# היסטוריה

# סיפורו של המספר e[1]

**אלי מאור**
תרגום מאנגלית סוזי שפירא וזיוה שחם

המתמטיקאי הסקוטי התמהוני ג'ון נפייר (Napier) נולד ליד אדינבורג בשנת 1550, פרוטסטנט אדוק ומתנגד נלהב למוסד האפיפיורות נפייר פרסם בשנת 1593 את דעותיו התיאולוגיות בספר "גילוי פשוט של התגלותו המלאה של סנט ג'ון", שזכה להצלחה יוצאת דופן, ואשר בו טען, בין היתר, שהאפיפיור הוא האנטי-כרייסט (הרוח הרעה) נפייר היה גם בקי בעניינים צבאיים, ונתפס ללא ספק לחשש הכללי שהמלך פיליפ השני מספרד עומד לפלוש לאנגליה נפייר הגה תכניות לבניית מראות עצומות למיקוד אור השמש כך שיוכלו להצית את ספינות האויב, רעיון המזכיר את תכניותיו של המתמטיקאי היווני ארכימדס להגנת סירקוז במאה השלישית לפנה"ס הוא תכנן מתקן ארטילריה המסוגל "לטהר שדה בהיקף של 4 מייל מיצורים חיים שגובהם עולה על רגל", מרכבה בעלת "לוע מתכתי נע" אשר "תזרע הרס לכל עבר", ואפילו מתקן "להפלגה מתחת למים, עם צוללנים ותכסיסים אחרים לפגיעה באויבים" – כל אלה קדמו לטכנולוגיות צבאיות מודרניות לא ידוע אם אכן נבנו מכונות הרס כלשהן פרי תכנונו

אולם אם שמו של נפייר מעוגן בהיסטוריה הרי זה לא בזכות ספרו רב-המכר או כושר ההמצאה המכני שלו פרסומו מתבסס, על רעיון מתמטי מופשט שפיתח במשך עשרים שנה הלוגריתם כפי שלומדים בשיעורי אלגברה, הלוגריתם של מספר נתון הוא החזקה, או המעריך, שאליו יש להעלות מספר קבוע (הבסיס) כדי לקבל את המספר הנתון לדוגמה, הלוגריתם של 100 לפי בסיס 10 הוא 2, שכן $10^2$ שווה ל-100

עד לפני שנים ספורות, לימוד הלוגריתמים היה חלק חשוב מתכנית הלימודים באותם הימים – זמן רב לפני הופעת מחשבוני הכיס – השימוש בטבלאות לוגריתמיות היה חיוני לכל מי שרצה ללמוד מתמטיקה גבוהה יותר כמה שנואות היו אותן טבלאות, בכריכתן הירוקה, אשר הונפקו על-ידי משרד החינוך' שועממנו עד מוות בפתרון מאות תרגילים ובתקווה שלא דילגנו על שורה ושלא התבוננו בטור הלא-נכון הלוגריתמים שהשתמשנו בהם נקראו פשוטים, הם השתמשו במספר 10 כבסיס, דבר אשר אכן נראה פשוט וגם טבעי למדי אולם הטבלאות הכילו גם עמוד אשר נשא את הכותרת "לוגריתמים טבעיים" כאשר שאלתי כיצד יכול להיות משהו טבעי יותר מאשר לוגריתמים לפי בסיס 10, השיב לי המורה שבמתמטיקה גבוהה יותר נעשה שימוש במספר מיוחד, המצוין על-ידי האות e, כבסיס המספר e, כך אמר, הוא בן-דודו של $\pi$ ושווה בקירוב ל-2 71828 הביטוי העשרוני שלו הוא אינסופי ואינו חוזר על עצמו אכן לוגריתם טבעי משונה

