אוריגמי המביא לידי מחשבה:
שאלות גיאומטריות הקשורות בקיפולי נייר

רינת חדשי
המרכז הארצי לקידום, שיפור וריענון החינוך המתמטי

האמנות היפנית של קיפולי נייר נוצרה לפני מאות שנים, אך גם כיום היא תחום פעיל ותוסס אשר כולל מחקר וחידושים נוסף על הצורות היפות של חיות וחפצים יומיומיים, עוסק אוריגמי מודרני גם בשאלות גיאומטריות הקשורות בקיפולי נייר מורים אשר תרים אחר דרכים חדשות ליצירת הבנה ועניין בשיעוריהם, יוכלו למצוא עניין בקיפולי הנייר

באמצעות קיפולי נייר אפשר לעסוק בנושאים גיאומטריים המיועדים למיגוון של רמות, החל בחטיבת הביניים וכלה באוניברסיטה

כדי לתת בסיס מתמטי מוצק לקשר בין אוריגמי לגיאומטריה, נניח מספר הנחות יסוד
(נשתמש במונח "קיפולי" כדי לציין את הפעולה, ובמונח "קמט" כדי לציין את הסימן שנוצר על דף כתוצאה מקיפולו)

- אפשר לקפל נייר כך שהקמט הנוצר הוא קו ישר
- אפשר לקפל נייר כך שהקמט יעבור דרך נקודה נתונה או שתיים
- אפשר לקפל נייר כך שהנקודה תתלכד עם נקודה אחרת על אותו גיליון
- אפשר לקפל נייר שעליו סומנו שתי נקודות וישר, כך שנקודה אחת תיפול על הישר, והקמט שיווצר יעבור דרך הנקודה האחרת
- אפשר לקפל נייר כך שקו ישר יתלכד עם קו ישר אחר על אותו גיליון
- ישרים וזוויות נחשבים לחופפים כאשר אחד מהם מונח על השני בקיפול הנייר

אם הנחות אלה מתקבלות, אזי **אפשר לבצע את כל הבניות של גיאומטריה אוקלידית במישור על-ידי קיפול וקימוט.**

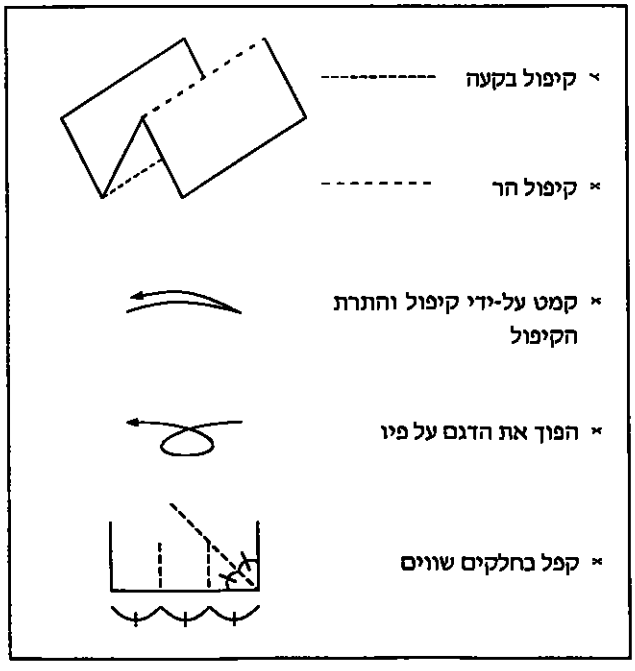
דרך אחת לשילוב אוריגמי בהוראת המתמטיקה, מורכבת משני שלבים בשלב הראשון, התלמידים בעצמם מקפלים נייר, לפי הוראות כתובות בשלב השני נערך דיון על תכונה מתמטית מעניינת שמתגלה ביצירה שקיפלו בסדנה נביא שתי דוגמאות לדרך הוראה זו (דוגמה 1, דוגמה 2)

דרך הוראה שונה מתייחסת לקיפול כאל בנייה גיאומטרית שהיא פתרון לחידה לפי דרך זו, התלמידים אינם מקבלים הדרכה והוראות קיפול, אלא מוצגת בפניהם צורה מוגמרת, שאותה הם מתבקשים ליצור לאחר פסק זמן להתנסות, נערך דיון מתמטי בפתרון בהמשך תובא דוגמה אחת לדרך הוראה זו (דוגמה 3)

