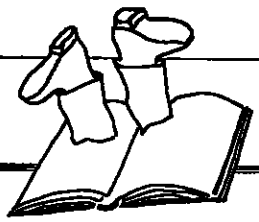


עיון ומחקר

השפעת רמת הקושי של משפט מתמטי על ודאות בהוכחה, בפיתוח החשיבה המתמטית של תלמידי תיכון[1]

אלחנן גזית
תיכון ע"ש תלמה ילין, גבעתיים

מבוא

שיטת ההוכחה הדדוקטיבית היא אחד המאפיינים של המתמטיקה האחראי לתפקיד המרכזי של המתמטיקה בחשיבה המערבית למרות זאת, לדעת Chazan (1989) הרבה מורים ותלמידים אינם מבינים מדוע המתמטיקאים נותנים חשיבות מרובה כל כך להוכחה נוסף על כך התלמידים אינם מבינים לאשורם את ההבדלים בין טיעונים אמפיריים לטיעונים דדוקטיביים

הוכחה מתמטית דדוקטיבית מאופיינת לדעת Courant (1978) על-ידי שימוש באקסיומות, שהן הנחות יסוד כלליות המתקבלות כנכונות ללא הוכחה, ובמשפטים שכבר הוכחו כנכונים בשלב קודם על סמך אותן אקסיומות, לשם הגעה למסקנה הנובעת מתוך הצגת הנתונים הסקת המסקנות הדדוקטיבית מבוססת על בדיקת הגרירה בהתאם לחוקי הלוגיקה, כלומר אם מתוך ההנחות נובעת המסקנה, ולא אם הנחות היסוד נכונות

ההוכחה הדדוקטיבית היא פורמלית ומדויקת הכוונה שההוכחה היא Rigorous, כלומר סדרה סופית של משפטים במערכת נתונה, כך שכל משפט הוא או אקסיומה במערכת או משפט הגזור לפי הכללים ממשפטים קודמים במערכת

לדעת Battista and Clements (1995) קיים ויכוח בין המורים על מקומה של ההוכחה הדדוקטיבית בלימוד במתמטיקה באופן כללי, ועל הדגש שהיא מקבלת בלימוד הגיאומטריה בפרט חלק מהמורים מצדד בהמשך הדגש על לימוד המערכת האקסיומטית וההוכחה הפורמלית, אחרים סבורים שצריך לנטוש את ההוכחה ולעסוק בחקירות רעיונות גיאומטריים בדרך פחות פורמלית, ויש הטוענים שהתלמיד צריך לעבור באופן הדרגתי מחקירה לא פורמלית להוכחה פורמלית דדוקטיבית

ביסוס הוודאות והתקפות של הוכחה מתמטית

אין ויכוח על כך שביסוס תקפותם של רעיונות הוא קריטי הן למתמטיקאים והן לתלמידים

איך אנשים יוצרים "אמיתות" ואיך הם מוכיחים דברים? Martin and Harel (1989) סבורים שאנשים מחשיבים "הוכחה" בחיי היום-יום, כ"מה משכנע אותי" לעומת זאת, מרבית ספרי הוראת המתיקה כתובים כך, שניתן להבין מהם שהמתמטיקאים משתמשים רק בהוכחה פורמלית דדוקטיבית, בדרך של הסקה לוגית המבוססת על אקסיומות

Hanna (1993) טוענת שהצגת התוצאות המתמטיות בצורה של משפטים והוכחות, גורמת לכך שההוכחה הריגורסית נתפסת בטעות כלבו של העיסוק המתמטי לכן התלמידים מאמינים שלמידת מתמטיקה חייבת לכלול אימון ביכולת ליצור הוכחות באופן ריגורסי הצגה כזו של תוצאות מפריעה לתהליך המנטלי שיוצר את התוצאות אך ההוכחה המדויקת היא משנית בחשיבות בעשייה המתמטית ביחס להבנה ולמשמעות

מבחינת ההתפתחות ההיסטורית של המתמטיקה, נראה שקבלת תיאוריות על-ידי מתמטיקאים היא תהליך חברתי, שעיקרו הסכמה לחשיבותה של התיאוריה הסכמה זו קודמת, בדרך כלל, למתן הוכחות מדויקות יתר כל כן, מושגים מתמטיים וטענות מתמטיות מעוצבות לפני שיש להן הוכחות, ויצירתן נובעת מצורך מעשי או מצורך עיוני לשמו ההוכחה נבחנת בכך שהיא משתלבת במערך המתמטי הקיים ובתרומתה להבנת התיאוריה

---

[1] הוגש כעבודה סמינריונית בסמינריון " מרכיבים אינטואיטיביים של החשיבה המדעית", בהנחיית פרופ' אפרים פישביין, במסגרת הלימודים לקראת תואר שני בחוג להוראת המדעים באוניברסיטת תל אביב

לעתים חבויה בהבנת כלליות ההוכחה תרומה עתידית ביישום התיאוריות המתמטיות במובן רחב יותר

Lakatos (1976) טוען שבתהליך יצירת המתמטיקה בעיות מוצגות, הסברים מנותחים, אנלוגיות נעשות, דוגמאות נגדיות ניתנות והקישורים נבדקים משפט נוצר בתהליך הביקורתי שמנסה להפריך אותו וכאשר התקפות של הרעיונות עונה על שאלה משמעותית

Bell (1976) מציג שלושה שלבים למשמעות המתמטית של הוכחה

א אימות, הצדקה של אמיתות הטענות

ב ההארה לתוך לב העניין של הטיעון, מדוע הוא נכון

ג ארגון התוצאות למסגרת דדוקטיבית של אקסיומות, תיאורמות ומסקנות

לדעתו השיכנוע האישי בנכונות הטענות גדל כתוצאה מתהליכי בדיקה פנימיים ויצירת מנגנון שיפוט הבורר בין קבלת הטענה כנכונה לבין דחייתה לאחר מכן האדם מאפשר לאחרים לבקר את יכולת השיפוט הזו, לא רק בהצגת הכלליות שמצא, אלא גם בהציגו את תקפותה על-ידי הבאתה בצורה של הוכחה פורמלית אצל המתמטיקאי, הבדיקה הפנימית יכולה ללבוש צורה של הוכחה פורמלית כאשר מישהו מנסה לבקר טיעון של מישהו אחר תופעה מעניינת ושכיחה היא זו שקושרת הבנת הוכחה עם הקושי שבה טענה מתמטיקה מכונה "עמוקה" אם ההוכחה שלה קשה חלק מהדברים הגורמים להוכחה להיות עמוקה הם טיעונים לא אינטואיטיביים, רעיונות לא מוכרים, סיבוכיות, שימוש בבניות עזר או אורך שלבי ההוכחה

דפוסי הבנת משמעות ההוכחה בקרב תלמידים

לסיכום אפשר לומר שהצגת תוצאות באופן פורמלי על-ידי הוכחות היא כלי משמעותי ביותר עבור המתמטיקאים המאפשר ביסוס תקפותם של רעיונות אך האם ההוכחה משכנעת את התלמידים?

