שיטות חדשות, תכנים חדשים

מצולעים שטחוניים

שיעור-דיון מתמטי סביב מושג חדש

גרייסי ויניצקי-לנדמן
אורנים - בית הספר לחינוך של התנועה הקיבוצית

מבוא

בטור 'האם אפשר אחרת' של עליה 19 הציגו חזן ולירון את 'העידון ההדרגתי' כדרך להבנה ולבניית ידע. המקרים שהובאו בטור זה נשענים, בעיקר, על העידון ההדרגתי שנוצר כתוצאה של האינטראקציה בין הלומד לבין המחשב

ברצוני להביא אירוע המדגים הבנה בשלבים ובנייה הדרגתית של מושג מיוחד בגיאומטריה אשר התרחשו עקב האינטראקציה בין משתתפים פעילים בדיון מתמטי (mathematical discourse) לפי המונחים של פים (Pimm 1987) אירוע זה התרחש במסגרת השתלמות בגיאומטריה שבה השתתפו מורי בית ספר יסודי. כיוון שהאירוע המתואר התרחש באופן ספונטני, לא הייתה אפשרות להקליט את הדיון. מהלך הדיון תועד בכתב מיד לאחר תום המפגש על סמך זכרוני ועל סמך הרישומים של המשתתפים. לכן, לא מובאים ציטוטים של דברי המשתתפים כי אם סיכום דבריהם. כל אשר הופיע על הלוח, מובא כאן במסגרות.

כפי שנאמר קודם, הדיון התמקד במושג מיוחד בגיאומטריה של המישור. המושג 'מצולע שטחוני' מושג זה הוא מיוחד משום שאינו מופיע בתכנית הלימודים אשר על-פיה מורים אלה מלמדים. המושג אף לא היה מוכר להם

המפגש התחיל בכך שהצגתי את הגדרת המושג באופן הבא

> נתון מצולע מישורי. אם קיימת נקודה בתוכו שכאשר היא מחוברת עם קדקודי המצולע נוצרים משולשים שווי שטח, אז המצולע נקרא **מצולע שטחוני** ונקודה זו נקראת **מרכזון** המצולע

לאחר מכן נתבקשו המשתתפים לשאול שאלות ולשער השערות הקשורות למושג זה. תפקידי כמורה היה לרשום על הלוח את השאלות, ההשערות והמסקנות ולנווט את הדיון, כל זה ברוח הסטנדרטים להוראת מתמטיקה (NCTM 1991) להלן **השלבים המרכזיים של הדיון:**

(1) **ניסוח טענה:** הריבוע הוא מצולע שטחוני והמרכזון שלו הוא מפגש אלכסוניו

(2) **הסקת מסקנה:** קיימים מצולעים שטחוניים - קבוצת המצולעים השטחוניים איננה ריקה

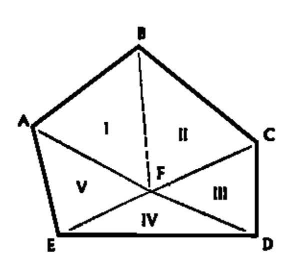
(3) **העלאת השערה והוכחתה:** כל מצולע משוכלל הוא שטחוני, לכן, קיימים אינסוף מצולעים שטחוניים

(4) **שאלת שאלה:** האם מצולע שטחוני חייב להיות משוכללי
ניסוח שאלה שקולה: האם להיות משוכלל הוא תנאי הכרחי כדי להיות שטחוני

(5) **שאלת שאלה:** האם המרכזון של מצולע שטחוני מרוחק מרחקים שווים מקודקודי המצולע

מסגרת 1

$S_I = S_{II} = S_{III} = S_{IV} = S_V$

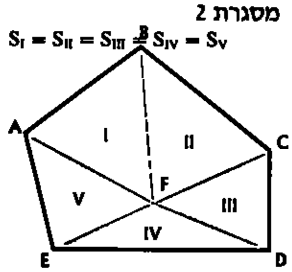


האם $FA = FB = FC = FD = FE$?

(6) **שאלת שאלה:** האם המרכזון של מצולע שטחוני מרוחק מרחקים שווים מצלעותיו של המצולע

מסגרת 2

$S_I = S_{II} = S_{III} = S_{IV} = S_V$

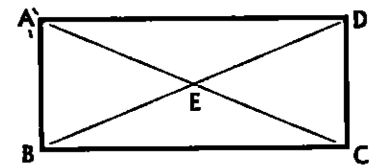


האם $d(F,AB)=d(F,BC)=d(F,CD)=d(F,DE)=d(F,AE)$?