כאשר אנו מחלקים לתלמידים הוראות לקיפול, כדאי לנקוט מספר אמצעים שיבטיחו את הצלחת שלב קיפול הנייר

- רצוי לחלק לתלמידים הוראות ברורות מאוד לגבי כל שלבי הקיפול השונים
- היות שהוראות הקיפול מסורטטות לפי קוד סמלים מסוים, ברור כי כדאי לוודא שהסימול הרלוונטי מוכר לתלמידים
- כדי למנוע תיסכול מתלמידים שאינם מוכשרים לעבודות יד כגון אלה, לא כדאי לבחור יצירות שהן מסובכות מדי לביצוע

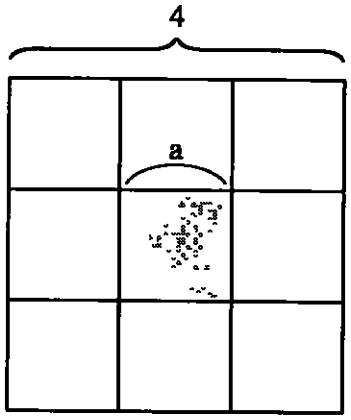
כל ספרי האוהיגמי מציגים הוראות הדרכה לקיפול תוך שימוש בשפה אוניברסלית של סמלים להלן חלק מן הסמלים הרלוונטי להמשך



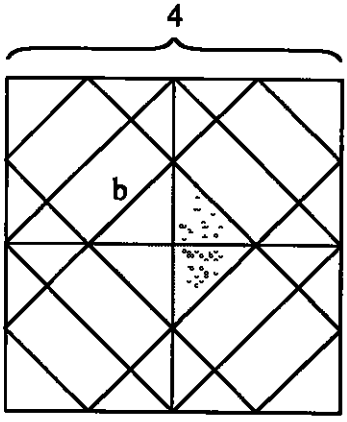
נראה מספר דוגמאות להוראת מתמטיקה באמצעות אוריגמי

דוגמה 1: מכסה מתאים לקופסה

יש להכין מראש גליונות נייר רבועים בפעילות זו מקפלים קופסה ומכסה אשר מתאים לה כלומר, המכסה גדול אך במעט מהקופסה, (הוראת הקיפול, ראו נספח 1)



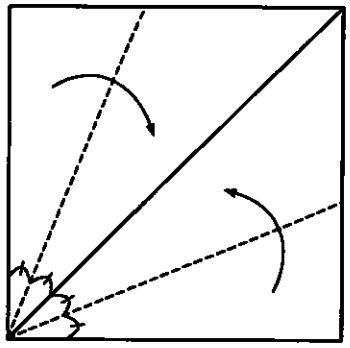
קופסה

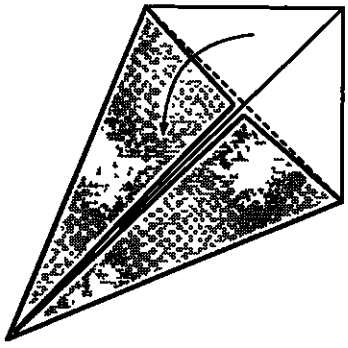


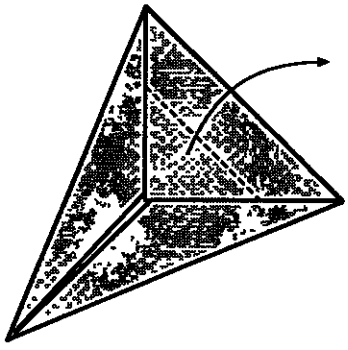
מכסה

דוגמה 2: עורב

יש להכין מראש גליונות נייר רבועים



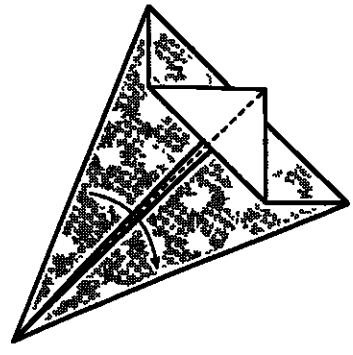




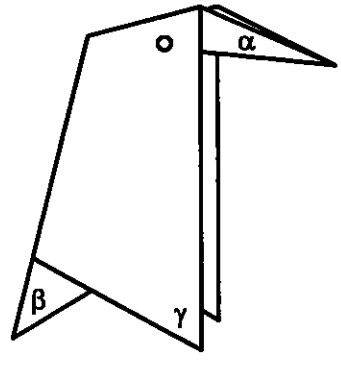
הדיון המתמטי נפתח בהצגת הנושאים והתכונות הגיאומטריות, שבאו לידי ביטוי בשלבי הבנייה השונים. בין נושאים אלה: אלכסון בריבוע, אנך אמצעי לקטע, קטע אמצעים במשולש, חוצה זווית והעברת מקביל לישר נתון.