האם הם רואים בה את הדרך לביסוס הוודאות והתקפות של רעיונותיהם?

מספר מחקרים הראו שבקרב תלמידי תיכון שלמדו גיאומטריה, חשיבה פורמלית כמעט ואינה קיימת כלל Fischbein and Kedem (1982) חקרו כ-793 תלמידי תיכון ומצאו שמרביתם תומכים בצורך בבדיקות אמפיריות נוספות על משפט מתמטי שכבר הוכח, גם אם הסכימו לחלוטין עם המשפט ועם ההוכחה הפורמלית שלו מסקנה זו נמצאה נכונה לא רק לגבי תלמידים שלמדו מתמטיקה ברמה בסיסית אלא גם לגבי תלמידים שלמדו ברמה גבוהה.

כ-40% מכלל התלמידים הסכימו במפורש עם המשפטים המתמטיים שהוצגו ועם ההוכחות שלהם, אבל רק חלק היו עקביים ודחו כל צורך בבדיקה אמפירית נוספת – 8% 10 לגבי גיאומטריה ו-5% 14 לגבי האלגברה בהתייחס רק לנחקרים שהביעו את הסכמתם עם המשפטים וההוכחות (n = 165) נמצא כי 36% מהתלמידים שלמדו מתמטיקה ברמה גבוהה ו-20% מהתלמידים שלמדו מתמטיקה ברמה נמוכה הבינו שאין צורך בבדיקות נוספות כיוון שהוכחה פורמלית מבטיחה מראש את תוקפו המוחלט של המשפט פישביין וקדם מסבירים את ממצאיהם בכך שהתלמיד הרגיל נוטה אינטואיטיבית לפרשנות האמפירית של תקפות ההוכחה באופן טבעי ולא מודע הוא נוטה לחפש תמיכה למשפט על-ידי צבירת כמה שיותר אישורים בעלי משמעות אמפירית

בתגובותיו הגלויות, "על פני השטח", ייתכן שהוא מבחין בבירור בין ההוכחה הפורמלית להוכחה אמפירית אולם, כאשר ניצבות מולו שאלות לא סטנדרטיות בנוגע לתוקפו של משפט שהוכח פורמלית, ייתכן שגישותיו המושרשות עמוק עדיין נטועות בנטייתו לחפש אחר אישורים נוספים רבים ככל האפשר

Chazan (1993) מחלק את השקפות התלמידים, שעלו מתוך ההסברים האמפיריים שלהם לאימות טענות בגיאומטריה, לשתי מערכות של אמונות בעייתיות:

א **עובדה היא הוכחה** – חלק מהתלמידים סבורים שבדיקה אחת, בדיוק כמו כתיבת הוכחה דדוקטיבית, מאפשרת להגיע למסקנות ודאיות הניתנות ליישום והכללה על מספר אינסופי של דוגמאות כך לדוגמה, בניסיון לקבוע ששני משולשים הנוצרים מהעברת התיכון לאחת מצלעות המשולש בעלי אותו שטח תלמידים המחזיקים בתפיסה זו מודדים סדרה של דוגמאות ומהן מסיקים לגבי התוקף האוניברסלי של הטענה בדומה לכך באלגברה, כדי להוכיח שכל מספר טבעי שניצב בנוסחה N^2+N+41 יהיה ראשוני, התלמידים בודקים הרבה דוגמאות ומסיקים מהן על כלליות ותקפות הטענה

Balacheff (1988) הציג שאלה בפני ארבעה-עשר תלמידים גילאי 13-14 התלמידים התבקשו לכתוב את תשובותיהם לחבריהם בני אותו הגיל משקיף מבוגר תקף את תשובותיהם בדוגמאות נגדיות התשובות סווגו לפי קטגוריות לשני סוגים עיקריים של הוכחה.

הוכחות פרגמטיות והוכחות קונספטואליות הוכחות פרגמטיות הן בעלות מבנה של ביצוע או של "להראות" בעוד שהוכחות קונספטואליות הן אלו שלא מערבות פעולה ונשענות על שימוש בנוסחאות ובכל התכונות הניתנות בשאלה והיחסים ביניהן אפשר להבחין בין שני סוגים עיקריים של הוכחות פרגמטיות הוכחה "אמפירית-נאיבית" והוכחה "ניסויית-קריטית"

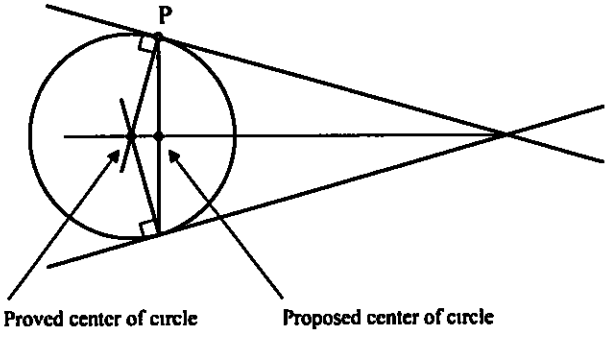
הוכחה "אמפירית-נאיבית" מבוססת על וידוא נכונות של התוצאה לאחר בחינת כמה מקרים, התלמיד סובר שהתבוננות מספיקה כהוכחה הוכחה "ניסויית-קריטית" מתייחסת לניסוי שבו התוצאה מאפשרת בחירה בין שתי השערות Williams (1979) חקר תלמידים בשכבת יא שלמדו גיאומטריה ברמה מתמטית גבוהה לקראת לימודים מתקדמים במתמטיקה, ומצא תפיסות דומות בשאלה מסוימת 68% מהנחקרים האמינו שטיעון אמפירי הוא הוכחה מספקת. רק 4% 6 חשבו שיש צורך בהוכחה דדוקטיבית בפריט אחר שהיה יותר מוכר לתלמידים

מלימודיהם הקודמים נמצאה מגמה דומה 54% קיבלו טענה אמפירית ורק 14% נזקקו להוכחה דדוקטיבית