(7) **מתן דוגמה - ניסוח טענה:** המלבן הוא מרובע שטחוני והמרכזון שלו הוא מפגש אלכסוניו

מסגרת 3

ABCD מלבן



$$\left.\begin{array}{l} S(\Delta AEB)=S(\Delta BEC)\\ S(\Delta AED)=S(\Delta DEC)\\ \Delta AEB \cong \Delta CED \end{array}\right\} \Rightarrow S(\Delta AED)=S(\Delta DEC)=S(\Delta AEB)=S(\Delta BEC)$$

לכן E הוא המרכזון של מלבן זה.

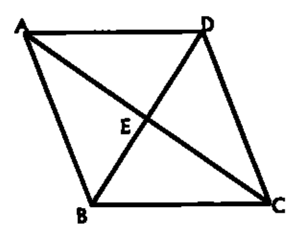
(8) **הסקת מסקנה:** התשובה לשאלה 4 היא שלילית

(9) **הסקת מסקנה:** התשובה לשאלה 6 היא שלילית

(10) **ניסוח טענה:** המעוין הוא מרובע שטחוני והמרכזון שלו הוא מפגש אלכסוניו

מסגרת 4

ABCD מעוין



$$\left.\begin{array}{l} \Delta AEB \cong \Delta CEB\\ \Delta CEB \cong \Delta AED\\ \Delta AEB \cong \Delta CED \end{array}\right\} \Rightarrow S(\Delta AED)=S(\Delta DEC)=S(\Delta AEB)=S(\Delta BEC)$$

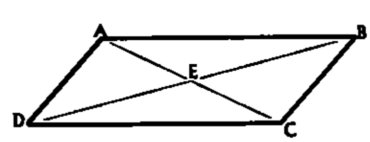
לכן, E הוא המרכזון של מעוין זה

(11) **הסקת מסקנה:** התשובה לשאלה 5 היא שלילית

(12) **העלאת השערה והוכחתה:** כל מקבילית היא שטחונית והמרכזון שלה הוא מפגש האלכסונים

מסגרת 5

ABCD מקבילית



$$\left.\begin{array}{l} AE=CE \Rightarrow \begin{cases} S(\Delta AED)=S(\Delta CED)\\ S(\Delta AEB)=S(\Delta CEB)\end{cases}\\ BE=DE \Rightarrow \begin{cases} S(\Delta AEB)=S(\Delta AED)\\ S(\Delta CEB)=S(\Delta CED)\end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow S(\Delta AED)=S(\Delta DEC)=S(\Delta AEB)=S(\Delta BEC)$$

לכן, E הוא המרכזון של מקבילית זו

(13) **שאלת שאלה:** האם כל מצולע שטחוני הוא קמור?

ניסוח שאלה שקולה: האם מצולעים שטחוניים חייבים להיות קמורים?

(14) **שאלת שאלה:** האם דלתון קמור יכול להיות שטחוני? אם כן, מהו המרכזון שלו?

(15) **ניסוח טענה:** אם דלתון קמור הוא שטחוני, לא בהכרח המרכזון שלו הוא מפגש אלכסוניו

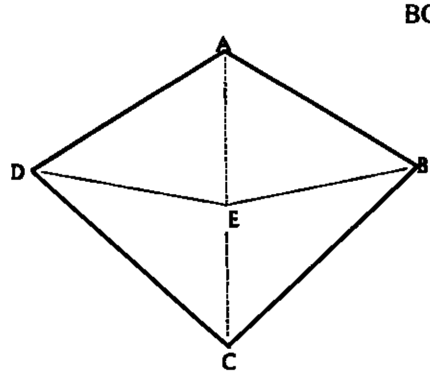
(16) **ניסוח טענה:** נקודת אמצע של האלכסון המוכל בציר הסימטריה של הדלתון הוא המרכזון של כל דלתון קמור לכן, כל דלתון קמור הוא שטחוני

מסגרת 6

ABCD דלתון קמור

.AB=AD

BC=CD



$$EA=EC \Rightarrow S(\Delta AED)=S(\Delta DEC)=S(\Delta AEB)=S(\Delta BEC)$$

לכן, E הוא המרכזון של דלתון זה

(17) **שאלת שאלה:** מה קורה עם דלתון קעור?

