה מוכיח שפונקציה גזירה היא בהכרח רציפה, או שלא ההפשטה היא דבר יום-יומי, הדיוק הוא קשה ולא טבעי

אימפליקציה

חמשת האקסיומות של פיאנו (Guiseppe Peano) אשר מאפיינות את המספרים הטבעיים, מספיקות כדי לבנות את קבוצות המספרים הרחבות יותר, ובעצם לפתח את האנליסה, בשרשרת

* King, Jerry *The Art of Mathematics* Plenum Press, 1992

מסודרת של מסקנות הנובעות מהנחות ומתוצאות קודמות המתמטיקה הטהורה בנויה בעיקרה מ- "הצהרות" מסוג מפסוק p נובע פסוק q (p גורר q, אם p אז q), ובסמלים

$$p \Rightarrow q$$

שנקראת אימפליקציה הסוגיה אם p עצמו נכון או לא, כלל אינה רלוונטית כשהמרצה מוכיח שכל פונקציה גזירה היא בהכרח רציפה, הוא אינו אומר שקיימת פונקציה גזירה, אלא **שאם** היא גזירה, **אז** היא גם רציפה האימפליקציה היא מהותה של המתמטיקה הטהורה, ממש כמו אוויר לנשימה

הפיתוח של קבוצת המספרים הממשיים החל מאקסיומות פיאנו (שכאמור דנות רק במספרים הטבעיים), יהיה בנוי, אם כך, משורה ארוכה של הצהרות מסוג "p גורר q" והוכחתן כמובן שבמהלך הדרך יוגדרו פה ושם מושגים ועצמים חדשים, אך כל הגדרה חייבת לשמור על עקביות לגבי האקסיומות המקוריות והתוצאות שכבר התקבלו, ובהוכחות ייעשה שימוש **אך ורק** באקסיומות ובמשפטים שכבר הוכחו

"מינוס כפול מינוס נותן פלוס"

אחת העובדות אשר "מציקות" לתלמידים היא שמכפלת שני מספרים שליליים היא חיובית (העובדה שמכפלת חיובי בשלילי היא שלילית לא מהווה בעיה, שכן $5 \quad (-10)$ יכול להיחשב כסכום של חמישה מחוברים השווים ל- (-10), ואת $(-5) \quad 10$ אפשר להמיר בקודם) בספרות הפופולרית אפשר למצוא כל מיני "טיעונים" הֶיְרִיסטיים אשר מנסים להמחיש ולהצדיק את החוק, אך הם רובם ככולם בלתי משכנעים

למעשה, קל להבין את החוק, אם למדת מתמטיקה כהלכה אצל מורה שמבין את מה שהוא מלמד, וגם מבין בהוראה טובה שתי עובדות יסוד מספיקות, והן

$$z \quad 0 = 0 \quad z = 0$$

$$z + (-z) = 0$$

(לכל מספר z) (כמובן שבפיתוח מדוקדק, עובדות אלה הן מסקנות שאפשר להוכיחן על-סמך אקסיומות פיאנו ומשפטים קודמים) ובכן ניקח שני מספרים כלשהם a ו- b, ונגדיר

$$x = a \quad b + (-a) \quad b + (-a) \quad (-b)$$

נוכל לרשום מצד אחד

$$x = a \quad b + (-a) \quad [b + (-b)] =$$
$$= a \quad b + (-a) \quad 0 = a \quad b + 0 = a \quad b$$

ומצד שני

$$x = [a + (-a)] \quad b + (-a) \quad (-b) = 0 \quad b + (-a) \quad (-b) =$$
$$= 0 + (-a) \quad (-b) = (-a) \quad (-b)$$

ולכן

$$(-a) \quad (-b) = a \quad b$$

אחת המסקנות של החוק היא שהריבוע של כל מספר שונה מאפס הוא חיובי, ולכן לא קיים שום מספר ממשי שריבועו שלילי כדי לפתור משוואה כגון $x^2 = -1$, אנו חייבים להוסיף לקבוצת המספרים הממשיים את המספרים המדומים, ולקבל (שוב באמצעות תהליך מסודר שכולל הגדרות ומסקנות מדויקות) את קבוצת המספרים המרוכבים

השלמות האסתטית

על הפיתוח של קבוצת המספרים המרוכבים, כפי שהוא מתואר בצורה מרתקת בספר, נדלג כאן, אך נתרכז באחת המסקנות היפות של הנוסחה

