הוראת אנליסה ברמה של 3 י"ל:
התנהגות פונקצית מנה סביב נקודת אי-הגדרה

מאת: שושנה הלוי, רחל סילבצקי ואנה ספרד

נושא נקודת אי-הגדרה (אנליסה, 3 יחידות לימוד, סעיף 6.9) הוא אחד החידושים של תוכנית המתמטיקה לחטיבה העליונה. מהניסיון שצברנו במשך כמה שנות הוראה למדנו, כי על-ידי טיפול נכון בפונקציות בעלות תחום בלתי קשיר, ניתן להביא את התלמיד לסינתיזה ולהבנה מעמיקה יותר של כל נושא החקירה. ואומנם, תלמיד המיישם את טכניקות החקירה באופן מכני ובלתי מבוקר, ייכשל בשרטוט הגרף של פונקציה בעלת נקודות אי-הגדרה. הדבר יאלץ אותו לבחון מחדש את ידיעותיו.

כל הפונקציות שבהן עסקנו עד כה היו בעלות תחום ק ש י ר - תחום חסר "חורים" (כגון קטע, קרן או הישר הממשי כולו), שניתן לשרטטו בלי לנתק את העיפרון מן הדף. למעשה, ברוב המקרים דנו בפונקציות המוגדרות לכל מספר ממשי. מכיוון שהיו אלה פונקציות רציפות (ואף גזירות בכל תחומן), גם את הגרף שלהן ניתן היה לשרטט במשיכת קולמוס אחת. בחקירת הפונקציות הסתמכנו על תכונתן זו בלי לומר זאת במפורש. הדבר בא לידי ביטוי ב"טישטוש" ההבדל העדין שבין עלייה בנקודה (תכונה מקומית) לבין עלייה בתחום (תכונה גלובלית). אנו אומרים, כי f ע ו ל ה ב נ ק ו ד ה x , אם בסביבה מסויימת של x מתקיים: $f(x) > f(c)$ לכל $x > c$ ו $f(x) < f(c)$ לכל $x < c$. למדנו שאם $f'(x) > 0$, אז f עולה ב x. אנו אומרים, כי f ע ו ל ה ב ת ח ו ם A אם בתוך A הערכים של f עולים בעת גידולו של x. עד כה, מתוך חיוביות הנגזרת בכל נקודות של תחום מסויים הסקנו מיד, שהפונקציה עולה בתחום זה (במובן הגלובלי). מעולם לא נאמר לתלמיד, כי מסקנתנו זאת היא נכונה רק בזכות היות התחום קשיר. עתה, כשנעסוק בפונקציות שתחומן אינו קשיר, נתקן את התפיסות המוטעות שהיו עלולות להתפתח בעקבות השימוש בהנחות סמויות.

כדי לנצל במלואו את הפוטנציאל החינוכי הטמון בנושא של נקודות אי-הגדרה, תיכננו את דרך הוראתו בקפידה רבה. מאמץ מיוחד הושקע בבחירה של סדרת דוגמאות שבעזרתן נוכל להבהיר את הבעיה על כל היבטיה. את הדוגמאות היה לבנות בזהירות, כדי להתאימן לרמה של תלמידי 3 יחידות, המתקשים בחישובים אלגבריים וחסרים כל ניסיון בהתרת אי-שוויונים לא לינאריים.

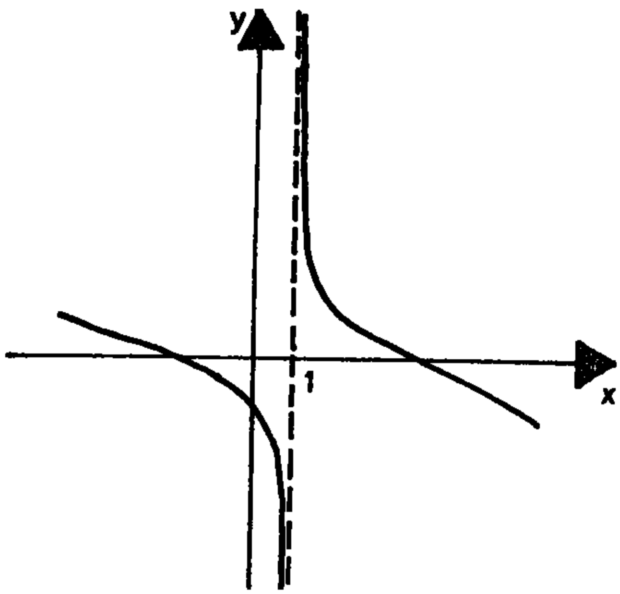
הפונקציה הראשונה שאנו מציגות לתלמיד היא פשוטה יחסית. זוהי הפונקציה $f(x) = 1/(x - 1)$, חסרת נקודות קיצון ובעלת נקודת אי-הגדרה אחת בלבד. המשימה היא לשרטט גרף של פונקציה זו. בשלב זה של הלימוד יש כבר לתלמיד הרגלי עבודה קבועים: תחילה הוא מוצא את תחום ההגדרה (לפעולה זו לא הייתה עד כה משמעות רבה, שכן כמעט כל הפונקציות הנחקרות היו מוגדרות על הישר הממשי כולו); לאחר מכן הוא מחשב את נגזרת הפונקציה.

