המושג "מספר אי-רציונלי" אצל תלמידי תיכון ופרחי הוראה[1]

אפרים פישביין, רות יחיעם ודורית כהן
אוניברסיטת תל אביב
עברית **רות יחיעם**

תקציר

שוער, על בסיס ההתפתחות ההיסטורית ועל בסיס פסיכולוגי, כי אצל תלמידים קיימים שני מכשולים אינטואיטיביים עיקריים בהטמעת המושג "מספר אי-רציונלי"

1 הקושי לקבל את העובדה שייתכן כי לשני קטעים אין יחידת מידה משותפת

2 הקושי להבין כי קבוצת המספרים הרציונליים, למרות היותה צפופה בכל מקום, אינה מכסה את כל הנקודות בקטע

בנוסף קיים קושי לקבל את האינסופיות ה"עשירה" יותר של הנקודות האי-רציונליות

כדי לבדוק את קיום המכשולים האלה ואת השפעתם, נבדקו שלוש קבוצות של תלמידים תלמידי כיתה ט, תלמידי כיתה י ופרחי הוראה

תוצאות המחקר לא אישרו את ההשערות אלא גילו היבטים חדשים שלא שוערו בתחילה

תלמידים רבים אינם יודעים למיין את המספרים לקבוצות השונות (רציונליים, אי-רציונליים וממשיים) אך רק מעטים מוטרדים באמת מהמכשולים האינטואיטיביים.

האינטואיציות המוטעות ("תמיד אפשר למצוא יחידה משותפת לשני קטעים על-ידי הקטנתה כרצוננו", ו"לא ייתכן, שבאותו קטע קיימות שתי סדרות אינסופיות שונות של נקודות [או מספרים]") אינן בעלות אופי ראשוני משתמעת מהן התפתחות אינטלקטואלית מסוימת, שכן הן מופיעות אצל תלמידים שלמדו מתמטיקה

מבוא

בשיעורי המתמטיקה בבית הספר, מוקדשת תשומת לב מעטה למספרים האי-רציונליים הסיבה העיקרית, לדעתנו, היא כי המתמטיקה נתפסת כאוסף של טכניקות פתרון

[1] The Concept of Irrational Numbers in High-School Students and Prospective Teachers, *Educational Studies in Mathematics* 29 (1995) 29-44

הרעיון, שהמתמטיקה היא גוף מלוכד של ידע מאורגן בעל אופי קוהרנטי לוגי, אינו מועבר לתלמיד באופן שיטתי זוהי, בוודאי משימה קשה, אך תוכנית הלימודים איננה צריכה להתחמק ממנה היינו רוצים כי תלמידינו יחושו את תחושת הגדלות, את יופיה של המתמטיקה כהישג אנושי בסיסי ולא רק את השימושים המעשיים שלה

ההוראה היומיומית של המתמטיקה בבית הספר, כאוסף של תהליכי פתרון, גורעת מהתדמית של המתמטיקה כגוף ידע שלם ומאורגן, ומורידה לטמיון את כל המאמצים האינסופיים, שהושקעו במשך אלפי שנים כדי ליצור מבנה דינמי מלוכד והרמוני של מושגים, משפטים והוכחות

נראה, כי לא רק לתלמידי בית הספר יש בעיות בעניין זה תוצאות מחקר, שנערך לאחרונה על-ידינו (יחד עם פרופי דינה תירוש), הראו עד כמה מעורפל, בלתי מגובש ולא עקבי חידע המתמטי של פרחי ההוראה, במיוחד זה המתייחס למערכת המספרים (דו"ח מחקר שלא פורסם)

כדי להעביר לתלמידים את התחושה של מבנה במתמטיקה, יש צורך להדגיש את ההיררכיה הקפדנית של מערכת המספרים נגביל דיון זה למערכת המספרים הממשיים

בעברנו מהמספרים הטבעיים למספרים השלמים ומהם למספרים הרציונליים, המונח "מספר רציונלי" מכתיב את המושג המנוגד של "מספר אי-רציונלי" כיצד אפשר לעבור מהמספרים הרציונליים לקבוצת המספרים הממשיים מבלי לתאר את קבוצת המספרים האי-רציונליים?

המספרים האי-רציונליים הם חלק ממערכת המספרים ובלעדיהם המושג של המספרים הממשיים אינו שלם

די בכך שנזניח את המספרים האי-רציונליים וכל המערכת תתפרק זה מה שקורה כיום

מטרת מחקרנו הייתה לבדוק את רמת הידע בנושא המספרים האי-רציונליים אצל תלמידי תיכון ופרחי הוראה מכיוון שתוכנית הלימודים הקיימת לוקה בחסר ואיננה עוסקת במערכת המספרים, שיערנו כי המושגים מספר רציונלי, אי-רציונלי וממשי אינם מוגדרים היטב במוחם של התלמידים, ולמעשה, המושג "מספר אי-רציונלי" מתקשר למספר דוגמאות כמו π או $\sqrt{2}$ ו- $\sqrt{3}$

כמו כן שיערנו שבמושג "מספר אי-רציונלי" יש קושי אינטואיטיבי הנובע משתי סיבות הראשונה, היא הקשר בין אי קיום יחידה משותפת לשני קטעים ובין המספרים האי-רציונליים

כידוע, העובדה שקיימים קטעים שאין להם מידה משותפת הייתה התגלית המפתיעה ביותר בקרב המתמטיקאים בתקופת יוון העתיקה אבל למעשה, רק במאה ה-19, עם פיתוח החתכים של דדקינד וקנטור, קיבלה התיאוריה של המספרים האי-רציונליים ביסוס מלא