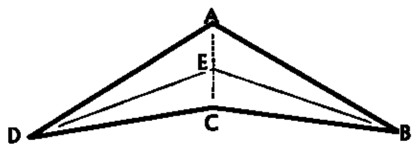
(18) **העלאת השערה והוכחתה:** נקודת אמצע של האלכסון המוכל בציר הסימטריה של הדלתון הוא המרכזון של כל דלתון קעור ולכן, דלתון זה שטחוני

מסגרת 7

ABCD דלתון קעור

AB=AD

BC=CD



$$EA=EC \Rightarrow S(\Delta AED)=S(\Delta DEC)=S(\Delta AEB)=S(\Delta BEC)$$

לכן, E הוא המרכזון של דלתון זה

(19) **הסקת מסקנה:** התשובה לשאלה 13 היא שלילית

(20) **הערה:** זאת אותה הוכחה למקרה של דלתון קמור וקעור

(21) **הסקת מסקנה:** (מטענה 12 עולה, כי קיומו של מרכז סימטריה במרובע מבטיח שהמרובע הוא שטחוני)

(22) **שאלת שאלה:** האם קיום של ציר סימטריה למצולע מספיק כדי להבטיח שהוא שטחוני?

(23) **שאלת שאלה:** האם קיום של מרכז סימטריה למצולע מספיק כדי להבטיח שהוא שטחוני?

(24) **ניסוח טענה:** קיום של ציר סימטריה אינו הכרחי כי בטענה 12 הוכח שכל מקבילית היא שטחונית ולא כל מקבילית היא בעלת ציר סימטריה

(25) **שאלת שאלה:** לאיזה מרובעים יש ציר סימטריה?

(26) **מתן דוגמאות:** דלתון וטרפז שווה שוקיים

(27) **ניסוח טענה:** גם למלבן יש ציר סימטריה

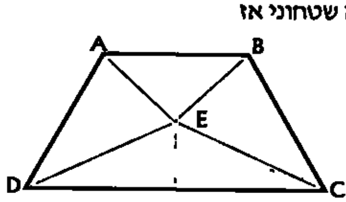
(28) **המלצה:** כדי לענות על שאלה 22, כדאי לבדוק מה קורה עם טרפז שווה שוקיים

(29) **ניסוח טענה:** אם טרפז שווה שוקיים הוא שטחוני אז יחס המרחקים של המרכזון לבסיסים הוא הפוך ליחס הבסיסים

מסגרת 8

ABCD טרפז שווה שוקיים

אם הטרפז הוא שטחוני אז



$$S(\Delta AEB)=S(\Delta CED)\Rightarrow AB\ d(E,AB)=CD\ d(E,CD)\Rightarrow \frac{AB}{CD}=\frac{d(E,CD)}{d(E,AB)}$$

(30) **ניסוח טענה:** אין אף טרפז שווה שוקיים שהוא שטחוני,

מסגרת 9

אם ABCD טרפז שווה שוקיים שטחוני והנקודה E היא המרכזון שלו אז

$$S(\Delta AEB)=\frac{1}{4}S(ABCD)\Rightarrow AB\ d(E,AB)=\frac{1}{4}(AB+CD)[d(E,AB)+d(E,CD)]\Rightarrow$$

$$3\ AB\ d(E,AB)=AB\ d(E,CD)+CD\ [d(E,AB)+d(E,CD)]\Rightarrow$$

$$3\ AB\ d(E,AB)=AB\ \frac{AB\ d(E,AB)}{CD}+CD\ [d(E,AB)+\frac{AB\ d(E,AB)}{CD}]\Rightarrow$$

$$3\ AB\ CD\ d(E,AB)=AB^2\ d(E,AB)+CD^2\ d(E,AB)+CD\ AB\ d(E,AB)\Rightarrow$$

$$(AB-CD)^2\ d(E,AB)=0\Rightarrow AB=CD$$

לכן, המרובע ABCD הוא מקבילית מכאן שלא קיים טרפז שווה שוקיים שטחוני.

