ודאות והוכחה בפיתוח החשיבה המתמטית

אפרים פישביין ואירית קדם
בית הספר לחינוך, אוניברסיטת תל אביב

השאלה שעמדה מאחורי המחקר הנוכחי הייתה האם תלמיד תיכון, המשתתף באופן סדיר בקורסים למתמטיקה, פיסיקה וכו', מבין בבירור, שההוכחה הפורמלית של טענה מתמטית משרה עליה את התכונה של תוקף אוניברסלי מלכתחילה, ולפיכך מבטלת את הצורך בבדיקות נוספות? או האם יניח, שתמיד רצוי לבצע בדיקות נוספות כדי להעריך את תקפות המשפט (שכבר הוכח)?

ההשערה העיקרית של המחקר הייתה, שמרבית התלמידים – גם אלה הלומדים במגמה מתמטית – אינם יודעים בבירור את משמעותה של הוכחה מתמטית פורמלית. יצאנו מההנחה, שהתלמידים האלה, לאחר שגילו או למדו הוכחה נכונה למשפט מתמטי מסוים, ימשיכו לחשוב שעדיין ייתכנו הפתעות, שרצוי להמשיך ולבדוק כדי להוסיף לאמינותה של הטענה (כפי שהדבר נעשה במחקר אמפירי).

שיטה

כדי לנטרל ככל האפשר את השפעת המידע של הנבדק ואת ההשפעה של תהליך עיבוד המידע, סיפקנו לתלמידים את כל הנתונים הנחוצים להבנת הטענות המתמטיות המופיעות בשאלונים שלנו ואת ההוכחות הפורמליות המתאימות.

הנחקרים היו 397 תלמידים הלומדים בשלושה בתי ספר, בשלושה אזורים שונים של תל אביב. הנחקרים השתייכו למגמות אלה: מתמטיקה, אלקטרוניקה, מכניקה, ביולוגיה, מדעי הרוח ושפות. לפי תכנית הלימודים במתמטיקה של מגמות אלה, סווגו הנחקרים לשתי קבוצות:

א אלו שלמדו מתמטיקה ברמה גבוהה (המרייג): תלמידי מגמות מתמטיקה, אלקטרוניקה וביולוגיה (150 נחקרים);

ב תלמידים שלמדו מתמטיקה ברמה בסיסית (המרייב): תלמידי מגמה הומנית ומכניקה (247 נחקרים). ברור, ששתי הקבוצות הללו אינן הומוגניות, אך לנו היה חשוב במיוחד לזהות את התלמידים שלמדו מתמטיקה ברמה גבוהה, בניגוד לאלה, שלפי תכניות הלימוד, למדו מתמטיקה ברמה בסיסית בלבד. נחקרו שלוש שכבות: י, יא, יב, התואמות בקירוב את הגילים 15, 16 ו-17. בסך הכל השתתפו במחקר שש-עשרה כיתות: שש כיתות י, שש כיתות יא וארבע כיתות יב.

השאלונים

השתמשנו בשני שאלונים, האחד בעל תוכן אלגברי והאחר בעל תוכן גיאומטרי. השאלונים הועברו בו-זמנית, כלומר, כמחצית מהנחקרים קיבלו את השאלון האלגברי ($N = 200$) והשאר קיבלו את השאלון הגיאומטרי ($N = 197$). השאלונים חולקו באופן אקראי בסביבת הכיתה הרגילה של הנחקרים.

כל אחד משני השאלונים הכיל:

א "מבוא"

ב "לב השאלון" המחולק לשני חלקים, ב-1, ב-2.

א בשאלות שהופיעו במבוא נתבקשו הנחקרים לבצע מספר פעולות מתמטיות (חישובים או בנייה גיאומטרית) ולנסות להכליל ולהסביר את התוצאות שהושגו.

ב-1 הוצג משפט, הקשור במימצאים הקודמים. אחריו באה ההוכחה המתאימה. הנחקרים נשאלו אם לדעתם ההוכחה נכונה, ואם כן, אם הם מסכימים עם תקפותה הכללית.

ואלה המשפטים שאליהם התייחסנו:

1 ABCD הוא מרובע ו-P, Q, R, S הן אמצעי הצלעות. יש להוכיח כי PQRS הוא מקבילית.

2 הביטוי $E = n^3 - n$ מתחלק ב-6 עבור כל n כאשר n הוא מספר שלם חיובי.

ב-2 חלק זה נועד לקבוע אם הנחקרים עקביים בגישתם, שהוצגה בחלק ב-1. במלים אחרות, שאלנו אם הנחקר, **שכבר הכריז על הסכמתו המלאה עם המשפט ועם הוכחתו**, ישלול לחלוטין את הצורך בבדיקה אמפירית נוספת כלשהי.

דוגמאות לשאלות שנשאלו בחלק ב-2 של השאלון:

גיאומטריה "V הוא ספקן. הוא חושב שעלינו לבדוק לפחות מאה מרובעים כדי להיות בטוחים ש-PQRS הוא אכן מקבילית. מה דעתך? הסבר."

אלגברה M טוען שבדק את התשובה כאשר $n = 2357$, שהשיג את התוצאה 105513223 ושהיא אינה מתחלקת ל-6. מה דעתך?"

"בהנחה שדן הביא הוכחה נכונה למשפט "$n^3 - n$ מתחלק ב-6 עבור כל n" ענה על השאלה הזו: האם לדעתך יש צורך בבדיקה נוספת (באמצעות מספרים אחרים), כדי להגדיל את בטחונך בתוקף המשפטי? כן/לא. הסבר את תשובתך."