המושג "גבול" הוא אחד המושגים הבסיסיים ביותר באנליזה המתמטית והוא מרכזי להבנת e לפי הגדרתו הפשוטה ביותר, e הוא הגבול של הביטוי $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ כאשר n שואף לאינסוף מה משמעות הדבר? יהיה n גדול ככל שיהיה, הערכים של $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ יתכנסו לערך כלשהו בסביבת המספר 2.71828, שהוא e כאשר n שווה ל-1, אזי $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ שווה ל-2 כאשר n שווה ל-2, אזי $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ שווה ל-2.25 כאשר n שווה ל-100,000, אזי $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ שווה ל-2 71827

תמצית המושג "גבול" היא שסדרה יכולה להתקרב לגבול עד כמה שנרצה אך לעולם לא תוכל להגיע לגבול עצמו (אלא אם, כמובן, הערך הגבולי מוכנס שרירותית לתוך הסדרה) הרעיון

[1] המאמר הנוכחי עובד על פי ספרו החדש The Story of a Number באדיבותה של הוצאת Princeton University Press

מזכיר את אחד הפרדוקסים המפורסמים שפותחו על-ידי הפילוסוף היווני זנו (Zeno) מאילאה (Elea) במאה החמישית לפנה"ס פרדוקס הרץ כדי להגיע מנקודה A לנקודה B, על הרץ להגיע תחילה לנקודת האמצע בין A ל-B, אחר כך לנקודת האמצע של המרחק הנותר, וכך הלאה עד אינסוף היות שהתהליך כולל מספר אינסופי של צעדים, טען זנו, הרץ לעולם לא יגיע ליעדו היוונים, אשר לא הבינו את המושג "אינסוף", לא יכלו לתפוס את הרעיון שהסכום האינסופי $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+.$ מתכנס לגבול הסופי 1

המספר e היה ידוע למתמטיקאים כבר בזמנו של נפייר ייתכן מאוד שהמספר הופיע לראשונה בהקשר של הנוסחה לריבית דריבית נניח שברשותכם דולר אחד ואתם מוכנים להשקיעו בבנק שמשלם ריבית של 6% בסוף השנה היתרה שלכם תהיה $1 06 בנק שני, אומר שהוא יעלה על הראשון הוא ישלם לכם ריבית של 3% בסוף שישה חודשים, ואת 3% הנותרים ישלם בסוף השנה על הכסף שנזקף לזכות חשבונכם במחצית הראשונה של השנה כך תהיה יתרתכם $1 03 בתום ששת החודשים הראשונים, ו-$1 03 פלוס 3% מ-$1 03 בסוף ששת החודשים הנותרים – סך של $1 0609, ללא ספק עסקה טובה יותר בנק שלישי מוכן לשלם ריבית של 1 5% בכל רבעון שם רווחי הריבית דריבית מביאים אתכם לכ-$1 0613 בסוף השנה

באופן כללי, אם תשקיעו דולר אחד בשיעור ריבית שנתית r (כאשר r מבוטא כשבר עשרוני, לדוגמה 0.06 עבור 6%) ואם הריבית מחושבת n פעמים בשנה, אזי היתרה שלכם בסוף השנה תהיה $\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n}$ מישהו – לא ידוע מי או מתי – הבחין כנראה בעובדה המעניינת הבאה אם r הוא 1 (100%) ואם נותנים ל-n לגדול ללא גבול, אזי סכום הכסף שיורווח, בדולרים, ישאף לגבול 2 718, כלומר ל-e תגלית זו – שהייתה מן הסתם תצפית ניסיונית ולא תוצאה של היסק מתמטי קפדני – הפתיעה ללא ספק את המתמטיקאים של תחילת המאה ה-17, אשר עדיין לא הכירו את המושג גבול.

מרכזי ככל שיהיה המספר e למתמטיקה ולתחום חכספים, תכונותיו המשונות משפיעות בצורה משמעותית גם על מגוון רחב של תחומים שהם הרבה מעבר למתמטיקה, החל מפיסיקה וביולוגיה ועד לאמנות ולמוסיקה ברצוני לתאר חלק מאותה רב-צדדיות על-ידי חקירת כמה מהאירועים אשר הובילו להבנה המתמטית של שתי העקומות שבהן משחק e תפקיד בולט, ההיפרבולה והספירלה הלוגריתמית.