ב **הוכחה דדוקטיבית כמוה כעובדה פשוטה** – חלק מהתלמידים סבור שהוכחות דדוקטיביות בגיאומטריה הן הוכחות עבור מקרה פרטי, שהוא המקרה הנתון בסרטוט המצורף לבעיה

לדעת Balacheff (1988) הוכחה שלה מצורף סרטוט, מובנת לא נכון על-ידי תלמידים ויוצרת מצב שבו מפורשות הסיבות לנכונות ההנחות בעזרת אופרציות וטרנספורמציות על האובייקט הנתון בסרטוט, בעוד שיש לפרשו לא רק כאובייקט העומד בפני עצמו, אלא כאובייקט המייצג תכונות אופייניות לאותה מחלקה של אובייקטים Williams (1979) טוען שתלמידים האוחזים בעמדה זו אינם מבינים את משמעות עקרון ההכללה של ההוכחה הדדוקטיבית הם לא מבינים שתקפות המסקנה מוכללת לכל הצורות העומדות בתנאים ההתחלתיים של הבעיה המוצגת הוא מצא ש-20% מהתלמידים אינם מבינים שהוכחה דדוקטיבית מוכיחה יחסים לגבי כל המשולשים ורק 31% מהתלמידים הבינו לאשורו את עקרון ההכללה

Schoenfeld (1987) מצא שרוב תלמידי התיכון בשנת לימודיהם הראשונה חושבים באופן "נאיבי-אמפירי" כדוגמה לכך, הוא הציג בפני תלמידי קולג' בעיה יש למצוא את מרכזו של מעגל בתחום בין שני משיקים בשלב ראשון, התלמידים הצליחו להוכיח באופן פורמלי שמרכז המעגל הוא נקודת החיתוך של שני הרדיוסים המאונכים למשיקים עם חוצה הזווית שבין המשיקים לאחר מכן, בסדרת ראיונות אישיים, התלמידים התבקשו למצוא את מרכז מעגל זה על-ידי בנייה גיאומטרית



איור 1

מקומו של מרכז המעגל על-פי ההוכחה של התלמידים ועל-פי בנייתם

נמצא ש-30% מהתלמידים שיערו שמרכז המעגל הוא אמצע הקטע בין שתי נקודות ההשקה ברור שהן ההוכחה הפורמלית והן הידע הרלוונטי, לא הופעלו כנדרש כחלק מהבנייה המוצעת Schoenfeld מתאר זאת כך

"התלמידים יצרו הוכחות נכונות מבחינה דדוקטיבית, לאחר מכן יצרו פתרון לבעיית הבנייה שסתר לחלוטין את התוצאות, שרק לפני רגע, הוכחו כנכונות" (עמ' 340)

במאמר שכותרתו "Intuition and Proof" פישביין (1982) מתאר מערכת של אמונות דומות אם כי לא זהות הוא מצא כי "רק 5% 24 מכלל האוכלוסייה מקבלים את הנכונות של ההוכחה ובאותו זמן שוללים את הצורך בבדיקות נוספות" (עמ' 16) לדעתו תוצאה זו מצביעה על כך שהתלמידים אינם מודעים להבדלים הקיימים בין הוכחה אמפירית להוכחה דדוקטיבית

שלבים בפיתוח החשיבה הפורמלית אצל התלמיד

נשאלת אפוא השאלה, כיצד מפתח התלמיד את היכולת להוכיח את רעיונותיו באופן פורמלי

על פי Piaget (1928) היכולת בבניית ההוכחה מתפתחת כצורך לוגי ונעשית בשלושה שלבים

בשלב ראשון – חשיבת הילד היא לא רפלקטיבית, לא לוגית ולא שיטתית מספר נתונים או דוגמאות נבחנות בנפרד ללא קשר ביניהן

בשלב שני – כדי לנבא תוצאות בעתיד ולהצדיק את נכונותן, התלמיד משתמש **רק** בבדיקות אמפיריות התלמיד חושב באופן לוגי רק לגבי אמונות שהוא מאמין בהן, כשלאט ובאופן הדרגתי הוא מתחיל לקשר בין התוצאות ולהכלילן.

בשלב השלישי – התלמיד עובר מהאמונה שמשהו פשוט תמיד נכון, להסקת מסקנה לוגית שהדבר חייב בוודאות להיות נכון, בעזרת הסקה והכללה דדוקטיבית במסגרת המערכת המתמטית איך תלמיד עובר את השלבים הללו באיזה נקודה עולה הצורך בהצדקה ובוידוא נכונות התוצאה?

"Surely it must be the shock of our thought coming into contact with that of others, which produces doubt and the desire to prove Proof is the outcome of argument" (Piaget 1928 204).

לדעת פיאז'ה, בתהליך התקשורת בין התלמיד לסביבתו, התלמיד נעשה "מודע" להגדרות ולמושגים שבהם הוא משתמש כאשר הוא רוכש לבסוף את החשיבה הפורמלית

Senk (1989) בדקה את חשיבת התלמידים על פי van Hiele שפירק את תהליך פיתוח החשיבה הגיאומטרית של התלמיד לחמישה שלבים שלב ויזואלי, שלב תיאורי / אנליטי, שלב אבסטרקטי / יחסי, שלב פורמלי / דדוקטיבי ושלב ריגורוסי/מתמטי 70% מהתלמידים המתחילים ללמוד גיאומטריה בתיכון נמצאים בשלב החשיבה הראשון לפי van Hiele פחות מ-22% מהתלמידים הנמצאים בשלב זה או בשלב השני שולטים בכתיבה הפורמלית של הוכחות השלב השלישי הוא שלב מעבר שבו 57% מהתלמידים שולטים בכתיבה זו, ורק

בשלב הרביעי אכן רוב התלמידים שולטים בכתיבה הפורמלית של הוכחות

De Villiers (1987) סבור שההוכחה הדדוקטיבית בגיאומטריה מתרחשת לראשונה כשהתלמיד נמצא בשלב השלישי, שבו מתבססת רשת הקשרים הלוגיים בין תכונות למושגים בשביל התלמיד שנמצא בשלב ראשון או השני, הוכחות פורמליות הן **חסרות משמעות** מאחר שהוא רואה זאת כהוכחת המובן מאליו, היות שהוא לא מפקפק בתקפותן של התצפיות האמפיריות

Van Dormolen (1977) טוען כי בשלב הויזואלי מקרים פרטיים מוכחים כנכונים המסקנות מוגבלות לדוגמה הספציפית שלגביה ניתנה ההוכחה בשלב התיאורי/אנליטי ההצדקות והמסקנות נעשות עבור מקרים ספציפיים אבל בהתייחס לכל קבוצת הצורות הדומות רק בשלב השלישי התלמיד יכול להצדיק את המשפטים על-ידי יצירת טיעונים פורמליים