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$$

אשר הוכחה על-ידי אוילר (Leonhard Euler) בשנת 1748 משוואה זו מקשרת בין הפונקציה המעריכית במשתנה מרוכב, לבין הפונקציות הטריגונומטריות במשתנה ממשי אם נציב

$$\theta = \pi$$

נקבל

$$e^{i\pi} = -1$$

זוהי תוצאה מעניינת בפני עצמה, וכך היא מופיעה במקומות רבים יחד עם זאת, כמעט כל מתמטיקאי יחוש "דחף בלתי ניתן לכיבוש" להוסיף לשני האגפים את המספר 1, וכך לקבל

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

שתי המשוואות שקולות לחלוטין, באשר הן מכילות בדיוק את אותה אינפורמציה, אך הן נמצאות בחלקים שונים של העולם האסתטי המשוואה הראשונה היא "סתם" מעניינת המשוואה השנייה היא היופי המתמטי בהתגלמותו חמשת המספרים החשובים ביותר נמצאים בה, כמו גם שלוש הפעולות החשובות ביותר וחוץ מזה, אין בה שום דבר מיותר המשוואה השנייה עונה על **עיקרון אסתטי של שלמות מינימלית.** כשאנו מבחינים בהבדל שבין שתי המשוואות, אנו יכולים להבין שמתמטיקאי ייחנה יותר **מהיופי** שבשנייה מאשר **מהאינפורמציה** של הראשונה

"מהו יופי" היא אחת מארבע שאלות היסוד של הפילוסופיה (יחד עם "מהי אמת", "מהי מציאות", "מהו צדק") המוטיווציה המרכזית של המתמטיקאים היא היופי של התיאוריות המתמטיות אומר לין סטין (Lynn Steen), שהיה נשיא האיגוד למתמטיקה של ארצות הברית (MAA) "למרות האופי האובייקטיבי של המתמטיקה, שאין לו מקביל בעולם האמנויות, המוטיווציה והסטנדרטים המכתיבים את היצירה המתמטית דומים יותר לאלה הקיימים באמנות מאשר במדעים השיפוטים האסתטיים הם מרכזיים, והם מעבר ללוגיקה ולישימות יופי ואלגנטיות קשורים יותר לערך של רעיון מתמטי מאשר האמת הצרופה או אפשרויות היישום" פואנקרה (Henri Poincaré) מוסיף ואומר "רגישות אסתטית למתמטיקה היא נשמתו של המתמטיקאי בלעדיה הוא לא יכול להיות יוצר אמיתי המיומנות הלוגית וחיכולת לשחק בסמלים אינן מספיקות כלל לתהליך הגילוי והיצירה "

המתמטיקאים

אנו יודעים שיש חוסר מודעות בקרב התלמידים, הקהל הרחב, וחלק מהמורים, לגבי הצדדים האסתטיים של המתמטיקה חוסר מודעות נוסף, ולא פחות מזיק מבחינת ההשלכות שלו על תדמיתה של המתמטיקה, הוא לגבי הצדדים האנושיים שלה בדומה לאמנות ולמדעים, **המתמטיקה התפתחה כתוצאה ממאמצים גדולים שנעשו לאורך תקופות זמן ממושכות על-ידי גברים ונשים בשר ודם.**

הסטודנטים לומדים על ויירשטרס (Karl Weierstrass), אך אינם יודעים דבר על חייו הסטודנטיאליים בבון, שם עבד כמלצר במסבאה, ועל הרומן שניהל, בהיותו בן 50, עם תלמידתו סוניה קובלבסקי (Sonja Kowalevsky), בהיותה בת 25, מסונוורת מאהבתה אליו, ובדרכה לתהילה מתמטית משלה כמו כן הם לומדים את תורת גָלואה, אך אינם יודעים על האישיות העצובה והרומנטית של אווריסט גלואה (Evariste Galois), אשר כתב את ממצאיו לאור הנר, והוסיף בשוליים "אין לי זמן, אין לי זמן", בניסיון לעצור את הזמן ולעכב את הזריחה, לילה לפני הדו-קרב "של כבוד" שבו מצא את מותו בגיל 21 הסטודנטים רואים את הצד ההומניסטי של המתמטיקה רק דרך המרצים שלהם מובן מאליו שהם אינם רוצים להידמות לפרופסור למתמטיקה