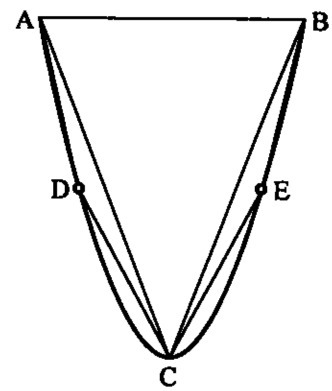
השימוש בתהליך הגבול כדי להגיע לתוצאות על אודות עצמים רגילים סופיים, מתקשר בדרך כלל עם לימודי החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי (חדו"א), וכזה – הוא קשור בצורה הדוקה לשמם של אייזק ניוטון (Newton) ובן-זמנו הגרמני גוטפריד וילהלם לייבניץ (Leibniz) ניוטון ולייבניץ המציאו, כל אחד באופן עצמאי, את החדו"א בין השנים 1665 ו-1675, והמחלוקת על קדימות המצאתם היא שם דבר בדברי ימי המדע אולם יישום תהליך הגבול חוזר עוד לימי היוונים

התעסקות אחת של היוונים הייתה ידועה בשם **תרבוע** (quadrature או squaring) – מציאת שטחה של צורה סגורה במישור המלה "תרבוע" מתייחסת לאופי הבעיה לבטא את השטח של צורה כלשהי במונחים של יחידות שטח – כלומר ריבועים משמעות הדבר עבור היוונים הייתה שאת הצורה הנתונה היה צריך להפוך לצורה שוות ערך אשר את שטחה אפשר למצוא מתוך עקרונות בסיסיים כדוגמה פשוטה, נניח שאנו רוצים למצוא את שטחו של מלבן בעל צלעות a ו-b אם לאותו מלבן שטח זהה לזה של ריבוע בעל צלע x, אזי $x^2 = ab$ ולכן x חייב להיות שווה לשורש הריבועי של ab תוך שימוש בסרגל ובמחוגה, אפשר בקלות לבנות קטע שאורכו שווה לשורש הריבועי של ab כך אפשר "לתרבע" כל מלבן שהוא בצורה דומה, עבור כל מקבילית וכל משולש אפשר לבנות מלבן בעל שטח זהה בעזרת סרגל ומחוגה תהליך התרבוע של מצולע כלשהו נובע מיד, שכן אפשר תמיד לפרק מצולע למשולשים

בין הבעיות היותר מרתקות – ובמקרים אחדים הבלתי-פתירות – של המתמטיקה נמצאת בעיית התרבוע של עקומות אחד הניסיונות המוקדמים והמוצלחים ביותר לעשות זאת בוצע על-ידי ארכימדס הוא הוקסם על-ידי הפרבולה – העקומה המתקבלת, בקירוב, על-ידי אבן שנזרקת באוויר הפרבולה מופיעה במגוון יישומים צלחות לוויין הן בעלות חתך פרבולי, כמו גם משטחי ההחזרה המוכספים שבפנסי המכונית ייתכן שהעניין שגילה ארכימדס בפרבולה נובע מהיישום הצבאי שאותו, כך אומרים, הגה זמן רב לפני נפייר היכולת להחזיר קרני אור ולרכזם בנקודה יחידה, המוקד

ארכימדס מצא את שטחו של "קטע" פרבולי על-ידי חלוקתו לסדרה של משולשים הולכים וקטנים אשר שטחיהם מהווים סדרה גיאומטרית (ראה איור 1) על-ידי המשכת הסדרה הצליח ארכימדס להתקרב לשטח הפרבולה עד כמה שרצה – תוך מיצוי הצורה, לכאורה כאשר חיבר ארכימדס את שטחי המשולשים הבודדים, הבחין ששטחם הכולל מתקרב ל-$\frac{4}{3}$ משטחו של