המחקר

בבסיס עבודה זו הייתה המטרה לבדוק כיצד תלמידים תופסים את המשמעות של ההוכחה של משפט מתמטי שכבר הוכח באופן פורמלי דדוקטיבי המטרה העיקרית הייתה לבחון אם קיימים הבדלים בתפיסות אלה בין תלמידים הלומדים מתמטיקה ברמה של 3 יח"ל, לאלה הלומדים מתמטיקה ברמה של 4-5 יח"ל, ובעיקר לבדוק כיצד משפיעה רמת הקושי של המשפט המתמטי שכבר הוכח על הבנת המשמעות של ההוכחה הפורמלית

שאלות המחקר

1 האם תלמיד תיכון הלומד באופן סדיר מתמטיקה מבין לאשורו את התוקף האוניברסלי שמשרה ההוכחה הפורמלית של משפט מתמטי (שכבר הוכח)?
2 האם קיים הבדל בין תלמידים הלומדים מתמטיקה ברמה של 4-5 יח"ל לתלמידים הלומדים מתמטיקה ברמה של 3 יח"ל, בהבנה שההוכחה הפורמלית של טענה מתמטית משרה עליה את התכונה של תוקף אוניברסלי מלכתחילה – ולפיכך מבטלת את הצורך בבדיקות נוספות של המשפט המתמטי (שכבר הוכח)?
3 האם קיים קשר בין רמת הקושי של המשפט המתמטי לבין הבנת תקפותו האוניברסלית של המשפט (שכבר הוכח)?

השערות המחקר

1 אחוז גבוה מקרב תלמידי תיכון הלומדים מתמטיקה ברמה של 3 יח"ל, אינם יודעים בבירור את משמעותה של ההוכחה המתמטית הפורמלית.
(אנו יוצאים מההנחה, שהתלמידים האלה, לאחר שגילו או למדו הוכחה נכונה למשפט מתמטי מסוים, ימשיכו לחשוב שעדיין ייתכנו הפתעות, שרצוי להמשיך ולבדוק כדי להוסיף לאמינותו של המשפט כפי שהדבר נעשה במחקר אמפירי)
2 אחוז גבוה מקרב תלמידי תיכון הלומדים מתמטיקה ברמה של 4-5 יח"ל, אינם יודעים בבירור את משמעותה של ההוכחה המתמטית הפורמלית
3 אין הבדל בין אחוז התלמידים הלומדים מתמטיקה ברמה של 4-5 יח"ל, לאחוז התלמידים הלומדים מתמטיקה ברמה של 3 יח"ל, בהבנת משמעותה של ההוכחה המתמטית של המשפט המתמטי שכבר הוכח
4 קיים קשר בין רמת הקושי של משפט מתמטי לבין הבנת תקפותו האוניברסלית של המשפט (שכבר הוכח) משפט מתמטי ברמת קושי גבוהה יותר קשה יותר להבנה ולכן מצריך בדיקות רבות יותר מאשר משפט ברמת קושי נמוכה יותר למרות שהוכח, הן בקרב התלמידים הלומדים מתמטיקה ברמה של 4-5 יח"ל והן בקרב התלמידים הלומדים מתמטיקה ברמה של 3 יח"ל

מתודולוגיה

א. אוכלוסיית המחקר

במסגרת המחקר נבדקו כ-221 תלמידים הלומדים בשלושה בתי ספר, באזורים שונים של תל אביב ורמת גן הנחקרים חולקו לפי רמות הלימוד במתמטיקה הנלמדות בבתי הספר תלמידים ברמת 4-5 יח"ל (123 נחקרים), ותלמידים ברמת 3 יח"ל (98 נחקרים)
נחקרו שתי שכבות שכבת י ושכבת יא התואמות את הגילים 15 ו-16

ב. השיטה

שני שאלונים, האחד בעל תוכן אלגברי והאחר בעל תוכן גיאומטרי, הועברו בכיתה הרגילה של הנחקרים באותו זמן כלומר, כמחצית מהנחקרים קיבלו את השאלון האלגברי והשאר קיבלו את השאלון הגיאומטרי השאלונים חולקו באופן אקראי בסך הכול השתתפו במחקר כ-12 כיתות, 6 כיתות י ו-6 כיתות יא שני השאלונים הועברו כקדם ניסוי ב-4 כיתות על פי החלוקה לרמות ולגיל ותוקנו בהתאם נוסף על השאלונים נערכו ראיונות עם מספר תלמידים

ג. כלי המחקר

כאמור, הועברו שני שאלונים, אחד אלגברי והשני גיאומטרי (ראה נספח – השאלונים)
בכל שאלון הוצגו שני משפטים המשפט השני בכל שאלון היה ברמת קושי גבוהה יותר מהמשפט הראשון כדי לנטרל, ככל האפשר, את תפקיד המידע ואת ההשפעה של תהליך עיבוד המידע, התלמידים קיבלו את כל הנתונים הנחוצים להבנת הטענות המתמטיות המופיעות בשאלונים, ואת ההוכחות הפורמליות המתאימות

שני המשפטים שנבחרו באלגברה הם

1 "לכל $a>0$, $b>0$, מתקיים $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$"

2 "הפרש ריבועיהם של כל שני מספרים אי-זוגיים עוקבים מתחלק ב-8 ללא שארית"

שני המשפטים שנבחרו **בגיאומטריה** הם

1 "בכל משולש, זווית חיצונית שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות במשולש שאינן צמודות לה"

2 "בכל מרובע, אם נעביר את המקבילים לאלכסוניו דרך הקדקודים, אז המרובע שיתקבל הוא מקבילית"

המבנה הפנימי של כל שאלון הורכב משני סעיפים

א המשפט לאחריו באה ההוכחה המתאימה (הנכונה) לנחקר מוצגות שלוש טענות המשפט נכון, ההוכחה נכונה, לאחר הוכחת המשפט עדיין יש צורך במספר דוגמאות כדי להיות בטוח שהמשפט נכון תמיד על הנחקר לסמן את מידת הסכמתו עם כל טענה ולנמק את בחירתו (מידת ההסכמה דורגה בסולם של ארבע "מסכים", "נוטה להסכים", "נוטה שלא להסכים", ו-"לא מסכים" ניתנה האפשרות לענות ב"לא יודע")