התוצאות

דפוסי התשובה הבאים הם, לדעתנו, רלוונטיים במיוחד. הם מייצגים עמדות קוגניטיביות שונות ונבדלים בעמדות שלהם

1 **עקביות פורמלית.** הנחקרים אשר
א בחלק ב-1 של השאלון מסכימים עם התקפות הכללית של המשפט, מסכימים עם נכונות ההוכחה, מסכימים שהמשפט נתמך במלואו בידי ההוכחה

ב בחלק ב-2 של השאלון מסוגלים להגן על גישתם התיאורטית ולדחות כל הגבלה (בלתי צודקת) של מידת ההכללה של המשפט שהוכח ולדחות כל צורך בבדיקות אמפיריות נוספות

2 **חוסר עקביות יסודית.** אלה אשר נראה שהם עקביים מבחינה פורמלית בחלק ב-1 (מסכימים עם המשפט, עם ההוכחה וכו') ולמרות זאת מגלים גישה אמפירית בחלק ב-2 (ייתכן שלא יהיה אפשר לאשר את המשפט במצבים מסוימים, יש צורך בבדיקה נוספת, וכו')

3 **עקביות אמפירית.** הנחקרים אשר
א בחלק ב-1 אינם מסכימים עם העיקרון שהוכחה פורמלית יכולה להבטיח את התוקף הכללי של המשפט
ב ממשיכים להחזיק בדעה זו גם בחלק ב-2

4 נבדקים שלא מסכימים בכלל עם תקפות ההוכחה

5 **אחרים.** לבסוף יש שאר הנחקרים, אלה שנתנו תשובות לא רלוונטיות, שהיו חסרי עקביות בדרך כלל, שלא ענו על כמה מהשאלות

למעשה, יש שלושה דפוסי גישה רלוונטיים
א עקביות פורמלית
ב חוסר עקביות
ג עקביות אמפירית

התוצאות שהושגו עבור השאלונים בגיאומטריה ובאלגברה מובאות בלוח הבא

אחוזים של דפוסים קוגניטיביים

רמה מתמטית גבוהה

	גמאומטריה (N = 73)	אלגברה (N = 77)
1 עקביות פורמלית	11 0	23 4
2 חוסר עקביות בסיסית	34 3	25 9
3 אישרו נכונות ההוכחות (1+2)*	45 3	49 3
4 עקביות אמפירית כללית	2 7	15 6
5 דחיית ההוכחה	2 7	6 5
6 אחרים	49 3	28 6

רמה מתמטית בסיסית

	גמאומטריה (N = 124)	אלגברה (N=77)
1 עקביות פורמלית כללית	6 4	8 9
2 חוסר עקביות בסיסית	32 3	28 5
3 אישרו נכונות ההוכחות בחלק ב-1 (1+2)*	38 7	37 4
4 עקביות אמפירית כללית	7 2	30 9
5 דחיית ההוכחה	8 1	12 2
6 אחרים	46 0	19 5

התוצאות מאמתות את השערת המחקר הבסיסית שלנו מרבית הנחקרים תומכים בצורך בבדיקות אמפיריות נוספות למשפט מתמטי שהוכח, גם אם הסכימו לחלוטין עם המשפט ועם ההוכחה הפורמלית שלנו מסקנה זו נכונה לא רק לגבי תלמידים שלמדו מתמטיקה ברמה בסיסית, אלא גם לגבי תלמידים אשר, לפי תכניות הלימוד שלהם, היו אמורים להיות בעלי רקע מתמטי איתן

התברר, כי מתוך סך של 793 תלמידים, כ-40% הסכימו במפורש עם המשפטים המתמטיים שהוצגו ועם ההוכחות שלהם, אבל רק 10 8% לגבי גיאומטריה ו-14 5% בלבד לגבי אלגברה היו עקביים ודחו כל צורך בבדיקה אמפירית נוספת (נתונים אלו מתייחסים לכלל אוכלוסיית הנבדקים)

אם נתייחס רק לנחקרים שהביעו את הסכמתם עם המשפטים וההוכחות ($n = 165$), נמצא כי 36% מהתלמידים שלמדו מתמטיקה ברמה גבוהה, ו-20% מהתלמידים שלמדו מתמטיקה ברמה נמוכה הבינו שאין צורך בבדיקות נוספות כיוון שהוכחה פורמלית מבטיחה מראש את תוקפו המוחלט של המשפט

ההסבר הבסיסי שאנו מביאים למימצא זה הוא, שהתלמיד הרגיל נוטה אינטואיטיבית לפרשנות האמפירית של תקפות ההוכחה הוא נוטה באופן טבעי לחפש תמיכה למשפט על-ידי צבירת כמה שיותר אישורים בעלי משמעות אמפירית ברור, שהתלמיד אינו מודע לנטיה זו בתגובותיו הגלויות, "על פני השטח", ייתכן שהוא מבחין בבירור בין ההוכחה הפורמלית להוכחה אמפירית אולם, כאשר ניצבות מול התלמיד שאלות לא סטנדרטיות בנוגע לתוקפו של משפט שהוכח פורמלית, ייתכן שגישותיו המושרשות עמוק עדיין נטועות בנטייתו לחפש אחר אישורים נוספים רבים ככל האפשר

* שורה זו היא סיכום של שורות אחת ושתיים, ומייצגת את אחוזי הנשאלים שהסכימו עם סעיף ב-1