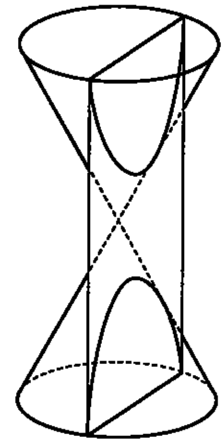
המשולש הראשון בסדרה (המשולש ABC בציור) הגישה שלו נקראת שיטת המיצוי (exhaustion)




איור 1

אולם ארכימדס נזהר לנסח את הפתרון שלו במונחים של סכומים סופיים בלבד – ומסיבה טובה כתוצאה מנקודת המבט הסטטית של היוונים, הם האמינו שלכל הגדלים הגיאומטריים יש ערכים קבועים אולם המושגים גבול ואינסוף, מעצם טבעם, דורשים טיפול בערכים משתנים, מה שמצריך מידה רבה של מיומנות אלגברית – אשר חסרה ליוונים, למרות שהם ידעו מעט אלגברה בסיסית כתוצאה הם התחמקו מהאינסוף, ואף חששו ממנו

למרות הצלחתו עם הפרבולה, לא הצליח ארכימדס ליישם את שיטת המיצוי שלו על ההיפרבולה הפרבולה וההיפרבולה, ביחד עם האליפסה והמעגל, מהווים את משפחת חתכי החרוט, הנקראים כך משום שאפשר לקבל את כולם על-ידי חיתוך חרוט מעגלי על-ידי מישור בזוויות שונות ההתעניינות בחתכי החרוט התחדשה במאה ה-17, תחילה כאשר האסטרונום הגרמני יוהנס קפלר (Kepler) קבע שכוכבי לכת, כוכבי שביט וגופים אחרים סובבים סביב השמש במסלולים אליפטיים, ומאוחר יותר כאשר גילה ניוטון שגופים אלו עשויים גם לנוע במסלולים פרבוליים והיפרבוליים



איור 2

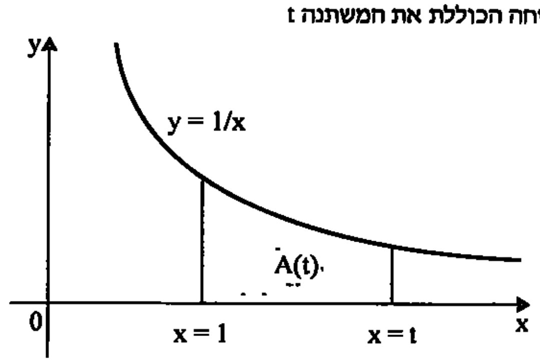
במקרה של ההיפרבולה, לחרוט הנדון יש שני חלקים, כאילו שגביע גלידה אחד עומד הפוך על משטח וגביע שני ניצב בשיווי משקל על קדקודו של הראשון (ראה איור 2) היפרבולה מתקבלת כאשר הזווית בין מישור החיתוך לבין בסיס החרוט גדולה מזו שבין הקו היוצר של החרוט לבין הבסיס יתרה מכך, להיפרבולה יש זוג קווים ישרים המתקשרים אליה, שהם שני קווים המשיקים לה "באינסוף" כאשר נעים לאורך כל אחד מענפי ההיפרבולה מהמרכז החוצה, מתקרבים יותר ויותר לאותם קווי גבול ישרים, אך לעולם לא מגיעים אליהם. שני ישרים אלה הם האסימפטוטות של ההיפרבולה (אסימפטוטה – מהמילה היוונית שמשמעותה "לא נפגשים")

במאה ה-17, כאשר הפכו חתכי החרוט לנושא שיש בו עניין, חידשו המתמטיקאים את ניסיונותיהם למצוא את שטח ההיפרבולה ההיפרבולה, בניגוד לאליפסה ולמעגל, אינה עקומה סגורה כל אחד משני ענפיה ממשיך לאינסוף לכן כדי לתקוף את בעיית התרבוע יש לתבהיר תחילה למה הכוונה במילה "שטח"