כאשר מתברר כי f אינה מוגדרת בנקודה $x = 1$, אנו מבקשות להכין מערכת צירים ולשרטט בה בעיפרון צבעוני את הישר $x = 1$. זאת כדי להדגיש, כי התחום מורכב הפעם משתי קרניים נפרדות. אנו דורשות שמערכת צירים תשורטט תמיד ב ת ח י ל ת ת ה ל י ך ה ח ק י ר ה. הדבר חשוב במיוחד כאשר תחום הפונקציה הנחקרת א י נ ו קשיר. כל מידע נוסף שיצטבר בהמשך החקירה יוצג מיד באופן גרפי בתוך מערכת הצירים שהוכנה מראש. בצורה זו התלמיד יוכל לבקר את פעולותיו ולעמוד בכוחות עצמו על רוב טעויותיו, שכן כל סתירה במסקנות החקירה תתגלה כשיתברר כי אין גרף התואם את הממצאים. אנו עוברים עתה אל בדיקת נגזרתה של f: $f'(x) = -1/(x - 1)^2$. התלמידים מסיקים מצורתה (קבוע במונה), כי ל f אין נקודות קיצון. (אגב, לא פעם הבחנו בכך שהתלמידים משוכנעים כי ל f אין נקודות קיצון עוד לפני שגזרו את הפונקציה. הם מנמקים את השערתם בכך, שהמונה של f הוא קבוע. הם סבורים, ככול הנראה, שבמקרה זה גם המונה של הנגזרת חייב להיות קבוע - והרי במצב זה אין פיתרונות למשוואה $f'(x) = 0$. כדי להעמיד אותם על טעותם אנו מציגות פונקציה כגון $g(x) = 1/(x^2 - 1)$, בעלת מקסימום בנקודה $x = 0$). בדוגמה שלנו אין צורך בהתרת אי-שוויונים כדי להבחין שהפונקציה יורדת בכל נקודות תחומה: מכנה הנגזרת חיובי לכל $x = 1$, לכן הנגזרת שלילית תמיד, בהתאם לסימנו של המונה.

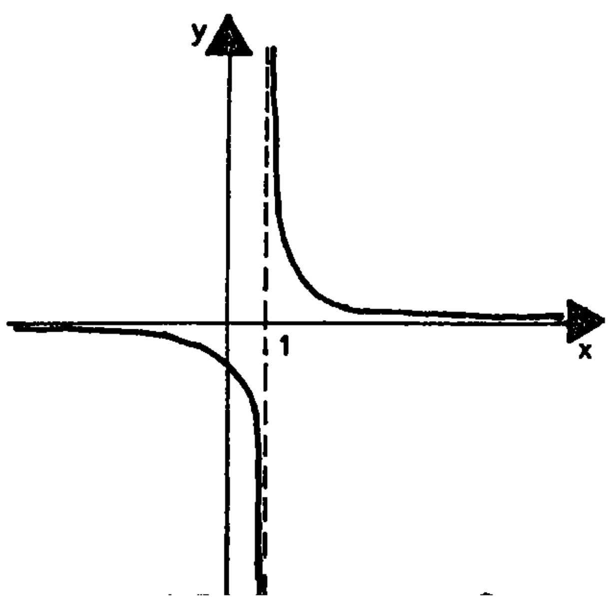
על התלמיד להבין כעת, כי חייבים לחקור את הפונקציה בכל אחד מחלקי התחום בנפרד. כדי לעזור לו להגיע למסקנה זו, אנו מציעות לערוך טבלת ערכים, הכוללת את הנקודות $x = 0$ ו $x = 2$. התלמיד רואה מיד, כי למרות שליליותה של הנגזרת, ערכי הפונקציה אינם יורדים בהכרח בעת עלייתו של x: $f(2) > (0)$! התופעה שנתגלתה מראה, כי טכניקות החקירה שלנו אינן עוברות את "מחסום" נקודות אי-הגדרה: תוקפן מוגבל לחלקים קשירים של התחום. מעתה, לא נדבר עוד על עלייה (או ירידה) בתחום כולו, אלא נדון בכל אחד ממרכיביו הקשירים של התחום לחוד; וכשנגלה נקודות "חשודות", נקפיד לבדוק את טבען על-ידי הצבת נקודות מסביבה קטנה, שאינה כוללת בתוכה נקודות אי-הגדרה.