ב חלק זה נועד לבדוק אם הנחקרים עקביים בגישתם שהובעה בחלק א במלים אחרות, אם הנחקר, שכבר הכריז על הסכמתו המלאה עם נכונות המשפט ועם הוכחתו, ישלול לחלוטין את הצורך בבדיקה אמפירית נוספת כלשהי לנחקר מוצגות שתי טענות לגבי המשפט שכבר הוכח ועליו לקבוע את מידת הסכמתו עם כל טענה ולנמק את בחירתו (מידת ההסכמה דורגה באותו אופן כמו בחלק הראשון) בשאלון הגיאומטרי, לדוגמה, מוצגות הטענות הבאות "כדאי לבדוק עוד כמה משולשים שונים זה מזה, כדי להיות יותר בטוחים שהמשפט נכון" וכן – "המשפט איננו נכון עבור כל המרובעים" (ההדגשה בגוף השאלון) בשאלון האלגברי מוצגת הטענה "המשפט אינו נכון עבור המספרים העשרוניים" שני הסעיפים חזרו על עצמם לגבי כל משפט (חקל וחקשה), בשאלון האלגברי והגיאומטרי כאחד.

ממצאים ומסקנות

לטענות במחקר מבנה תשובות זהה הנבדק התבקש לסמן את מידת הסכמתו עם הטענות וכן לנמק את בחירתו השערות המחקר עוסקות בהבנת משמעות תקפותה הכוללנית של ההוכחה הפורמלית למשפט מתמטי נימוק הנבדק לבחירתו הייתה שונה אצל כל אחד מהנבדקים למרות זאת, היה אפשר לאפיין מספר קטגוריות של תשובות לגבי כל משפט קטגוריות אלו מייצגות דפוסים קוגניטיביים שונים

1 **עקביות פורמלית** הנחקרים מסכימים בחלק הראשון עם נכונות המשפט, נכונות ההוכחה ודוחים את הצורך בדוגמאות נוספות כדי להיות יותר בטוחים בנכונות המשפט בחלק השני הנחקרים מגינים על גישתם התיאורטית ודוחים כל טענה מגבילה ובלתי צודקת על מידת ההכללה של המשפט שהוכח, ואת הצורך בבדיקות אמפיריות נוספות

2 **חוסר עקביות פורמלית** נחקרים אשר נראה שהם עקביים מבחינה פורמלית בחלק הראשון, כלומר, מסכימים עם נכונות המשפט ונכונותו ודוחים את הצורך בבדיקות נוספות למרות זאת בחלק השני מסכימים עם טענות לא נכונות המגבילות (ללא הצדקה) את מידת ההכללה של המשפט שהוכח, וכן סבורים שיש צורך בבדיקות אמפיריות נוספות

3 עקביות אמפירית נחקרים אשר בחלק הראשון, מסכימים עם נכונות המשפט ונכונות ההוכחה מחד גיסא, אך, מאידך גיסא, סוברים שיש צורך בדוגמאות נוספות כדי להיות יותר בטוחים שהמשפט נכון תמיד במלים אחרות, אינם מסכימים עם היעקרון שהוכחה פורמלית יכולה להבטיח את התוקף הכללי של המשפט יתר על כן, הנחקרים ממשיכים להחזיק בדעה זו גם בחלק השני

4 דוחים את נכונות המשפט ו/או נכונות ההוכחה

5 אחרים שאר הנחקרים אשר נתנו תשובות לא רלוונטיות, או שלא ענו על חלק מהטענות, או שהיו חסרי עקביות בדרך כלל התוצאות שהתקבלו עבור השאלונים באלגברה וגיאומטריה בקרב תלמידי 3 יח"ל במתמטיקה בכיתות י-יא, מובאות בלוח מס' 1

לוח 1

התפלגות דפוסים קוגניטיביים בקרב תלמידי 3 יח"ל במתמטיקה (באחוזים)

דפוס קוגניטיבי	אלגברה (N = 51)		גיאומטריה (N = 47)	
	משפט קל	משפט קשה	משפט קל	משפט קשה
פורמלי	9 8	5 9	8 5	2 2
חוסר	13 7	13 7	12 8	10 6
עקביות	35 3	33 3	38 3	23 4
אמפירי	11 8	25 5	17 0	29 8
דוחה משפט/ הוכחה אחר	29 4	21 6	23 4	34 0
סה"כ	100 0	100 0	100 0	100 0

רק מספר קטן מקרב הנחקרים, 8% 9 מתוך סך של 51 תלמידים שענו על המשפט האלגברי שהוגדר כ"קל להוכחה", ענה בדפוס פורמלי, כלומר הבין לאשורה את המשמעות של ההוכחה הפורמלית ודחה את הצורך בבדיקות אמפיריות נוספות

35 3% מבין הנחקרים ענו בדפוס אמפירי, כלומר סבורים שיש צורך בבדיקות אמפיריות נוספות על המשפט האלגברי שהוגדר כ״קל להוכחה״ (שכבר הוכח), וזאת למרות שהסכימו עם נכונות המשפט והוכחתו כ-33 3% מתוכם ענו לגבי המשפט הקשה יותר להוכחה בדפוס קוגניטיבי זה דפוס תוצאות דומות עולות מתשובות התלמידים לשאלון הגיאומטרי במשפט שהוגדר כ״קל להוכחה״, רק 8 5% מסך של 47 הנחקרים ענו בדפוס פורמלי 2 2% מהנחקרים ענו בדפוס קוגניטיבי זה היה נמוך יותר, במשפט שהוגדר כ״קשה יותר להוכחה״ 38 3% מהנחקרים ענו בדפוס אמפירי במשפט שהוגדר כ״קל יותר להוכחה״ אחוז הנחקרים שענו בדפוס תשובה זה במשפט שהוגדר כ״קשה יותר להוכחה״ היה נמוך יותר, כ-23 4% מסך כל 47 הנחקרים

לבדיקת השערת המחקר הראשונה בוצע ניתוח של התוצאות שהתקבלו עבור השאלונים באלגברה וגיאומטריה בקרב תלמידי 3 יח״ל במתמטיקה בהתייחס רק לנחקרים שהביעו את הסכמתם עם נכונות המשפט והוכחתו, אז לגבי השאלון באלגברה, **רק 16.7% ענו בדפוס פורמלי לגבי המשפט הקל,** ו-11 1% מהם ענו באותו האופן לגבי המשפט הקשה