איור 3 מראה ענף אחד של ההיפרבולה $xy = 1$

האסימפטוטות שלה הן צירי ה-x וה-y בעצמם העקומה מתקרבת לצירים, אך לעולם לא נוגעת בהם. על ציר ה-x מצוינת נקודה קבועה $x = 1$ ונקודה שרירותית $x = t$

השטח מתחת להיפרבולה מוגדר כשטח של התחום המוגבל על-ידי הגרף של $xy = 1$, ציר ה-x והקווים האנכיים $x = 1$ ו-$x = t$ ערכיו המספריים של שטח זה תלויים, כמובן, בבחירת $t$, לכן בעיית תרבוע ההיפרבולה מסתכמת בהבעת השטח כנוסחה הכוללת את המשתנה $t$




איור 3

בתחילת המאה ה-17 ניסו מתמטיקאים שונים לפתור בעיה זו ביניהם יש לציין את דה פרמה (Fermat) ורנה דקרט (Descartes), אשר, יחד עם בלייז פסקל (Pascal) היוו את שלישיית המתמטיקאים הצרפתית הגדולה בשנים שקדמו להמצאת החדו"א. אולם דווקא אחד מבני-זמנם הפחות ידועים

– גרגואר דה סנט-ונסנט (de Saint-Vincent), נזיר ישועי בלגי – הוא זה שמצא את הפתרון

סנט-ונסנט בילה את רוב חייו המקצועיים בפתרון בעיות תרבוע הוא הצליח להראות שהיחס בין t לבין השטח שמתחת להיפרבולה הוא יחס לוגריתמי היה זה אחד מתלמידיו של סנט-ונסנט, אלפונסו אנטון דה סרסה (Anton de Sarasa), אשר ניסח יחס זה בצורה מפורשת כ- $A = \log t$ (A מציין את שטח האזור הצבוע באיור) וכך הפך לראשון שאי-פעם עשה שימוש בפונקציה הלוגריתמית (עד אז, הלוגריתמים נתפסו בעיקר ככלי חישובי)

כך נעשה לבסוף תרבוע ההיפרבולה, כ-2,000 שנים לאחר שהיוונים תקפו את הבעיה לראשונה אולם נותרה עדיין שאלה אחת למרות שהנוסחה $A = \log t$ נותנת את השטח מתחת להיפרבולה במונחים של המשתנה t, כדי שהנוסחה תהיה מעשית עבור חישובים מספריים היה צורך בבסיס עבור הלוגריתם כפי שהתברר, בסיס זה הוא המספר e

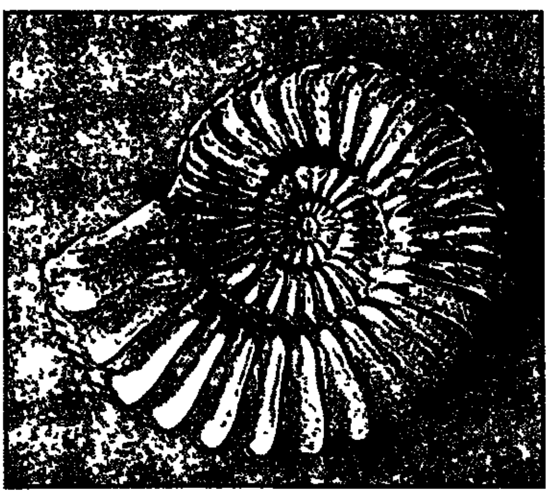
אף עקומה, כך נראה, לא היוותה גורם משיכה כה חזק עבור מדענים, אמנים וחוקרי צמחים ובעלי חיים כמו הספירלה הלוגריתמית אולם כדי לחקור את הספירלה היה צורך לפתח כלי מתמטי אחר חשוב השימוש בקואורדינטות קוטביות היה זה הרעיון של דקרט למקם נקודה כלשהי P במישור על-ידי ציון מרחקיה משני קווי ייחוס (צירי ה-x וה-y) – אולם אפשר גם למקם את P על-ידי ציון מרחקה r מנקודה קבועה O, המכונה קוטב, והזווית $\theta$ בין הקו OP וציר ה-x שני המספרים r ו-$\theta$ הם הקואורדינטות הקוטביות של P, בדיוק כפי ש-x ו-y הם הקואורדינטות הקרטזיות שלה.