אנו משערים שעיכוב זה בהיסטוריה לא נבע רק בגלל קשיים פורמליים, אלא גם בגלל מכשולים אינטואיטיביים למעשה, המספרים האי-רציונליים הם מספרים המנוגדים למודלים האינטואיטיביים הראשוניים שמתם צמח המושג "מספר", שכללו את הרעיון של שקילות של קבוצות דיסקרטיות ומידה
הקושי האינטואיטיבי השני, ששיערנו, מתייחס למשפט עוצמת הרצף גדולה מעוצמת קבוצת המספרים הרציונליים

קורנט רובינס כתבו "לנפש הנאיבית, הדבר ודאי נראה מאוד מוזר ופרדוקסלי שקבוצת הנקודות הצפופה המתאימה למספרים הרציונליים אינה מכסה את כל הישר אין דבר באינטואיציה שלנו שיכול לסייע לנו לראות את הנקודות האי-רציונליות כנפרדות מהרציונליות" (קורנט ורובינס 1978/1944, עמ' 60)

מתבקש כאן הסבר של המונחים "אינטואיציה" ו"תפיסה אינטואיטיבית"
"אינטואיציה" היא סוג של הכרה קוגנטיבית, הכרה ישירה, כפייתית, שאדם מקבל אותה, סובייקטיבית, כאילו היא מובנת מאליה האינטואיציה תלויה בגיל, בניסיון האישי ובהשפעות חברתיות-תרבותיות

כמו כן, האינטואיציה היא בעלת אופי התפתחותי, היא מתפתחת עד גיל מסוים ואחר כך אינה נוטה להשתנות – האינטואיציה מתייצבת (פישביין 1987)

השאלות אשר כיוונו את מחקרינו
1 האם המכשולים האינטואיטיביים הקשורים למספרים האי-רציונליים אי קיום מידה משותפת לשני קטעים והאפשרות כי בקטע יש שתי סדרות אינסופיות שונות של מספרים, מפריעים גם בימינו להבנה של קבוצה זו של מספרים כפי שהפריעו בהיסטוריה של המתמטיקה?
2 האם גיל ורקע מתמטי משפיעים על ההבנה והשימוש במספרים אלו?

מתודולוגיה

- נבדקו שלוש קבוצות תלמידים 30 תלמידים בכיתה ט, 32 תלמידים בכיתה י – כולם מאיזור תל אביב וכן 29 סטודנטים שנה שנייה ושלישית במכללות למורים מאיזור המרכז וירושלים
- כלי המחקר היה שאלון שבדק:
  א את הידע הפורמלי של התלמיד זיהוי המספרים הממשיים, הגדרות וההירככיה של מערכת המספרים הממשיים
  ב את ההבנה האינטואיטיבית של התלמיד לגבי הצפיפות והרציפות של קבוצות המספרים השונות, אופי האינסוף, והבנה אינטואיטיבית של פעולת המדידה
- תהליך העבודה השאלון הועבר בתנאי כיתה רגילים והזמן שניתן היה כשעה אחת

תוצאות

א בשאלה הראשונה הוצגו 15 ביטויים שונים התלמידים התבקשו לקבוע אם הם מהווים מספר ולשייך אותם לקבוצות המספרים השונות נתייחס רק לתוצאות הבולטות ביותר
הסימון (*) מציין תשובה נכונה
קבענו כי תשובה היא "נכונה" או לא נכונה על פי המקובל בקהילה המדעית למרות שאנו ערים לכך כי הבחנה זו היא לא לגמרי ברורה מבחינה פסיכולוגית או מתמטית

א בהתייחס למספר π ("האם הוא מספר?") התקבלו התוצאות הבאות (ראה לוח 1)

לוח 1: התשובות הנכונות והלא נכונות באחוזים

	הוא מספר *	רציונלי	אי-רציונלי *	ממשי *
כיתה ט	43	13	17	3
כיתה י	59	13	19	28
פרחי הוראה	90	7	79	76

תוצאה זו מפתיעה לחלוטין ומוכיחה כי בכיתות ט ו-י רוב התלמידים עדיין אינם מודעים לאופי האי-רציונלי של π רבים אף לא ידעו כי הוא מספר, ובודאי לא שהוא מספר ממשי.

ב המספר $-22/7$ (ראה לוח 2)

לוח 2: התשובות הנכונות והלא נכונות באחוזים

	הוא מספר *	רציונלי *	אי-רציונלי	ממשי *	שלילי *
כיתה ט	70	13	20	7	73
כיתה י	91	31	31	28	84
פרחי הוראה	100	90	10	76	100

שוב אנו רואים כי המונחים רציונלי, אי-רציונלי מספר ממשי לא ידועים לרוב התלמידים בכיתות ט ו-י רוב פרחי ההוראה ענו

נכון, אך היו עדיין 24% שלא יכלו לזהות את 22/7– כמספר ממשי.