תוצאות דומות הושגו בשאלון הגיאומטרי, רק 14 3% מהם ענו בדפוס פורמלי לגבי המשפט הקל, ו-5 9% ענו באותו דפוס קוגניטיבי לגבי המשפט הקשה יותר להוכחה מהממצאים עולה כי אכן אחוז גבוה מקרב תלמידי תיכון הלומדים מתמטיקה ברמה של 3 יח״ל, אינם יודעים בבירור את משמעותה של ההוכחה המתמטית הפורמלית

מכאן שהשערת המחקר הראשונה אוששה

ממצאים אילו תואמים את תוצאות המחקרים של Fischbein (1982), Schoenfeld (1987), Williams (1979) ושל Senk (1989) התוצאות עבור התלמידים ברמה של 5-4 יח״ל במתמטיקה בכיתות י-יא מובאות בלוח מס׳ 2

לוח 2

התפלגות דפוסים קוגניטיביים בקרב תלמידי 5-4 יח״ל במתמטיקה (באחוזים)

דפוס קוגניטיבי	אלגברה (N = 53)		גיאומטריה (N = 70)	
	משפט קל	משפט קשה	משפט קל	משפט קשה
פורמלי	32 1	34 0	74 3	45 6
חוסר	24 5	15 1	10 0	14 3
עקביות	15 1	28 3	8 6	25 7
אמפירי	17 0	13 2	2 8	7 2
דוחה משפט/ הוכחה אחר	11 3	9 4	4 3	7 2
סה״כ	100 0	100 0	100 0	100 0

נמצא שרק כשליש בערך מסך כל 53 הנחקרים שענו על השאלון האלגברי מבינים את המשמעות של ההוכחה הפורמלית, הן לגבי המשפט שהוגדר ״קל להוכחה״ והן לגבי המשפט שהוגדר כ״קשה יותר להוכחה״ 15 1% מהנחקרים ענו באופן אמפירי לגבי המשפט הקל להוכחה, בעוד שכ-28 3% סוברים כך עבור המשפט הקשה יותר להוכחה

יותר משני שלישים מסך כל 70 התלמידים שענו על השאלון הגיאומטרי מבינים את המשמעות של ההוכחה הפורמלית, לגבי המשפט שהוגדר כ״קל יותר להוכחה״ 45 6% מהם ענו בדפוס פורמלי לגבי המשפט שהוגדר כ״קשה יותר להוכחה״ 8 6% מהנחקרים ענו בדפוס אמפירי לגבי המשפט הקל להוכחה, בעוד שכ-25 7% סוברים כך עבור המשפט הקשה יותר להוכחה

לבדיקת השערת המחקר השנייה, שאחוז גבוה מקרב תלמידי תיכון הלומדים מתמטיקה ברמה של 5-4 יח״ל, אינם יודעים בבירור את משמעותה של ההוכחה המתמטית הפורמלית, בוצע ניתוח של התוצאות שהתקבלו עבור השאלונים באלגברה וגיאומטריה בקרב תלמידי 5-4 יח״ל במתמטיקה אם נתייחס רק לנחקרים שקיבלו את נכונות המשפט והוכחתו, מתברר לגבי השאלון באלגברה כי 44 7% מהם ענו בדפוס פורמלי לגבי המשפט הקל, בעוד ש-43 9% מהם ענו באותו דפוס קוגניטיבי לגבי המשפט הקשה לגבי השאלון בגיאומטריה 74 3% מהם ענו בדפוס פורמלי לגבי המשפט הקל, בעוד ש-45 6% מהם ענו באותו דפוס קוגניטיבי לגבי המשפט הקשה.

פרט למשפט הקל בגיאומטריה שעבורו כשני שלישים מהם ענו בדפוס פורמלי, הרי לגבי שלושת המשפטים הנותרים, פחות ממחצית הנחקרים שקיבלו את נכונות המשפט והוכחתו ענו בדפוס קוגניטיבי פורמלי מכאן שהשערת המחקר אוששה באופן חלקי בלבד

ממצאים אלו תואמים באופן חלקי את תוצאות מחקרם של Fischbein and Kedem (1982) על-פי מחבר זה מרבית התלמידים, גם אלה הלומדים ברמה גבוהה, תומכים בצורך בבדיקות אמפיריות נוספות למשפט מתמטי שכבר הוכח, גם אם הסכימו לחלוטין עם המשפט ועם ההוכחה הפורמלית שלו

לבדיקת ההבדלים בין תלמידים הלומדים מתמטיקה ברמה של 3 יח״ל לאלה הלומדים מתמטיקה ברמה של 5-4 יח״ל, בוצע מבחן Z לבדיקת המובהקות בין שתי אוכלוסיות הנחקרים, בהתייחס רק לשלושת הדפוסים הקוגניטיביים הרלוונטיים דפוס פורמלי, דפוס חסר עקביות ודפוס אמפירי

התפלגות דפוסים קוגניטיביים בקרב הנחקרים ומבחן Z בין שתי האוכלוסיות מובא בלוח מס׳ 3

לוח 3

השוואת דפוסים קוגניטיביים בין תלמידים לפי רמות הלימוד במתמטיקה (באחוזים)

שאלון	דפוס קוגניטיבי	משפט קל להוכחה		מבחן מובהקות	משפט קשה להוכחה		מבחן מובהקות
		3 יח"ל (N=51)	4-5 יח"ל (N=53)		3 יח"ל (N=51)	4-5 יח"ל (N=53)	
א ל	פורמלי	98	32 1	*	59	34 0	*
ג ב	חוסר עקביות	134	24 5	*	137	15 1	
ר ה	אמפירי	35 3	15 1	*	33 3	28 3	
שאלון	דפוס קוגניטיבי	משפט קל להוכחה		מבחן מובהקות	משפט קשה להוכחה		מבחן מובהקות
		3 יח"ל (N=47)	4-5 יח"ל (N=70)		3 יח"ל (N=47)	4-5 יח"ל (N=70)	
ג א	פורמלי	85	74 3	*	22	45 6	*
ו מ ט	חוסר עקביות	128	100	*	106	14 3	
ר ה	אמפירי	383	86	*	234	25 7	

$P < 0\,05$

מהממצאים עולה שאחוז התלמידים הלומדים מתמטיקה ברמה של 3 יח"ל, שענו בדפוס פורמלי, קטן באופן מובהק (*$P < 0\,05$) מאחוז התלמידים הלומדים מתמטיקה ברמה של 4-5 יח"ל, שענו באותו דפוס קוגניטיבי הבדל משמעותי זה נמצא באלגברה וגם בגיאוטריה, הן לגבי המשפט הקל להוכחה והן לגבי המשפט הקשה להוכחה