ניוטון, בספרו *Method of Fluxions and Infinite Series* הזכיר קואורדינטות קוטביות כאחת מבין שמונה מערכות קואורדינטות המתאימות לתיאור עקומות ספירליות אולם היה זה בן-זמנו של ניוטון יעקוב ברנולי (Bernoulli) – בן למשפחה יוצאת דופן של מתמטיקאים שוויצריים, המזכירה את משפחת באך המוסיקלית – אשר עשה לראשונה שימוש נרחב בקואורדינטות קוטביות

משימתו הראשונה של ברנולי הייתה לנסח את תכונותיהן של עקומות שונות – שיפועיהן, עקמומיותן, אורך הקשת, השטח וכו׳ – במונחים של קואורדינטות קוטביות כיום זוהי משימה קלה, אשר ניתנת כתרגיל חובה בקורס חדו״א שנה א אולם בזמנו של ברנולי היה זה בגדר כיבוש קרקע בתולה

המעבר לקואורדינטות קוטביות אפשר לברנולי לחקור מספר רב של עקומות חדשות, והוא עשה זאת בהתלהבות רבה העקומה החביבה עליו הייתה הספירלה הלוגריתמית משוואתה היא $\log r = a\theta$, כאשר a הוא קבוע ו-log הוא הלוגריתם הטבעי או ההיפרבולי, כפי שנקרא אז (כיום המשוואה נכתבת בדרך כלל במהופך, $r = e^{a\theta}$) אם מסרטטים את המשוואה $r = e^{a\theta}$ בקואורדינטות קוטביות, אזי העקומה המתקבלת היא ספירלה לוגריתמית הקבוע a קובע את קצב הגידול של הספירלה אם a חיובי, המרחק r מהקוטב גדל עם הסיבוב נגד השעון, דבר המוביל לספירלה שמאלית, אם a שלילי, r קטן ומתקבלת ספירלה ימנית שתי העקומות הן לכן תמונות ראי זו של זו

התכונה החשובה ביותר של הספירלה הלוגריתמית היא הדמיון העצמי שלה סיבוב הספירלה במידות שוות מגדיל את המרחק מהקוטב ביחסים שווים, כלומר, בסדרה גיאומטרית בטבע אפשר לראות תכונה זו בבירור בקונכיית השבלול חדרי הקונכייה הם שכפולים מדויקים זה של זה וגודל החדרים מהווה סדרה גיאומטרית



**איור 4**

כאשר נעים לאורך הספירלה מנקודה קבועה כלשהי P כלפי פנים, יש לבצע מספר אינסופי של סיבובים לפני שמגיעים לקוטב אולם, באופן מפתיע, המרחק הכולל לאורך העקומה הוא סופי עובדה מדהימה זו נתגלתה בשנת 1645 על-ידי הפיסיקאי האיטלקי אוונג׳ליסטה טוריצ׳לי (Torricelli), תלמידו של גליליאו

עובדה מרשימה נוספת על אודות הספירלה הלוגריתמית היא שהיא נראית זהה בכל הכיוונים ליתר דיוק, כל ישר העובר דרך המרכז (הקוטב) חותך את הספירלה בדיוק באותה זווית לכן הספירלה הלוגריתמית ידועה גם כספירלה שוות הזווית (equiangular) תכונה זו מקנה לספירלה את הסימטריה

המושלמת של המעגל, אכן היא ספירלה לוגריתמית עבורה זווית החיתוך בין העקומה לבין הקרניים דרך הקוטב, היא תמיד בת תשעים מעלות, וקצב הגידול שלה הוא אפס