ג המספר 0 121221222 (ראה לוח 3)

לוח 3: התשובות הנכונות והלא נכונות באחוזים

0 121221222	הוא מספר •	רציונלי	אי-רציונלי •	ממשי •
כיתה ט	27	13	57	17
כיתה י	81	9	66	44
פרחי הוראה	97	17	69	79

הרבה תלמידים, בכל שכבות הגיל, לא מזהים את 0 121221222 כמספר אי-רציונלי גם ברמת האוניברסיטה, יותר מ-30% נמצאים באותו מצב כמו תלמידי התיכון אופיים של המספרים הממשיים אינו ידוע לרוב תלמידי בית הספר התיכון וליותר מ-20% מפרחי ההוראה

ד המספר $3\sqrt{8}$ (ראה לוח 4)

לוח 4: התשובות הנכונות והלא נכונות באחוזים

	הוא מספר •	מספר שלם •	רציונלי	אי-רציונלי •	ממשי •
כיתה ט	32	10	7	17	10
כיתה י	78	–	13	38	38
פרחי הוראה	97	–	10	86	76

המספר האי-רציונלי $3\sqrt{8}$ זוהה ככזה על-ידי מספר קטן יחסית של תלמידים בכיתות ט ו-י גם 14% מפרחי ההוראה לא זיהו את האופי האי-רציונלי של המספר

הזיהוי של $3\sqrt{8}$ כמספר ממשי דומה, 10% מתלמידי כיתת ט ו-38% מתלמידי כיתה י

בין פרחי ההוראה, 24% לא ידעו ש- $3\sqrt{8}$ הוא מספר ממשי!

ה . 0 0555 (ראה לוח 5)

לוח 5: התשובות הנכונות והלא נכונות באחוזים

0 0555	הוא מספר •	רציונלי •	אי-רציונלי	ממשי •
כיתה ט	83	50	23	13
כיתה י	97	53	25	41
פרחי הוראה	100	97	–	83

בערך חצי מתלמידי כיתה ט או י זיהו את . 0 0555 כמספר רציונלי כמעט כל פרחי ההוראה זיהו זאת גם כן

רבע מתלמידי כיתה ט ו-י חושבים ש- .0 0555 הוא מספר אי-רציונלי רוב תלמידי ט ו-י לא הכירו את . 0 0555 כמספר הממשי

ו המספר $\sqrt{16}$ (ראה לוח 6).

לוח 6: התשובות הנכונות והלא נכונות באחוזים

	הוא מספר •	מספר שלם •	רציונלי	אי-רציונלי •	ממשי •
כיתה ט	60	57	30	–	32
כיתה י	84	56	44	3	59
פרחי הוראה	97	76	69	3	90

פחות ממחצית תלמידי כיתות ט ו-י חשבו ש- $\sqrt{16}$ הוא מספר רציונלי

כמו כן חשבו כל התלמידים (מלבד תלמיד אחד בכל כיתה) ש- $\sqrt{16}$ גם הוא אינו מספר אי-רציונלי

זה מראה שוב, כי עבור רוב תלמידי התיכון (בכיתה ט ו-י) המונחים מספר "רציונלי" ו-"אי-רציונלי" אינם ברורים לחלוטין

המצב בהחלט יותר טוב אצל פרחי ההוראה, אך בכל זאת יש 30% שאינם יודעים לזהות את $\sqrt{16}$ כמספר רציונלי (ולא כאי-רציונלי)

ז 34 2727 (ראה לוח 7)

לוח 7: התשובות הנכונות והלא נכונות באחוזים

34 2727	הוא מספר *	רציונלי *	אי-רציונלי	ממשי *
כיתה ט	83	83	70	13
כיתה י	84	13	56	44
פרחי הוראה	97	59	28	83

ראשית, אפשר לראות כי עבור רוב תלמידי ט ו-י ועבור יותר מרבע פרחי ההוראה .34 2727 הוא מספר אי-רציונלי!

שנית, עבור רוב תלמידי כיתה ט, 34 2727 הוא גם רציונלי וגם אי-רציונלי

שוב רואים כי עבור רוב תלמידי כיתות ט ו-י המונח "מספר ממשי" הוא חסר משמעות

הגדרות

הגדרת מספר רציונלי

התלמידים התבקשו לתת הגדרות של מספרים רציונליים ואי-רציונליים

עבור מספר רציונלי, סיווגנו כנכון רק את ההגדרות הרגילות "מספר שיכול להיכתב כמנה של שני שלמים" או "שבר עשרוני אינסופי מחזורי"

התוצאות שהושגו מראות כי 7% מתלמידי כיתה ט, 28% מתלמידי כיתה י ו-97% מפרחי ההוראה נתנו אחת משתי ההגדרות הללו

17% מתלמידי כיתה ט ו-6% מתלמידי כיתה י לא ענו כלל
שאר התלמידים נתנו תשובות שונות ובלתי נכונות

הטעות הנפוצה ביותר הייתה ההגדרה של מספר רציונלי כ"מספר עשרוני בעל מספר סופי של ספרות" כך הגדירו 40% מתלמידי כיתה ט ו-28% מתלמידי כיתה י

דוגמאות אחרות של תשובות לא נכונות היו "מספר שלם חיובי" וכו'

יחסית הרבה מתלמידי כיתה ט וכמה מתלמידי כיתה י שמרו בהגדרת המספר הרציונלי את החלק העשרוני והוסיפו בצורה לא נכונה את התנאי שצריכים להיות לו מספר סופי של ספרות כמה הדגישו את המונח "חיובי"

מספר שלילי, כפי שכבר הזכרנו, לא מתקבל מבחינה אינטואיטיבית, וכך הוא מתקשר עם האי-רציונליות

שבר עשרוני עם אינסוף ספרות משמעותו ערך שאיננו מושג וגם זה מתקשר בקלות עם אי-רציונליות

תלמידים אלו בודאי אינם יודעים את המובן המדויק של המונ
"מספר אי-רציונלי", הם אינם תופסים את האלגוריתם, שב
שבר עשרוני אינסופי מחזורי יכול להפוך למנה של שני שלמיב
חשוב יותר, הם לא מבינים בבירור, מדוע, בנסיבות מסוימות
מקבלים סמל המייצג מספר שנוגד את התפישה האינטואיטיבי
של קבוצות הניתנות להשוואה ומידה (קיום יחידה משותפת
מושגים שמהם נוצר המושג "מספר"