עוד נמצא שאחוז התלמידים הלומדים מתמטיקה ברמה של 3 יח"ל שענו בדפוס אמפירי גדול באופן מובהק (*$P < 0\,05$) מאחוז התלמידים שענו בדפוס זה מקרב תלמידי 4-5 יח"ל במתמטיקה, לגבי המשפטים הקלים באלגברה וגיאומטריה לפיכך, השערת המחקר השלישית, שאין הבדל בין אחוז התלמידים הלומדים מתמטיקה ברמה של 4-5 יח"ל, לאחוז התלמידים הלומדים מתמטיקה ברמה של 3 יח"ל, בהבנת משמעותה של ההוכחה המתמטית של המשפט המתמטי שכבר הוכח – הופרכה ממצאים אלו עומדים בסתירה לתוצאות מחקרם של Fischbein and Kedem (1982) לפיו אין הבדלים בין התלמידים הלומדים מתמטיקה ברמה בסיסית לאלה הלומדים מתמטיקה ברמה גבוהה בצורך בבדיקות אמפיריות נוספות למשפט מתמטי שכבר הוכח, גם אם הסכימו לחלוטין עם המשפט ועם ההוכחה הפורמלית שלו

השפעת רמת הקושי של משפט מתמטי על התמדה בעמדות הקוגניטיביות

קטגוריות התשובות שתוארו לעיל מייצגות דפוסים קוגניטיביים שונים לגבי כל הוכחת משפט בנפרד בכל שאלון הנחקרים התבקשו להתייחס להוכחת שני משפטים השונים זה מזה ברמת הקושי שלהם, כשהמשפט השני שנבחר היה יותר קשה להוכחה מהמשפט הראשון

נמצא שביחס להתמדה של כל תלמיד באופן תשובתו לשני המשפטים, הנחקרים נחלקים לשתי קטגוריות עיקריות

א נחקרים המתמידים באופן תשובתם כלומר, הדפוס הקוגניטיבי בשני המשפטים זהה

ב נחקרים שאינם מתמידים בדפוס תשובתם כלומר, הדפוס הקוגניטיבי משתנה בהתאם לרמת הקושי של המשפט

לוח מס' 4

סיכום התפלגות התמדה בדפוסים קוגניטיביים באלגברה ובגיאומטריה (באחוזים)

	4-5 יח"ל (N = 123)	3 יח"ל (N = 98)
א. התמדה בדפוס התשובה בשני המשפטים		
פורמלי	35 0	6 1
חוסר עקביות	3 3	7 1
אמפרי	4 9	18 4

ב. חוסר התמדה בדפוס התשובה בשני המשפטים		
פורמלי > חוסר עקביות	10 5	5 1
חוסר עקביות > אמפירי	6 5	6 1
פורמלי > אמפירי	7 3	10 2
חוסר עקביות > פורמלי	1 6	0 0
ג. לא ענו על המשפט "הקשה"	30 9	47 0
סה"כ	100 0	100 0

רק 35 0% מסך כל 127 הנחקרים שלומדים מתמטיקה ברמה של 5-4 יח"ל התמידו בדפוס פורמלי 24 3% מהם שינו את תשובתם לדפוס קוגניטיבי המצדד ביותר בדיקות למשפט שהוגדר כ"קשה יותר להוכחה" מספר קטן מאוד מתוך 98 הנחקרים הלומדים מתמטיקה הרמה של 3 יח"ל התמידו בדפוס פורמלי ו-18 4% התמידו בדפוס אמפירי 21 4% מהם שינו את אופן תשובתם לדפוס קוגניטיבי המצדיק בדיקות נוספות למשפט שהוגדר כ"קשה יותר להוכחה" 47 0% מהם לא ענו כלל על משפט זה

השערת המחקר הרביעית הייתה שקיים קשר בין רמת הקושי של משפט מתמטי לבין הבנת תקפותו האוניברסלית של המשפט (שכבר הוכח) ההנחה הייתה שמשפט מתמטי ברמת קושי גבוהה יותר קשה יותר להבנה ולכן מצריך בדיקות רבות יותר מאשר משפט ברמת קושי נמוכה יותר למרות שהוכח, הן בקרב התלמידים הלומדים מתמטיקה ברמה של 5-4 יח"ל והן בקרב התלמידים הלומדים מתמטיקה ברמה של 3 יח"ל

בכל שאלון התבקשו הנחקרים להתייחס לשני משפטים השונים זה מזה ברמת הקושי שלהם, כשהמשפט השני היה יותר קשה מהמשפט הראשון נמצא שביחס להתמדה באופן התשובה לשני המשפטים, הנחקרים נחלקו לשתי קבוצות שונות

נחקרים המתמידים באופן תשובתם (הדפוס הקוגניטיבי זהה בשני המשפטים) ולנחקרים שאינם מתמידים בדפוס תשובתם (הדפוס הקוגניטיבי משתנה בהתאם לרמת הקושי של המשפט)

הממצא המפתיע ביותר היה **שרק כ-35% מסך כל 123 הנחקרים שלומדים מתמטיקה ברמה של 5-4 יח"ל התמידו בדפוס קוגניטיבי פורמלי** למרות שאחוז הנחקרים שענו בדפוס פורמלי היה גבוה יותר לגבי כל משפט בנפרד **24.3% מהם שינו** את אופן תשובתם כך שמדפוס קוגניטיבי הדורש פחות בדיקות למשפט שהוגדר כ"קל להוכחה" (שכבר הוכח), **חזרו לדפוס קוגניטיבי שתומך בצורך ביותר בדיקות** למשפט שהוגדר כ"קשה יותר להוכחה" (שכבר הוכח)

רק כ-6.1% מסך כל 98 הנחקרים הלומדים מתמטיקה ברמה של 3 יח"ל התמידו בדפוס קוגנטיבי פורמלי 4% 22 מהם שינו את אופן תשובתם לדפוס המצדיק יותר בדיקות למשפט שהוגדר כ"קשה יותר להוכחה"

מכאן שהשערת המחקר הרביעית – אוששה

ממצאים אלה תומכים בהסברים של פישביין וקדם לכך שהתלמיד הרגיל נוטה אינטואיטיבית ולא במודע לפרשנות האמפירית של תקפות ההוכחה בתגובותיו הגלויות "אל פני השטח", ייתכן שהוא הבחין בבירור בין ההוכחה הפורמלית להוכחה אמפירית אולם, כאשר ניצבות מולו שאלות לא סטנדרטיות בנוגע לתוקפו של משפט שהוכח פורמלית, ייתכן שגישותיו המושרשות עמוק עדיין טועות בנטייתו לחפש אחר אישורים נוספים רבים ככל האפשר