מדוע מתאים המכסה לקופסה?

בחישוב זה משתמשים בנושא מתמטי נוסף – במשפט פיתגורס



בקיפול העורב אנו מגלים כי זוויות היצירה מקיימות יחס מעניין
$\angle\alpha \cdot \angle\beta \cdot \angle\gamma = 1.2\ 3$

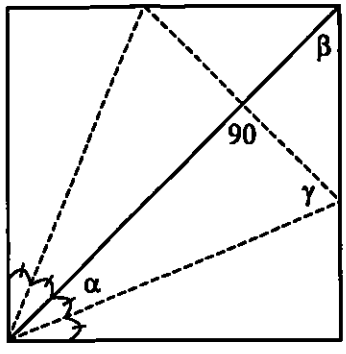


כיצד נוצר יחס זה?
מתוך חציית הזוויות בשלבי הקיפול, אפשר להסיק כי זווית המקור היא בת

$$\angle\alpha = \frac{90^\circ}{4} = 22\frac{1}{2}^\circ$$

ואילו זווית הזנב היא בת

$$\angle\beta = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$



לפי סיכום זוויות במשולש, עולה כי זווית הכנף היא בת

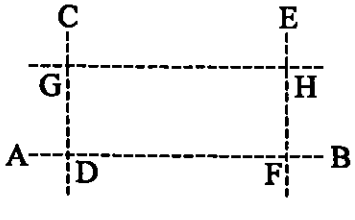
$$\angle\gamma = 180^\circ - (\alpha + 90^\circ) = 67\frac{1}{2}^\circ$$

הנושאים והתכונות בגיאומטריה המשולבים בבנייה זו הם חציית זווית, העברת אנך לישר נתון, תכונות האלכסונים בדלתון, תכונות הריבוע וסכום זוויות במשולש

שתי הדוגמאות דלעיל מתאימות לדרך הוראה שבה התלמידים מקפלים תחילה לפי הוראות נתונות ולאחר מכן נערך דיון על תכונה גיאומטרית שנתגלתה בקיפול הקיפולים המתאימים לדרך זו מאופיינים בכך שהקיפול אינו קשה מדי, אך עדיין דורש הוראות לביצוע, היצירה המקופלת היא צורה מושכת ומוכרת, וכמובן, לצורה זו תכונה גיאומטרית מעניינת
דוגמה 3, המובאת להלן, מתאימה לדרך הוראה שונה

דוגמה 3 בניית מצולעים
התלמידים מקבלים גליון נייר ומתבקשים ליצור מצולע מסוים על-ידי קיפול לאחר מכן, נערך דיון מתמטי בדרך הקיפול הנכונה – שהיא בעצם בנייה מתמטית להלן מספר דוגמאות

בניית מלבן
קיפול זה מתבצע על דף נייר בעל צורה כלשהי
מקפלים על ישר AB כלשהו מקפלים את הנקודות A ו-B על ישר AB ליצירת הישרים CD ו-FH המאונכים ל-AB מקפלים את הנקודה C מעל ישר CD ליצירת GH המאונך ל-CD כעת אפשר לשאול מדוע, על פי בנייה זו, DFHG הוא מלבן כמו כן, אפשר להרחיב ולבדוק תכונות של ישרים וזוויות במלבן, בעזרת קיפול

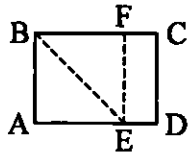


בניית ריבוע

נתון דף מלבני נקפלו כך, שנבנה חוצה זווית (BE) לאחת הזוויות הישרות בקיפול זה, נופלת A על BC בנקודה F, והתקבל

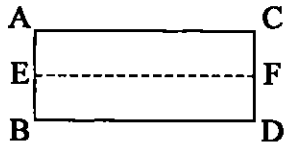
AB = BF נקפל FE מאונך ל-AD כעת אפשר לשאול מדוע, על-פי בנייה זו, ABFE הוא ריבוע