(31) **הסקת מסקנה:** התשובה לשאלה 22 היא שלילית

(32) **הסקת מסקנה:** לא כל מרובע הוא שטחוני

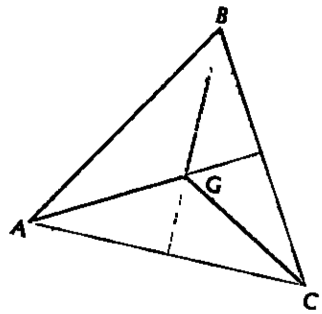
(33) **שאלת שאלה:** מה עם משולשים, האם יש משולשים שטחוניים

(34) **מתן תשובה:** מטענה 2 נובע שמשולש שווה צלעות הוא שטחוני,

מסגרת 10

ABC הוא משולש שווה צלעות

G מפגש הקווים המיוחדים של משולש זה



G מרכזון של המשולש ABC

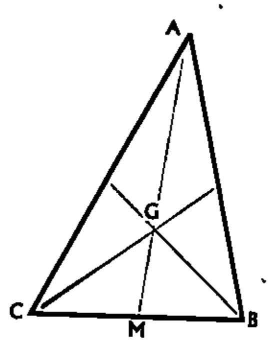
(35) **שאלת שאלה:** האם יש משולשים שטחוניים שהם לא שווי צלעות?

(36) **ניסוח טענה:** כל משולש הוא שטחוני והמרכזון הוא מפגש התיכונים של המשולש

מסגרת 11

ABC משולש

G מפגש התיכונים של משולש זה



$$\left.\begin{array}{l} BM=MC\Rightarrow S(\Delta BAM)=S(\Delta CAM) \\ G\in AM\Rightarrow S(\Delta BGM)=S(\Delta CGM) \end{array}\right\}\Rightarrow S(\Delta BGA)=S(\Delta CGA)$$

באופן דומה מתקבל ש

$$S(\Delta BGC)=S(\Delta CGA)$$

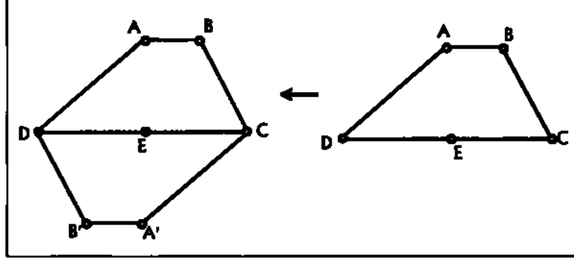
ולכן, G מרכזון של משולש זה

(37) **שאלת שאלה:** האם יש מרובעים שטחוניים לא מיוחדים (לא מקביליות ולא דלתונים)?

(38) **הצעת בנייה:** לסובב 180^0 טרפז ABCD סביב נקודת האמצע של הבסיס הארוך (נניח CD) מתקבל טרפז

חדש A'B'DC למשושה ABCA'B D יש מרכז סימטריה
האם הוא שטחוני?

מסגרת 12



(39) **ניסוח טענה:** אם משושה זה שטחוני, המרכזון הוא מרכז הסימטריה

(40) **ניסוח טענה:** בכל טרפז ש״ש ABCD כך שהבסיס CD גדול מהבסיס AB והשוקיים שונים מהבסיס AB המשושה המתקבל לאחר הבנייה שתוארה קודם, אינו שטחוני

(41) **מתן תשובה** שלילית לשאלה 23

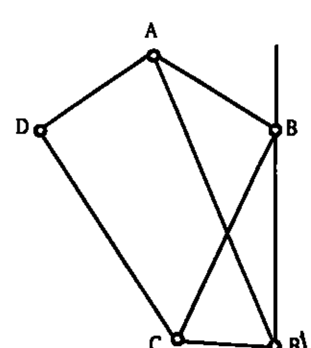
(42) **ניסוח שאלה:** איך אפשר להבטיח שמרובע הוא שטחוני?
ניסוח שאלה שקולה: מהו תנאי מספיק לכך שמרובע הוא שטחוני?

(43) **הסקת מסקנות:** להיות דלתון הוא תנאי מספיק לכך, אבל הוא לא תנאי הכרחי (דוגמא מלבן שאינו ריבוע)

(44) **הצעת בנייה:** אם לוקחים דלתון ABCD שציר הסימטריה שלו הוא הישר AC, מתקבל שהמרחק מ-B לישר AC שווה למרחק מ-D לאותו ישר אם נזיז את הנקודה B בישר מקביל ל-AC, נקבל נקודה חדשה B' והמרובע החדש AB'CD אינו דלתון, אבל הוא כן שטחוני המרכזון של המרובע AB'CD הוא המרכזון של המרובע ABCD, זאת אומרת נקודת האמצע של האלכסון AC