סיכום

הצגת תוצאות באופן פורמלי על-ידי הוכחות היא כלי משמעותי ביותר עבור המתמטיקאים המאפשר את ביסוס תקפותם של רעיונות

Courant (1978), Martin and Harel (1989), Hanna (1993), Lakatos (1976), Bell (1976)

הוכחה מתמטית דדוקטיבית מאופיינת לדעת Courant (1978) על-ידי שימוש באקסיומות, שהן הנחות יסוד כלליות המתקבלות כנכונות ללא הוכחה, ובמשפטים שכבר הוכחו כנכונים בשלב קודם על סמך אותן אקסיומות, לשם הגעה למסקנה הנובעת מתוך הצגת הנתונים ההוכחה הדדוקטיבית היא פורמלית מדויקת ההוכחה היא ריגורוסית (rigorous), סדרה סופית של משפטים במערכת נתונה, כך שכל משפט הוא אקסיומה במערכת או משפט הגזור בהתאם לחוקי הלוגיקה ממשפטים קודמים במערכת

מסקירת הספרות המחקרית העוסקת בנושא עולה, שבקרב תלמידי תיכון, החשיבה הפורמלית כמעט שאינה קיימת כלל חלק מהתלמידים סבורים שבדיקה אחת, בדיוק כמו כתיבת הוכחה דדוקטיבית, מאפשרת להגיע למסקנות ודאיות הניתנות ליישום והכללה על מספר אינסופי של דוגמאות בעוד שחלקם סבור שהוכחות דדוקטיביות בניאומטריה הן הוכחות עבור מקרה פרטי, שהוא המקרה הנתון בסרטוט המצורף לבעיה תלמידים שאוחזים בעמדה זו אינם מבינים את משמעות עקרון ההכללה של ההוכחה הדדוקטיבית Schoenfeld (1987), Williams (1979), Chazan (1993)

תוצאות המחקר ביחס לתלמידים הלומדים מתמטיקה ברמה של 3 יח"ל, תומכות בתפיסה שמעט תלמידים נמצאים בשלב השלישי בפיתוח החשיבה על-פי Piaget (1928) רובם נמצאים בשלב הראשון שבו חשיבתם לא לוגית ולא שיטתית או בשלב השני שבו הם משתמשים רק בבדיקות אמפיריות, וחושבים באופן לוגי רק לגבי אמונות שהם מאמינים בהן פחות ממחצית התלמידים הלומדים מתמטיקה ברמה של 5-4 יח"ל, ענו בדפוס פורמלי והתמידו באופן תשובתם גם לגבי משפט שהוגדר "קשה להוכחה" לפי פישביין וקדם (1996) תלמיד המסוגל לדחות

טענות המגבילות באופן לא מוצדק את מידת ההכללה של המשפט המתמטי מבין לעומק את משמעות התוקף האוניברסלי של ההוכחה הדדוקטיבית לגורמים המשפיעים על תפיסה זו ניתן להוסיף גם את רמת הקושי של המשפט, המשפיעה על דפוס החשיבה כלומר, תלמיד שמשנה את דפוס חשיבתו מדפוס פורמלי לדפוס אמפירי, לא הפנים את המשמעות של ההוכחה הדדוקטיבית כעת מתברר שאפילו תלמיד **המצוי לכאורה** בשלב החשיבה הפורמלית, חוזר לשלב נמוך יותר כשהוא נתקל במשפט שרמתו קשה יותר

ההסבר האפשרי לכך הוא שרק אלה שהפנימו ונעשו מודעים לתוקף האוניברסלי של ההוכחה הדדוקטיבית, אכן רכשו את החשיבה הפורמלית באופן יסודי ומוצק

המסקנה העיקרית ממחקר זה היא שבתכנון הוראת המתמטיקה, יש לקחת בחשבון את דפוסי החשיבה האמפיריים של מרבית התלמידים, המבוססים על אינטואיציות.

כהמלצה למחקר נוסף, מעניין יהיה לבדוק את השפעת הגיל על הבנת התוקף האוניברסלי של ההוכחה הדדוקטיבית בחתך רמות הלימוד השונות לבדוק את השפעת סגנון ההוראה על הבנת התלמידים את משמעות ההוכחה הדדוקטיבית

תודתי נתונה לפרופי אפרים פישביין שעבודה זו בוצעה בהנחייתו ובעידודו

רשימת ספרות

Balacheff, N [1988] Aspects of Proof in Pupils Practice of School Mathematics In D Pimm (ed), *Mathematics, Teachers and Children*, pp 216-238 London Hodder and Stoughton

Battista, M T and D H Clements [1995] Geometry and Proof, *The Mathematics Teacher*, 88 (1) 48-54

Bell, A W [1976] A Study of Pupils Proof-Explanations in Mathematical Situations *Educational Studies in Mathematics* 7 23-40

Courant R and H Robbins [1978] *What is Mathematics?* New-York Oxford University Press

Chazan, D [1988] Proof and Mesuremennt An Unexpected Misconseption In A Borbas (ed), *Proceeding of the Twelfth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp 207-214 Veszprem, Hungary

Chazan, D [1993] High School Geometry Students Justification for their Views of Empirical Evidence and Mathematical Proof, *Educational Studies in Mathematics* 24 359-387

Fischbein, E [1982] Intuition and Proof, *For the Learning of Mathematics* 3(2) 9-18, 24

Hanna, G and H N Jahnke [1993] Proof and Application, *Educational Studies in Mathematics* 24 421-438

Lakatos, I [1976] *Proofs and Refutations The Logic of Mathematical Discovery* New York, Cambridge University Press

Martin, W G and G Harel [1989] Proofs Frames of Preservice Elementary Teachers, *Journal for Research in Mathematics Education* 20 (1) 41-51

Piaget, J [1928] *Judgment and Reasoning in the Child* New York, Harcourt, Brace and Co

Van Dormolen, J [1977] Learning to Understand What Giving a Proof Really Means, *Educational Studies in Mathematics* 8 27-34

Schoenfeld, A [1989] Exploration of Students Mathematical Beliefs and Behavior, *Journal for Research in Mathematics Education* 20 (4) 338-355

Senk, S L [1989] Van Hiele Levels and Achievement in Writing Geometry Proofs, *Journal for Research in Mathematics Education* 20 (4) 309-321

פישביין, א' ואי קדם [1996] ודאות והוכחה בפיתוח החשיבה המתמטית, עלי"ה 18 25-26