מה שהלהיב ביותר את ברנולי בספירלה הלוגריתמית היה, שהיא נשמרת ללא שינוי גם לאחר הפעלת רוב הטרנספורמציות הגיאומטריות ניקח, לדוגמה, את האינוורסיה נקודה P אשר הקואורדינטות הקוטביות שלה הן r ו- $\theta$, מועתקת לנקודה Q בעלת קואורדינטות קוטביות $\frac{1}{r}$ ו- $\theta$ בדרך כלל צורתה של עקומה משתנה בצורה דרסטית כאשר היא עוברת אינוורסיה, לדוגמה, ההיפרבולה הופכת ללמניסקט (lemniscate) – עקומה המזכירה את הספרה 8 מונחת על צדה השינוי הדרסטי אינו מפתיע, מאחר שהמעבר מ-r ל- $\frac{1}{r}$ משמעותו שנקודות הנמצאות קרוב לקוטב מועתקות לנקודות מרוחקות ממנו ולהיפך אולם לא כך הדבר עם הספירלה הלוגריתמית המעבר מ-r ל- $\frac{1}{r}$ רק משנה את המשוואה $r = e^{a\theta}$ למשוואה $r = \frac{1}{e^{a\theta}} = e^{-a\theta}$, אשר הגרף שלה הוא תמונת ראי של הספירלה המקורית

בדיוק כפי שהאינוורסיה מעתיקה עקומה נתונה לחדשה, כך אפשר לקבל עקומה חדשה על-ידי בניית מה שקרוי האבולוט (evolute) של העקומה המקורית נתאר לעצמנו שבכל נקודה ונקודה של העקומה הנתונה, העקמומיות של העקומה (באותה נקודה) ניתנת בקירוב על-ידי מעגל רדיוס העקמומיות בכל נקודה מוגדר כרדיוס של אותו מעגל האבולוט של העקומה הוא המסלול המתקבל על-ידי מרכזי העקמומיות כאשר נעים לאורך העקומה בדרך כלל האבולוט הוא עקומה חדשה, שונה למדי מן העקומה היוצרת אותה אולם כפי שגילה ברנולי לשמחתו הרבה, הספירלה הלוגריתמית היא האבולוט של עצמה הוא גילה גם שעקומת הדוושה (pedal) של ספירלה לוגריתמית – המקום הגיאומטרי של ההיטלים הניצבים מהקוטב למשיקי עקומה נתונה – היא שוב אותה ספירלה ואם לא די בכך, ברנולי מצא כי ה-caustic של ספירלה לוגריתמית – המעטפת הנוצרת על-ידי קרני אור היוצאות מהקוטב והמוחזרות על-ידי העקומה – הוא שוב באותה ספירלה

כה נרגש היה ברנולי מתכונות אלו שהוא פיתח הערצה כמעט מיסטית כלפי עקומתו האהובה "מאחר שספירלה מדהימה זו, מתוך מוזרות ייחודית ומופלאה יוצרת תמיד ספירלה דומה לעצמה, בעצם אותה ספירלה עצמה, ולא חשוב עד כמה מורכבת או מפותחת, או משוקפת או מוחזרת אפשר להשתמש בה כסמל, הן של חוזק ויציבות בזמן מצוקה, והן של הגוף האנושי, אשר גם לאחר כל השינויים בו, אפילו לאחר המוות, יחזור לעצמיותו המדויקת והמושלמת "

הוא קרא לספירלה הלוגריתמית *spira mirabilis* (הספירלה המופלאה) הוא ביקש שספירלה לוגריתמית תיחרט על אבן המצבה שלו בלוויית הציטטה "*Eadem mutata resurgo*" (למרות השינוי שבי, אקום ללא שינוי) – במסורת הארכימדאית (לפי האגדה, ביקש ארכימדס שכדור החוסם גליל ייחרט על קברו) רצונו של ברנולי קוים – כמעט בין אם מתוך בורות או פשוט כדי להקל על עצמו, חקק בונה המצבות ספירלה ארכימדאית במקום לוגריתמית (בספירלה ארכימדאית, או ליניארית, כל סיבוב מגדיל את המרחק מהקוטב בהפרש קבוע ולא ביחס קבוע, חריצי הצליל של תקליט אריך-נגן לדוגמה, יוצרים ספירלה ליניארית) מבקרי הסטיו של קתדרלת בזל יכולים עדיין לצפות בתוצאה, אשר ללא ספק הייתה גורמת לברנולי להתהפך בקברו