מסגרת 13

ABCD דלתון
BB' || AC

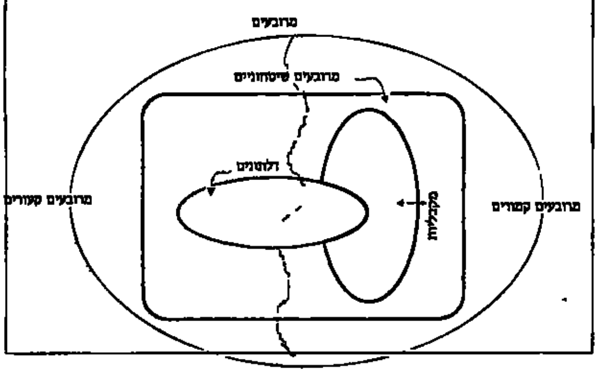


AB'CD מרובע שטחוני

(45) **הסקת מסקנה:** התשובה לשאלה 37 היא חיובית ומכאן שקבוצת המרובעים השטחוניים מכילה באופן חזק את קבוצת המקביליות וגם את קבוצת הדלתונים

(46) **סיכום ביניים:** בכל המרובעים השטחוניים שראינו עד

מסגרת 14

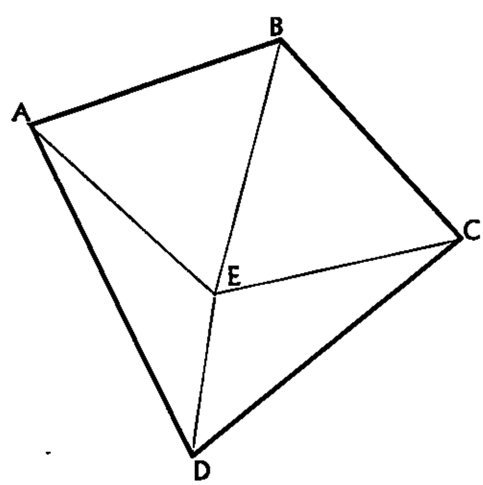


כה, המרכזון נמצא על אחד האלכסונים, יתרה מזו, המרכזון הוא נקודת אמצע של אלכסון זה

(47) **הסקת מסקנה:** אם המרכזון של מרובע שטחוני הוא נקודת אמצע של אחד אלכסוניו, שני הקדקודים שלא שייכים לאלכסון זה מרוחקים מרחקים שווים מישר זה

(48) **ניסוח השערה והוכחתה:** תנאי 46 הוא הכרחי במילים אחרות, אם מרובע הוא שטחוני אז המרכזון הוא נקודת האמצע של אחד מאלכסוניו

מסגרת 15
ABCD מרובע שטחוני ו-E מרכזון שלו



F היא הנקודה ש $F \in AE$ $AF \perp FD$
ו-G הנקודה כך ש $G \in AE$ $AG \perp GB$

מכאן אפשר להסיק ש $BG \parallel FD$

המשך מסגרת 15

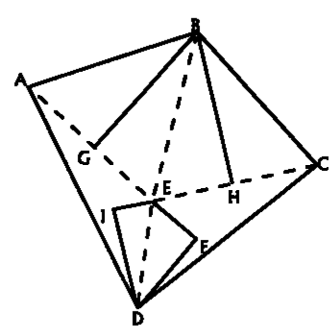
$$S(\Delta ABE)=S(\Delta ADE)\Rightarrow \frac{AE\cdot BG}{2}=\frac{AE\cdot DF}{2}\Rightarrow BG=DF$$

לכן המרובע BGDF הוא מקבילית

H היא הנקודה ש $CH\perp HB,\ H\in CE$
ו-I הנקודה ש $CI\perp ID\ \ I\in CE$
ובאופן דומה אפשר להסיק שהמרובע BHDI הוא מקבילית

אם x הוא מפגש אלכסוניו של המקבילית BGDF אזי x היא נקודת האמצע של הקטע BD
אם y הוא מפגש אלכסוניו של המקבילית BHDI אז y היא נקודת אמצע של הקטע BD
מכאן שהנקודות x ו-y מתלכדות לכן, x היא נקודת אמצע של הקטע GF ושל הקטע IH
אם כך, הנקודה x שייכת לישרים HI ו-GF