הם אינם מבינים כל זאת, כיוון שהדבר מנוגד לאינטואיציו
הבסיסית שלהם

הגדרת המספר האי-רציונלי

כפי שציינו, התלמידים התבקשו להגדיר גם את המושג "מספ
אי-רציונלי"

ההגדרות שקיבלנו כנכונות עבור המספר האי-רציונלי הן "מספ
שלא יכול להיכתב כמנה של שני שלמים" או "מספר עשרונ
אינסופי ולא מחזורי"

התוצאות שהתקבלו, מתאימות לחלוטין לאלו שהתקבל
בהגדרת המספר הרציונלי

ענו נכון, בכיתה ט – 14% מהתלמידים, בכיתה י – 5%
מהתלמידים, ובסמינר – 94% מהתלמידים

הטעות הנפוצה ביותר הייתה "מספר אי-רציונלי הוא מספ
עשרוני המכיל מספר אינסופי של ספרות" הרעיון של חוס
מחזוריות אבד

40% מתלמידי כיתה ט, 38% מתלמידי כיתה י ו-3% מפרח
ההוראה נתנו תשובה זו הסבר אופייני, שניתן על-ידי תלמיד
"זאת אומרת, התוצאה אינה מדויקת".

וזה הרעיון אינסוף ספרות (זאת אומרת מספר שלא יכול להיו
מבוטא אף פעם באופן מלא) הוא כשלעצמו הסימן של **אי
רציונליות**

כפי שכבר הזכרנו, האינסוף מקושר באופן אסוציאטיבי עם האי
יכולת להגיע לדיוק, למשמעות מוגדרת, שמהווה באונ
אינטואיטיבי תכונה של מספר

דוגמה אחרת של הגדרה לא נכונה " אשר אינו מספר שלם
(28% מתלמידי כיתה ט) כפי שכבר הזכרנו, באופן אינטואיטיב
מספר נתפס כמספר שלם כל מספר שאינו שלם מתקשר באונ
אינטואיטיבי במחשבתם עם האי-רציונליות

בקיצור, מושג האי-רציונליות נתפס באופן אינטואיטיבי אצ
תלמידי כיתה ט ו-י כקשור למספרים שליליים, מספריו
אינסופיים ומספרים שאינם שלמים

הגדרת המספר הממשי

ההגדרה, שהתקבלה על ידינו כנכונה "מספר ממשי הוא מספ
רציונלי או אי-רציונלי" רק מספר קטן מתלמידי כיתה ט ו-י ענ

נכון 7% מתלמידי כיתה ט, 16% מתלמידי כיתה י ו-79% מפרחי ההוראה ענו נכון

התשובות הבלתי נכונות הנפוצות ביותר בכיתות ט ו-י היו "מספר שלם וחיובי" (40% מתלמידי כיתה ט ו-22% מתלמידי כיתה י) ו-"מספר שלם חיובי או שלילי" (24% מתלמידי ט ו-9% מתלמידי כיתה י) בקרב פרחי ההוראה 11% לא ענו כלל, ו-10% מהתלמידים ענו "כל מספר"

נראה, מכל התוצאות לעיל, כי המונחים "שלם", "רציונלי", "חיובי", "ממשי" מבולבלים בקרב תלמידי התיכון

לדעתנו, חסרה ההבנה הפורמלית המדויקת של המונח "מספר אי-רציונלי" עם כל המבנה המושגי שלו

המונחים "רציונלי", "אי-רציונלי" ו-"ממשי", המחולקים לקבוצות המספרים, יכולים להיות מובנים נכון ובאופן מלא רק כשהם נלמדים כמרכיבי **אותה** מערכת מושגית (שלה צריך, בודאי, להוסיף את המספרים המדומים והמרוכבים) כדי לקבל את התמונה המלאה

אינסוף הנקודות בקטע AB

נשאלה השאלה "נתונות שתי נקודות A ו-B על חישר AB כמה נקודות, המתאימות למספרים רציונלים אפשר להכניס בין A ל-B" שאלה דומה ניתנת לגבי הנקודות האי-רציונליות

בקשר לנקודות הרציונליות, התשובה הנכונה "אינסוף נקודות" ניתנה על-ידי 54% מתלמידי כיתה ט, 50% מתלמידי כיתה י ו-90% מפרחי ההוראה

מעטים מאוד ציינו מספרים סופיים שונים 30% מתלמידי כיתה ט, 34% מתלמידי כיתה י ו-7% מפרחי ההוראה לא ענו כלל

בקשר לנקודות האי-רציונליות, התשובה הנכונה "אינסוף" ניתנה על-ידי 64% מתלמידי כיתה ט, 69% מתלמידי כיתה י ו-97% מפרחי ההוראה

30% מתלמידי כיתה ט, 22% מתלמידי כיתה י ורק סטודנט אחד לא ענה כלל

היחסים בין המספרים הרציונליים וציר המספרים

התלמידים נשאלו אם המשפט הבא הוא נכון "לכל נקודה על ציר המספרים מתאים מספר רציונלי"

התשובה הנכונה הייתה בבירור "לא" תשובה נכונה זו ניתנה על-ידי 40% מתלמידי כיתה ט, 47% מתלמידי כיתה י ו-66% מפרחי ההוראה במיוחד עבור הסטודנטים, יש להתייחס לתוצאות כאל תוצאות לא טובות

היחסים בין המספרים האי-רציונליים וציר המספרים

השאלה שנשאלה הייתה "האם המשפט הבא נכון לכל מספר אי-רציונלי מתאימה נקודה על ציר המספרים" התשובה הנכונה ("כן") ניתנה על-ידי 63% מתלמידי כיתה ט, 56% מתלמידי כיתה י ו-80% מפרחי ההוראה

המספרים הממשיים וציר המספרים

התלמידים נשאלו אם המשפט הבא נכון "לכל נקודה על ציר המספרים מתאים מספר ממשי" התשובה הנכונה ("כן") ניתנה על-ידי 37% מתלמידי כיתה ט, 63% מתלמידי כיתה י ו-90% מפרחי ההוראה.