ההוכחה על-ידי בדיקת תכונות של ישרים וזוויות במצולע

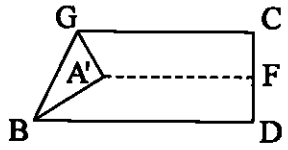


בניית משולש שוה צלעות

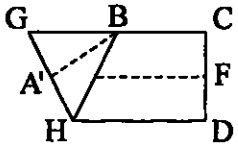
א נקפל נייר מלבני ABCD לאורכו על-ידי קיפול אחת מהצלעות הארוכות יותר על זו המקבילה לה על-ידי כך, קמט EF מהווה אנך אמצעי לכל אחת מהצלעות האחרות (הקצרות יותר)



ב נקפל כך שהנקודה A תיפול על EF בנקודה A' כך, ייווצר הקמט GB העובר דרך B



ג נקפל כך ש-BG יפול על הצלע CG

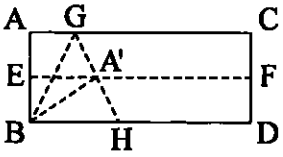


מדוע BGH הוא משולש שווה צלעותי

משלב א עולה כי AE = EB משלב ב עולה כי $AB = BA'$ מכאן, כי ב-$\Delta A'BE$ הזוויות הן בנות $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$, בהתאמה משלב ב רואים ש-GB חוצה זווית $\angle EBA'$ שהיא בת 60°

$\angle GBH = 60^\circ \Leftarrow \angle ABG = 30^\circ \Leftarrow$

משלב ג BG חוצה את זווית $\angle BGH = 60^\circ \Leftarrow \angle AGA'$



באופן דומה אפשר לחקור את בנייתם של משולש שווה שוקיים משושה ומתומן

החומר נכתב על-פי הספרים:

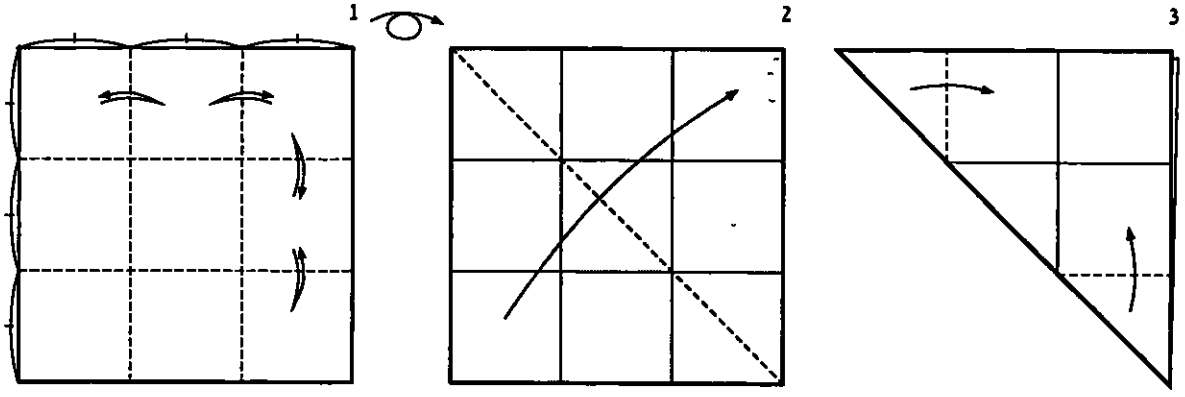
קוניהקו קאסאהארה [1990] קסמי אוריגמי האומנות היפנית של קיפולי נייר הוצאת "לדורי", עמ' 48-49

קוניהקו קאסאהארה [1990] פלאי אוריגמי האומנות היפנית של קיפולי נייר הוצאת "לדורי", עמ' 34-35

Johnson, Donovan A [1957] *Paper Folding* National Council of Teachers of Mathematics