קיימות שתי אפשרויות
א $IH\cap GF=\{E\}$ לכן הנקודות x, y ו-E מתלכדות ומכאן שהנקודה E היא נקודת אמצע של BD (אלכסון של המרובע ABCD)
ב $IH\cap GF=IH$ כיוון ש $F\in AE,\ I\in CE$ אפשר להסיק שהנקודות I,H,G,F,E,A,C שייכות לאותו ישר ממסקנה זו ומהנתון $S(\Delta ABE)=S(\Delta CBE)$ אפשר להסיק ש $AE=EC$ ומכאן ש-E היא נקודת האמצע של AC (אלכסון של המרובע ABCD)



(49) **הסקת מסקנה:** לא כל מרובע הוא שטחוני

(50) **הסקת מסקנה ושאלת שאלה:** במשולש ובמרובע המרכזון - אם הוא קיים - הוא יחיד האם ייתכן שבמצולעים אחרים יהיו יותר ממרכזון אחדי

סוף דבר

כפי שנאמר לעיל, המושג 'מצולע שטחוני' הוגדר על-ידי המורה אבל המשתתפים בדיון בנו את משמעותו ואת הקשרים בינו לבין מושגים אחרים המוכרים להם באמצעות השאלות והבדיקות שהם הציבו לעצמם

באירוע זה הכיתה הלומדת נתפסת כקהילה שמתפתחת בה תרבות מתמטית אחד המרכיבים של תרבות זו הוא השפה ומרכיב אחר הוא גורם הסמכות קהילת המורים שהשתתפו בדיון שמתואר לעיל ניסתה ללטש רעיון מסוים והשפה שיחקה תפקיד מרכזי הן כדי להתבטא, להסביר, לנמק, לשאול שאלה או להביא דוגמה, והן כדי לבקש הסבר מהזולת או לבקש ניסוח מחודש של טענה כלשהי כיוון שהמורה לא שיחק את התפקיד של 'מקור האמת', הסמכות לא הייתה בידיו האמת של טענה נקבעה לאחר שהקהילה השתכנעה שאכן טענה זו מתקיימת לכן, התהליך של עידון הדרגתי מחייב - כפי שעולה מהאירוע המתואר - עידון של **ניסוח** הדברים ומכאן, שאירועים מסוג זה מהווים הזדמנויות בעלות פוטנציאל רב לפיתוח השפה המתמטית של הקהילה וגם לקביעת סטנדרטים להוכחה

כפי שעולה מסדר השלבים, הדיון לא התפתח באופן ליניארי במובן זה, שלא תמיד לאחר שאלה הוצגה תשובה לשאלה זו לפעמים התשובה הופיעה לאחר מספר שלבים (ר' למשל השאלה בשלב 4 והתשובה בשלב 8) ובמקרה של השאלה האחרונה, התשובה לא הופיעה כלל - שאלה זו נשארה כמשימה אישית לבית עצם הרישום של השאלות על הלוח איפשר לעקוב לאחר ההתקדמות של הדיון ולבדוק על איזו שאלה כל טענה עונה למשל, שלב 38 נראה לא קשור לשלב הקודם וזאת כי מי שהציע אותו 'נשאר' מתלבט בשאלה שהוצגה בשלב 23

האירוע שתואר מדגים לא רק כיצד מתחדדת הבנת מושגים (ראה ליטוש של המושג 'מצולע שטחוני'), כי אם גם שימוש נכון - וביזמתם של המשתתפים - במונחים כגון 'תנאי מספיק', 'תנאי הכרחי', 'קיים ', 'לכל ', 'דוגמה', 'דוגמה נגדית', 'אחידות', וכו' המשתתפים באירוע זה מצאו את עצמם מעורבים בדיון מתמטי שנמשך כשעה וחצי מגוון השאלות ששאלו מראה, כי השיחה הייתה משמעותית בשבילם וכי מעורבותם הייתה אמיתית

כפי שטענו חזן ולירון (ר' עלייה 19), המוטיבציה החזקה והצורך האישי של המשתתפים להעמיק בהבנת מושג - במקרה זה בהבנת המושג 'מצולע שטחוני' - אחראים לכך, שדיון זה הפך לפעילות מתמטית פורייה, וטוב להמליץ לקוראי עלייה לנסותה עם תלמידיהם

רשימת ספרות

National Council of Teachers of Mathematics [1991] *Professional Standards for Teaching Mathematics* Reston, Va , NCTM

Pimm, D [1987] *Speaking Mathematically Communication in Mathematics Classroom* London, Routledge