ההשוואה בין קבוצת המספרים הרציונליים (Q) לבין קבוצת המספרים האי-רציונליים (J)

התלמידים התבקשו לבחור את המשפט הנכון

א יש ב-Q יותר איברים מאשר ב-J

ב יש ב-J יותר איברים מאשר ב-Q

ג כמות האיברים בשתי הקבוצות שווה

ברור כי התשובה הנכונה היא ב, יש ב-J יותר איברים מאשר ב-Q תשובה זו ניתנה על-ידי 26% מתלמידי כיתה ט, 41% מתלמידי כיתה י ו-59% מפרחי ההוראה

מעטים בחרו בתשובה א, אך הרבה בחרו בתשובה ג, והמשמעות היא כי התלמידים חושבים, שכמות המספרים הרציונליים שווה לכמות המספרים האי-רציונליים (60% מתלמידי כיתה ט, 44% מתלמידי כיתה י ו-41% מפרחי ההוראה) נדגיש, שהסטודנטים בסמינר היו לקראת סיום לימודיהם ולפני התחלת ההוראה בבית הספר

התלמידים התבקשו להצדיק את תשובותיהם לא יכולנו לצפות לקבל נימוק נכון לתשובה הנכונה, אך היה מעניין ללמוד מההסברים, כיצד התלמידים תופסים את היחסים בין שתי הקטגוריות הללו של המספרים

בקשר לתשובה הנכונה ("יש יותר אי-רציונליים מרציונליים") קיבלנו כמה הסברים סבירים, רק מפרחי ההוראה (34%)

דוגמאות להסברים כאלו הם "Q היא בת מנייה ו-J איננה בת מנייה" "J בעלת קרדינל גבוה יותר"

להלן גם כמה נימוקים לא נכונים אך מעניינים (לתשובות הנכונות) "כי קבוצת האי-רציונליים היא אינסופית" (מה שמרמז כי קבוצת הרציונליים סופית) או "לכל מספר רציונלי יש 9 מספרים אי-רציונליים" תשובות כאלו מעידות על הבלבול הקיים אצל התלמידים

לתשובה הלא נכונה "אותה כמות איברים ב-Q וב-J", קיבלנו יחסית מספר גדול של הסברים הטעויות הנפוצות הן "בין כל שני רציונליים, יש אי-רציונלי אחד, ולהיפך" (50% מתלמידי כיתה ט, 28% מתלמידי כיתה י ו-35% (י) מפרחי ההוראה), "לכל

רציונלי יש מספר אי-רציונלי", או "בשתי הסדרות יש אינסוף איברים"

מכל הדוגמאות הללו, אפשר לראות בבירור כי אצל כל התלמידים, בכל רמות הלימוד (כולל פרחי הוראה), המושגים רציונלי, אי-רציונלי והיחס ביניהם, מבולבלים לחלוטין

הרקע האינטואיטיבי

אחת ההשערות שלנו הייתה כי לתלמידים יש קושי אינטואיטיבי לקבל כי באותו קטע יכולות להיות **שתי** קבוצות אינסופיות של איברים מסוג שונה עלינו להדגיש כי אף תלמיד לא הזכיר קושי זה באופן מפורש כפי שראינו, רוב התלמידים בכל קבוצות הגיל, חושבים כי בקטע AB שעל הקו הישר, יש מספר אינסופי של נקודות רציונליות **וגם** מספר אינסופי של נקודות אי-רציונליות הקושי האינטואיטיבי, ששיערנו בתחילה, לא התגלה בתגובות הנשאלים וההשערה לא אושרה

ההשערה השנייה הייתה כי חוסר היכולת למצוא יחידה משותפת לשני קטעים נוגדת את האינטואיציה נדון ברעיון זה בהמשך שתי שאלות מוקדשות לבעיה זו הראשונה האם תמיד אפשר למצוא, יחידה משותפת עבור שני קטעים AB ו-CD בעלי אורך שונה? (במלים אחרות אם אפשר למצוא קטע שכפולה שלו תכסה את שני הקטעים הנתונים?) השנייה האם אפשר למצוא יחידה משותפת, לאורך צלע הריבוע וגם לאורך אלכסונו?