השאלה הבאה היא, כיצד מתנהגת הפונקציה בסביבה של נקודת אי-הגדרה. בעזרת מחשבון אנו בונים טבלת ערכים של f בנקודות המתקרבות ל 1 משני צדיה (0.9, 0.91, 0.92,... ו 1.1, 1.09, 1.05, 1.001,...). אנו יכולים גם לנתח באופן "תיאורטי" את התנהגות השבר $1/(x - 1)$ כאשר ערך המכנה שואף לאפס. כל

אלה יביאו אותנו למסקנה, כי ערכי הפונקציה שואפים ל $-\infty$ משמאל ל 1, ול ∞ מימין ל 1. כלומר, הם אינם "עוצרים" סתם ליד נקודת אי-הגדרה (בעזרת הפונקציה $(x^2 - 4)/(x - 2)$ אפשר להראות, כי גם מצב כזה הוא אפשרי). בשלב זה אנו מוכנים לשרטט סקיצה ראשונה של הגרף. ברור עתה, כי הוא מורכב משני ענפים נפרדים:



את הסקיצה שרטטנו ביד חופשית. מכיוון שהמידע על f שאספנו עד כה היה דל יחסית (לכאורה, קל יותר לעבוד עם פונקציות בעלות נקודות קיצון), ייתכן שהתמונה שקיבלנו אינה מדוייקת. ואומנם, בדיקת נקודות חיתוך עם ציר ה x תאלץ אותנו לשנות את השרטוט. למשוואה $f(x) = 0$ אין פיתרונות, לכן לא ייתכן שהגרף יחתוך את ציר ה x. רואים, כי למרות שענפי הגרף הם קווים יורדים, אין הם עוברים לצידו האחר של הציר. זה מביא אותנו למסקנה, כי שני הענפים מתקרבים בהתמדה לישר (או ישרים) מאוזן מסויים. טבלת ערכי הפונקציה בנקודות "רחוקות" מן הראשית (100, 200,... ו 100-, 200-) מראה, כי הישר הנידון הוא ציר ה x עצמו. הגרף המתוקן ייראה כך:



כדי להמחיש יותר את חשיבותה של בדיקת נקודות החיתוך עם הצירים, אפשר להביא פונקציה כגון $y = 1 + x/(x^2 + 1)$, המוגדרת תמיד (טוב להזכיר, כי לא לכל פונקציה רציונלית יש נקודות אי-הגדרה) ומתקרבת לישר $x = 1$ רק לאחר קבלת ערכים קיצוניים מסויימים.

בהמשך הלימוד אנו עוסקות בפונקצית מורכבות יותר, שכל אחת מהן מאירה היבט נוסף של הבעיה:

* $y = (x - 1)/x^2$, בעלת נקודה "חשודה" שהיא גם נקודת אי-הגדרה;
* $y = (x^2 - x)/(x - 1)$, שהגרף שלה הוא ישר $y = x$ עם "חור" ב $x = 1$;
* $y = 1/(x - 1)^2$, פונקציה זוגית, השואפת ל ∞ משני הצדדים של נקודת אי-הגדרה;
* $y = 1/(x^2 - 4)$, בעלת שתי נקודות אי-הגדרה (ולכן הגרף שלה מתפצל לשלושה ענפים נפרדים);
* $y = 1/\cos x$, פונקציה מחזורית, בעלת אין-סוף נקודות אי-הגדרה.

לסיכומו של הנושא אנו עוסקות בפונקציה $f(x) = x(x + 2)/(x^2 - 9)$, בעלת גרף מגוון, שלא ניתן לציירו בלי להבין את טכניקות החקירה לעומקן.