המחבר מצטט מתוך מאמר של אלן המונד (Allen Hammond), איש בעל השכלה וידע במתמטיקה, שאינו מתמטיקאי מקצועי, ואשר בעומדו מחוץ ל-"אריסטוקרטיה" של המתמטיקאים, מצליח להתבונן בהם ולאפיין אותם בבהירות יוצאת דופן "המתמטיקה מתוארת כמעט תמיד כענף של המדעים וכהתגלמותה ותמציתה של התבונה הטהורה אין ספק שהיא הוכיחה עצמה כבעלת יישומיות גבוהה למדע ולטכנולוגיה המודרנית אבל המתמטיקאים מתעקשים לתאר אותה במונחים של אמנות – יופי, אלגנטיות, פשטות – ומצביעים על אנלוגיות המקשרות אותה לאמנויות הפלסטיות ולמוסיקה מתמטיקאי יכחיש בתוקף שהוא מכוון את מחקריו לכיוון הישימות והשימושיות, ויאמר שהוא מונע בידי **עקרונות פעולה אסתטיים.** זוהי דיכוטומיה אופיינית מאוד למתמטיקה "

מחבר הספר שלפנינו מצביע על הפוטנציאל החינוכי העצום שטומן בחובו העיקרון האסתטי שעליו מדברים המתמטיקאים הוא אומר שצריך להוסיף לדבריו של המונד את **תכונת הייחודיות** של המתמטיקה מבין הדיסציפלינות אשר נלמדות בתחילת הלימודים האוניברסיטאיים, המתמטיקה בולטת בייחודיותה, בהיותה הן מדע והן אמנות · מהנדסים ומדענים מעריכים את המתמטיקה בשל ישימותה ההומניסטים ואנשי הספר יוכלו להעריכה אך ורק אם היא תוצג להם כפי שהמתמטיקאים רואים אותה אלגנטית ויצירתית ההומניסטים לא יוכלו למצוא עניין במתמטיקה אם היא תוצג להם על היבטיה היישומיים בלבד היבטים אלה מוכרים להם זה מכבר, והם אלה שהבריחו אותם ממנה

המתמטיקאים נכשלו בכך שלא השכילו לשדר את מאפייניה האמנותיים של המתמטיקה לאנשי תרבות מחוץ לאריסטוקרטיה שלהם **ואת המשימה החשובה הזאת, אף אחד לא יוכל לבצע במקומם.**

רשימת ספרות

Albers D and G L Alexanderson *Mathematical People* Birkhauser, 1985

Bell, Eric Temple *Mathematics, Queen and Servant of Science* MAA, 1987

Davis, Philip and Reuben Hersh *The Mathematical Experience* Birkhauser, 1995

Devlin, Keith *Mathematics, The Science of Patterns* Scientific American 1994

Dunham, William *Journey through Genius* Wiley, 1990

Dunham, William *The Mathematical Universe* Wiley, 1994

Emmer, Michele (ed) The *Visual Mind – Art and Mathematics* MIT Press, 1993

Eves, Howard *Great Moments in Mathematics after 1650* MAA 1981

Freudenthal, Hans *Mathematics as an Educational Task* Reidel, 1973

Gardner, Martin *Aha! Gotcha* Freeman, 1979

Gardner, Martin *Aha! Insight* Freeman, 1975

Hadamard, Jacques *The Psychology of Invention in the Mathematical Field* Dover, 1954

Halmos, Paul *I Want to Be a Mathematician* Springer, 1985

Hardy, G H *A Mathematician Apology* Cambridge University Press, 1973

Hofstadter, Douglas *Godel, Escher, Bach An Eternal Golden Braid* Penguin, 1979

Kline, Morris *Mathematics in Western Culture* Oxford University Press 1959

Kline, Morris *Mathematics, the Loss of Certainty* Oxford University Press, 1980

Lang, Serge *Des Jeunes et Des Maths* Belin, 1984

NCTM *Professional Standards for Teaching Mathematics* NCTM, 1991

Polya, George *How to Solve It* Penguin, 1990

Salem, Lionel, and others *The Most Beautiful Mathematical Formulas* Wiley, 1992

Schmalz, Rosemary *Out of the Mouths of Mathematicians* MAA, 1993

Simmons, George *Calculus Gems* McGraw-Hill, 1992

Stewart, Ian *The Problems of Mathematics* Oxford University Press, 1987

אייזנברג, טד וטומי דרייפוס, "הרהורים על האסתטיקה של החשיבה המתמטית", עליה 6-7 (1990)

ליבה, עופר, "החוויה המתמטית", עליה 8-9 (1991)

ליבה, עופר, "מצעד יצירות המופת המתמטיות", עליה 10 (1992)

ליבה, עופר, "משכמם ומעלה", עליה 15 (1994)

ליבה, עופר, "לראות את π ", עליה 16 (1995)