בזכות צורתה מלאת החן, הייתה הספירלה הלוגריתמית מוטיב קישוטי נפוץ מאז הזמן העתיק, ולמעט, אולי, המעגל, היא מופיעה בטבע יותר מכל עקומה אחרת, כמו במקרה של קונכיית השבלול בעבודתו הקלאסית משנת 1917 "על צמיחה וצורה" (On Growth and Form) דן חוקר הצמחים ובעלי החיים הסקוטי ד'ארסי ו תומפסון (Thompson) בפירוט רב בתפקיד הספירלה הלוגריתמית במספר רב של צורות טבעיות – קונכיות, קרניים, שיני פיל וחמניות לאלו אפשר להוסיף את הגלקסיות הספירליות, אותם "איי עולמות" אשר אופיים המדויק לא היה ידוע עדיין בזמנו של תומפסון.

בתחילת מאה זו התעורר שוב העניין באמנות היוונית ויחסה למתמטיקה תיאוריות של אסתטיקה נפוצו בשפע, והיו מלומדים אשר ניסו לתת למושג "יופי" ניסוח מתמטי דבר זה הוביל לגילויה מחדש של הספירלה הלוגריתמית בשנת 1914 פרסם תיאודור אנדריאה קוק (Cook) את ספרו "עקומות החיים" (The Curves of Life) המוקדש לספירלה ולתפקידה באמנות ובטבע ספרו של ג'יי המבידג' (Hambidge) "יסודות הדינמיקה הסימטרית" (Elements of Dynamic Symmetry) אשר ראה אור בשנת 1926, השפיע על דורות של אמנים אשר שאפו ליופי ולהרמוניה מושלמים עבור המבידג', העיקרון המוביל היה יחס הזהב, היחס שבו יש לחלק קטע נתון כך שאורכו הכולל של הקטע יתייחס לחלק הארוך כמו שהחלק הארוך מתייחס לחלק הקצר ערכו של יחס זה הוא 1 618 בקירוב

אמנים רבים מאמינים שמכל המלבנים, זה אשר היחס בין אורכו ורוחבו הוא יחס הזהב הוא בעל המידות היפות ביותר מכאן

הופעתו של יחס הזהב בארכיטקטורה, כפי שמודגם במקדשים יווניים רבים מתוך כל "מלבן זהב" אפשר לקבל מלבן זהב חדש שאורכו הוא הרוחב של המלבן המקורי אפשר לחזור על התהליך שוב, דבר המוביל לסדרה אינסופית של מלבני זהב ששטחם הולך וקטן עד לאפס מלבנים אלה חוסמים ספירלה, "ספירלת הזהב", שבה השתמש המבידג' כמוטיב שלו

אחד המלומדים שהושפעו מרעיונותיו של המבידג' היה אדוורד בי אדוורדס (Edwards), שספרו "תבניות ועיצובים בעזרת סימטריה דינמית" (Pattern and Design with Dynamic Symmetry), אשר יצא לאור בשנת 1932, מציג מאות דוגמאות קישוטיות המבוססות על מוטיב הספירלה מסעות כאלו לנבכי האסתטיקה המתמטית חוזרים בסופו של דבר למספרים $\pi$ ו-e

חשבו על כך מתוך אינסוף המספרים הממשיים, אלה החשובים ביותר למתמטיקה 0, 1, $\sqrt{2}$, e ו-$\pi$ – נמצאים בטווח של ארבע יחידות זה מזה על ישר המספרים צירוף מקרים מדהים? פרט שולי בתכניתו של הבורא? אתן לקורא להחליט