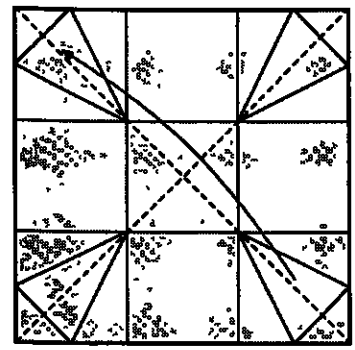
נספח 1

הקופסה

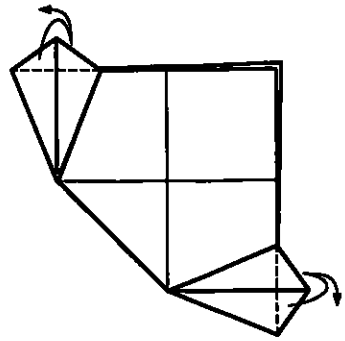


6

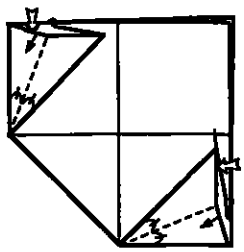
מנקודה זו, קפל שוב כמו בצעדים 3-5



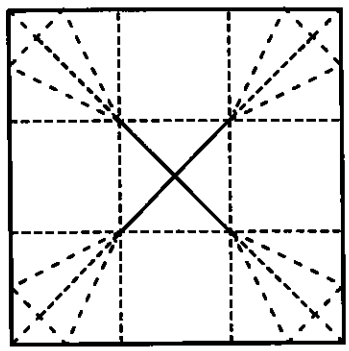
5



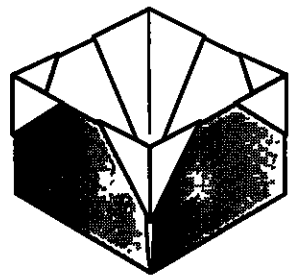
4



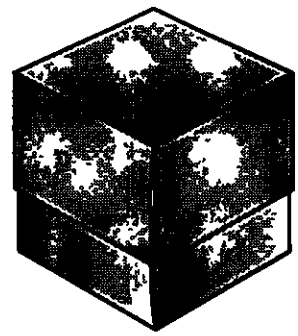
7 הַרכב לצורה הנראית בצעד 8
על יסוד הקימוטים



8



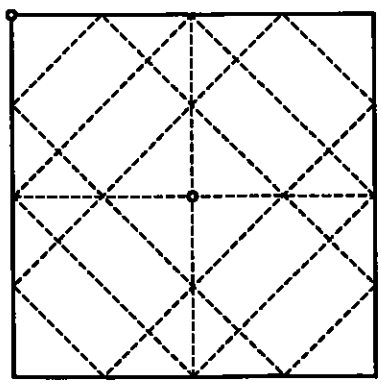
9



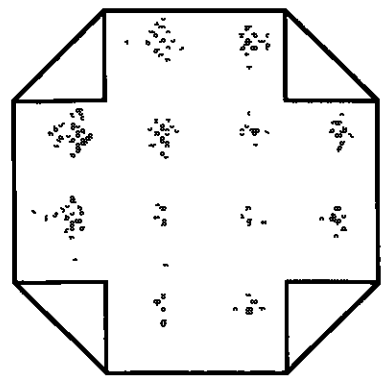
המכסה המתאים בדיוק לקופסה

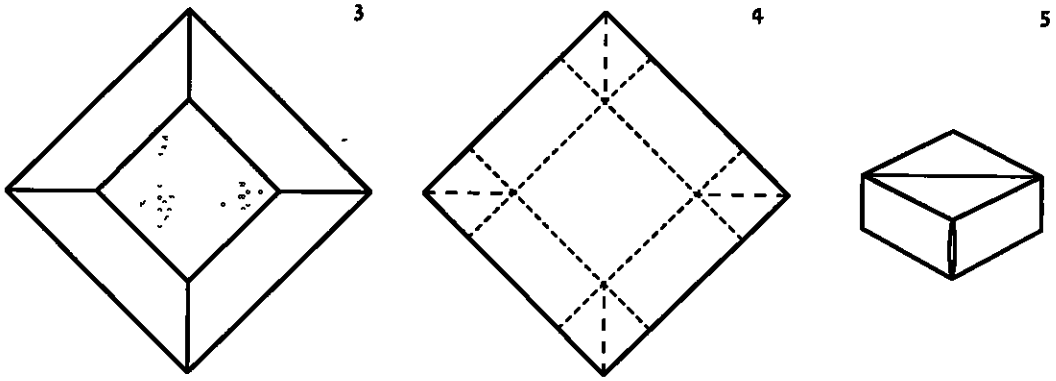
קפלו ופתחו את הקפלים, לסימון הקמטים

1



2





נספח 2

עורב