נתחיל עם השאלה הראשונה התוצאות מראות ש-37% מתלמידי כיתה ט, 50% מתלמידי כיתה י ו-31% מפרחי ההוראה ענו "כן" – וזו תשובה שגויה התשובה הנכונה "זה אפשרי לפעמים", ניתנה על-ידי 27% מתלמידי כיתה ט, 28% מתלמידי כיתה י ו-38% מפרחי ההוראה

התלמידים התבקשו לנמק את תשובותיהם

רק מעטים מבין אלו, שבחרו בתשובה הנכונה – "לפעמים", נתנו נימוק סביר ("רק אם לשני קטעים יש מידה, המבוטאת על-ידי מספר רציונלי" – 3% מתלמידי כיתה ט, 6% מתלמידי כיתה י ו-17% מקרב הסטודנטים)

אלו שענו תשובה לא נכונה ("כן") נימקו זאת על-ידי הטיעון, כי אפשר להקטין את היחידה כמה שרוצים, עד שמוצאים יחידה משותפת לשני הקטעים (24% מתלמידי כיתה ט, 22% מתלמידי כיתה י ו-28% מפרחי ההוראה) תשובה כזו מבטאת בבירור את האינטואיציה, ששיערנו אך בעצם, כפי שאנו רואים, רק **כרבע מהנשאלים** היו בעלי אינטואיציה זו, שהיא לא נכונה מבחינה מתמטית

התשובה "לא", כלומר, שאי-אפשר למצוא יחידה משותפת לשני קטעים, היא דו-משמעית רק מתוך הנימוקים שהתקבלו היה אפשר ללמוד, כי היא מבטאת בדרך כלל, הבנה לא נכונה

ציטוט של חלק מהנימוקים "לא תמיד אפשר למצוא יחידה משותפת כמו שלא תמיד אפשר למצוא מחלק משותף לשני מספרים" האנלוגיה אינה נכונה הסיבות שונות באופן בסיסי 47% מתלמידי כיתה ט, 31% מתלמידי כיתה י ו-17% מקרב פרחי ההוראה ענו תשובות מהסוג "ייתכן כי אורך הקטעים הוא לא מספר שלם" הרבה תלמידים נבוכו מהשאלה, ולא ענו עליה כלל (23% מתלמידי כיתה ט, 41% מתלמידי כיתה י ו-28% מקרב הסטודנטים)

בקצרה, רק תלמיד אחד מכיתה ט, 2 תלמידים מכיתה י ו-3 סטודנטים חשבו, ששני קטעים יכולים להיות ללא יחידת מידה משותפת

הנימוק שניתן על-ידי תלמידים אלה היה כאשר מנסים למדוד שני קטעים עם אותה יחידה, ייתכן כי לאחד מהקטעים אין מידה רציונלית

הרעיון של חוסר מידה משותפת לשני קטעים לא הופיע מספיק אצל רוב התלמידים וכמובן גם הרעיון שהמספרים האי-רציונליים הם ביטוי מספרי לעובדה שאין מידה משותפת לשני קטעים הסיבה המרכזית היא בודאי, שבשיעורי המתמטיקה בבית הספר לא לומדים בצורה שיטתית מושגים ורעיונות אלו אך מצד שני, נראה שרוב התלמידים לא מופתעים מהעובדה שיש זוגות של קטעים שהם ללא מידה משותפת (בהתאם לציפיותינו)

אותה בעיה הקשורה לאי קיום יחידה משותפת לשני קטעים הוצגה בשאלת היחס שבין צלע הריבוע ואלכסונו "האם אפשר למצוא יחידה משותפת לצלע ואלכסון הריבוע?" התשובה הנכונה ("אף פעם") ניתנה על-ידי 30% מתלמידי כיתה ט, 16% מתלמידי כיתה י ו-49% מקרב פרחי ההוראה

התשובה הנכונה נומקה נכון רק על-ידי 3% (תלמיד אחד) מכיתה ט ו-י, ועל-ידי פרחי ההוראה שענו נכון (זאת אומרת כמחצית הסטודנטים)

הנימוק הנכון הוא "נניח שאורך צלע הריבוע היא יחידה אחת שהיא מספר רציונלי, אזי אורך האלכסון הוא $\sqrt{2}$, שהוא מספר אי-רציונלי"

אלה שענו תשובות לא נכונות "זה תמיד אפשרי" או "לפעמים" נימקו תשובותיהם בדרכים הבאות "אפשר למצוא מידה משותפת כשרוצים" או "אנו יכולים להקטין את אורך היחידה כרצוננו כדי להשיג יחידה משותפת"

מספרם של אלה שנימקו כך היה קטן יחסית, **בניגוד להשערתנו** 3% מתלמידי כיתה ט, 25% מתלמידי כיתה י ו-17% מקרב הסטודנטים

למעשה, רוב התלמידים לא יכלו למצוא נימוק לתשובותיהם השגויות, או שנתנו נימוקים לא רלוונטיים (94% מתלמידי כיתה ט, 65% מתלמידי כיתה י ו-8% מבין פרחי ההוראה)

הרעיון של חוסר יחידה משותפת, גם כאשר הוא מתייחס לשאלה הספציפית של צלע ואלכסון הריבוע, נשאר לא ברור לרוב תלמידי כיתה ט ו-י ולמחצית פרחי ההוראה **אך רק מעט תלמידים, בניגוד להשערה שלנו, חושבים באופן מפורש, כי אפשר תמיד למצוא יחידה משותפת.**

דבר זה מאשר את מה שנאמר לעיל בקשר לשני קטעים בעלי אורך שונה

כדי לבדוק ממצא זה, אותה שאלה (האפשרות למצוא יחידה משותפת לשני קטעים) נשאלה בכיתה של 60 סטודנטים, המשתתפים בקורס בפסיכולוגיה מחצית הסטודנטים לא ענו כלל בין אלה שענו (29 סטודנטים) רק 6, בניגוד לציפיותינו, ביטאו את הדעה, כי תמיד אפשר למצוא יחידה משותפת 7 תלמידים ענו נכון, כי "הדבר תלוי" שניים מהם הסבירו, בצורה נכונה כי הדבר תלוי בשאלה, אם לאחד הקטעים יש אורך רציונלי

שאר 5 הסטודנטים נתנו דוגמאות נכונות של זוגות קטעים, שעבורם אפשר למצוא יחידה משותפת, וזוגות של קטעים עבורם אי-אפשר למצוא יחידה משותפת

שאר 17 הסטודנטים נתנו תשובות לא רלוונטיות או לא ענו כלל כל התלמידים שענו נכון היו בעלי תואר B A במתמטיקה או פיסיקה

כדי לבדוק לעומק את הרקע האינטואיטיבי הקשור למספרים האי-רציונליים, שאלנו גם את השאלה הבאה נסתכל על הקטע AB (איור 1)

נבחר נקודה M באופן מקרי על הקטע AB
נחצה את הקטע AB ונקבל נקודה C כעת נחצה את הקטע CB, שהוא החלק המכיל את נקודה M שבחרנו, ונקבל נקודה C_1
נמשיך ונחצה בכל פעם את הקטע בו M נמצאת
– האם תהליך החצייה הוא סופי או אינסופי
– האם אחת מנקודות החצייה, שמתקבלות, כשממשיכים את התהליך, תהיה הנקודה M שבחרנו

נתייחס תחילה לחלק הראשון של השאלה "האם תהליך החצייה הוא סופי או אינסופי" התשובה הלא נכונה "התהליך הוא סופי" ניתנה על-ידי 23% מתלמידי כיתה ט, 49% מתלמידי כיתה י ו-10% מקרב הסטודנטים

התשובה הנכונה "התהליך הוא אינסופי" ניתנה על-ידי 77% מתלמידי כיתה ט, 66% מתלמידי כיתה י ו-90% מקרב הסטודנטים

עבור התשובות "סופי", הנימוקים היו "הקטע AB הוא מוגבל", "לאחר מספר חציות ייגמר המקום, ולא יהיה מקום לנקודות אחרות"

עבור התשובות "אינסופי", הנימוקים היו "משום שלנקודות אין כל מימד, אז אפשר לחצות עוד ועוד", "אין דבר כזה כמו 'מספר אחרון', כל מספר אפשר לחלק ואת התוצאה לחלק שוב", "כי המרחק בין שתי נקודות באינסוף שואף לאפס, אך לא מגיע אף פעם לאפס"

בקשר לחלק השני של השאלה "האם תתלכד אחת מנקודות החצייה עם הנקודה M", קיבלנו את התוצאות הבאות 63% מתלמידי כיתה ט, 62% מתלמידי כיתה י ו-38% מקרב פרחי ההוראה ענו בחיוב (אם ממשיכים לחצות את הקטע, תהיה התלכדות)

מצד שני, 27% מתלמידי כיתה ט, 16% מתלמידי כיתה י ו-14% מקרב פרחי ההוראה ענו בשלילה

התשובה הנכונה "לפעמים" ניתנה על-ידי 10% מתלמידי כיתה ט, 19% מתלמידי כיתה י ו-45% מקרב הסטודנטים

הנימוקים לתשובה הלא נכונה ("תהיה התלכדות בין נקודות החצייה ונקודה M") היו
"אפשר לחצות כל קטע עד אינסוף, כך שבשלב מסוים נקודת החצייה תיפול על M"
"משום שלבסוף M תהיה נקודת חצייה של איזה שהוא קטע"
"נקודת החצייה האחרונה תיפול על M"
"אני בדקתי, זה נופל על M"

לתשובה הלא נכונה "הם לעולם לא יתלכדו", היו מעט מאוד נימוקים לא ברורים, כמו "בין כל שתי נקודות יש אינסוף נקודות אחרות, ולכן M אינה בהכרח האמצעית" או "הסיכוי, כי נקודת החצייה תתלכד עם M, שואף לאפס"

לתשובה הנכונה "לפעמים" היו מעט מאוד נימוקים קבילים רק תלמיד אחד בכיתה י ו-6 סטודנטים להוראה ענו "הדבר תלוי אם הנקודה M היא רציונלית או אי-רציונלית" בקיצור עבור רוב תלמידי כיתות ט ו-י, אחת מנקודות החצייה תגיע לנקודה M, משום שהתהליך הוא אינסופי

בקשר לפרחי ההוראה, 45% מהם ענו נכון "לפעמים", אך רובם, לא יכלו לנמק את תשובתם (24%), או שנתנו תשובות לא רלוונטיות נזכיר, כי במחקר קודם בקשר לאינסוף, 88% מתלמידי כיתה ט ענו בחיוב על התלכדות נקודות החצייה עם הנקודה M (פישביין, תירוש והס 1979, עמ' 19)

המסקנה הכללית, אשר אפשר להסיק מנתונים אלו, מאשרת את מה שמצאנו עד עתה, בקשר למושג "מספר אי-רציונלי" ו"נקודות אי-רציונליות" **התלמידים שנחקרו לא היו בעלי רקע אינטואיטיבי, שעליו אפשר לבנות את המושג "מספר האי-רציונלי".**

גם בקרב פרחי ההוראה, אשר למדו באופן שיטתי על מספרים ממשיים ואי-רציונליים, רק 6 סטודנטים מתוך 29 הבינו, כי

נקודה, שהיא אי-רציונלית היא נקודה, שאף פעם לא יגיעו אליה על-ידי תהליך חלוקה מתמשך של קטע לחלקים שווים

הערות מסכמות

המחקר הנוכחי היה צריך לבדוק בצורה אובייקטיבית את הידע הקשור למספרים אי-רציונליים של תלמידי תיכון ופרחי הוראה
ההערה הבסיסית היא שלימודי המתמטיקה בבית הספר אינם עוסקים בלימוד השיטתי של המבנה ההיירכי של קבוצות המספרים השונות – אשר קבוצת המספרים האי-רציונליים מהווה חלק בלתי נפרד מהם

למעשה רוב תלמידי התיכון וחלק מפרחי ההוראה אינם מגדירים נכון את המושגים "מספר רציונלי", "מספר אי-רציונלי" ו"מספר ממשי"

כמו כן ישנם תלמידים שאינם יודעים לזהות נכון מספרים כמו שלמים, רציונליים, אי-רציונליים וממשיים (ראה גם הרכבי 1987) במיוחד, המושג "מספר אי-רציונלי" מבולבל אצל מרבית התלמידים

המונח "אי-רציונלי" נקשר עם המספרים ה"לא שלמים", המספרים העשרוניים האינסופיים, ולפעמים עם המספרים השליליים וכו׳

כמו כן תלמידים רבים אינם מוטרדים מההבדל בין השברים העשרוניים האינסופיים המחזוריים והלא מחזוריים השימוש היומיומי במונח "אי-רציונלי" תורם לבלבול זה

בקשר לרקע האינטואיטיבי, הופתענו לגלות, שהתלמידים, באופן כללי, לא נדהמו מהעובדות א שקטעים יכולים להיות ללא יחידה משותפת, ב שבקטע יש אינסוף מספרים רציונליים ואינסוף מספרים אי-רציונליים

באופן כללי, בניגוד להשערותינו בתחילת המחקר כי הבנת המושג "מספר אי-רציונלי" נתקלת במכשולים אינטואיטביים טבעיים, אשר מקשים על הבנת וקבלת המספר האי-רציונלי, אפשר לראות על פי ממצאי המחקר, שמכשולים כאלה קיימים, אך הם אינם בסיסיים וטבעיים כפי ששיערנו הם מרמזים על התפתחות אינטלקטואלית ומופיעים כתוצאה טבעית של התפתחות כללית יותר של האינטליגנציה

המלצות לימודיות

אנו חושבים כי זה חמור, שתוכנית הלימודים במתמטיקה לבתי הספר בחטיבת הביניים ובתיכון, אינה מספקת ידע בסיסי על מערכות המספרים לדעתנו המושגים "מספר טבעי", "מספר רציונלי", "מספר אי-רציונלי" ו"מספר ממשי", צריכים להילמד באופן מפורש ושיטתי אינו מתייחסים רק לידע הטכני בלבד, להגדרות ולתהליכי הפתרון, אנו מתייחסים גם לבעיות המועלות על-ידי הרקע האינטואיטיבי, אשר בלעדיו המתמטיקה היא רק שלד

בקשר לחוסר היחידה המשותפת של שני סדרי גודל, היינו רוצים, שהתלמידים **יתמודדו עם הקושי** של קבלת העובדה כי לשני קטעים אולי אי-אפשר למצוא יחידה משותפת, ואפילו קטנה ביותר כלומר, שבתהליך חלמידה לא נתעלם מהקושי, אלא נתמודד עמו׳

בקשר לאינסופיות של המספרים הרציונליים והאי-רציונליים, היינו רוצים שהתלמידים יהיו מודעים לכך, כי קשה לקבל מבחינה לוגית פשוטה ומבחינה אינטואיטיבית, שבקטע אפשר למצוא אינסוף איברים מסוג מסוים, ולמרות זאת, אפשר להוסיף באותו קטע אינסוף של איברים מסוג אחר יתר על כן אפשר לקבל רמות שונות של אינסוף

היינו רוצים, שהתלמידים יבינו באופן לוגי ובאופן אינטואיטיבי את היחסים ההדוקים בין אי קיום יחידה משותפת ובין הביטוי המספרי של עובדה זו – קבוצת המספרים האי-רציונליים

אנו משערים שמשפט כמו "כל סדרה מתכנסת a_1, a_2, a_3 של מספרים רציונליים מגדירה מספר ממשי", יכול לקבל משמעות, אם מבינים תחילה את הסתירות האינטואיטיביות שכבר הוזכרו, ואחר כך לומדים את הכלים המתמטיים, שבעזרתם מתגברים על סתירות אלו

כיצד יכול מישהו להבין את הרעיון, כי מספר אי-רציונלי הוא הגבול של סדרה רציונלית, אם למושג "אינסוף" אין עדיין משמעות מתמטית?

במחקר זה לא נגענו בהגדרות מורכבות ומסובכות יותר, כמו "חתכי דדקינד", מכיוון שהם מופשטים מדי כדי לטפל בהם בתוכנית הלימודים של בתי הספר

אך כדי להעניק להגדרות של דדקינד, מאוחר יותר, משמעות אמיתית, הרקע האינטואיטיבי של המספרים האי-רציונליים, עם הסתירות המהותיות שלו, צריך להיות ברור

רשימת הספרות

Arcavi, A , M Bruckheimer, and R Ben-Zwi [1987] "History of Mathematics for Teachers", *For the Learning of Mathematics* 7 (2) 18-23

Courant, R and H Robbins [1944/1978] *What is Mathematics?* Oxford, Oxford University Press

Fischbein, E [1975] *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children* Dordrecht, D Reidel

Fischbein, E [1978] *Intuition in Science and Mathematics An Educational Approach* Dordrecht, D Reidel

Fischbein, E , D Tirosh and P Hess [1979] "The Intuition of Infinity", *Educational Studies in Mathematics* 10 30-40