חישובי אורך עם מחשבון גרפי

גיורא מן

במסגרת תכנית הלימודים ב-חדו"א (חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי) בחטיבה העליונה אנו לומדים על האינטגרל הלא מסוים שאחד משימושיו הוא חישוב האינטגרל המסוים (אם $F'(x) = f(x)$ אז $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$)

תוצאה זו מנוצלת לשני שימושים עיקריים חישוב שטח בין שני גרפים, וחישוב נפח גוף סיבוב מדוע לא מופיעים בתכנית הלימודים שימושים אחרים, כמו חישוב אורך של קטע גרף, או חישוב שטח מעטפת של גוף סיבובי השאלה מזכירה, כמובן, שאלה מתחום אחר לגמרי מדוע מחפשים את המפתח שאבד מתחת לפנס ולא במקום אחר (למשל, היכן שסביר שהוא אבד)״ כמו שבמקרה המפתח התשובה היא שקל יותר לבצע את החיפוש מתחת לפנס, כך גם במקרה של חישובי אינטגרלים מסוימים קל יותר לבצע אותם במקרים של שטח ונפח גוף סיבוב מאשר במקרים של אורך קו או שטח פנים של גוף סיבוב

האמת היא שגם חישובי שטח ונפח המופיעים בתכנית הלימודים אינם כוללים בהכרח את כל המקרים המעניינים למשל, בדרך כלל, איננו מחשבים את שטח העיגול, וזאת משום ש- $\int\sqrt{1 - x^2}dx$ אינו מידי כמובן שהבעיה מסתבכת עוד יותר אם האינטגרל הלא מסוים אינו מוכר בכלל אמנם, כבר לפני שנים רבות פותחו שיטות נומריות לחישוב אינטגרלים מסוימים, אבל הטיפול בשיטות אלה היה יותר תיאורטי ממעשי במילים אחרות, הוכיחו כל מיני משפטים על ממדי השגיאה שתתקבל, אבל עשו מעט מאוד בכיוון של חישוב בפועל כל זה השתנה בעידן המחשב השינוי הגיע לבתי הספר עם המחשבונים הגרפיים

כך למשל ב-CASIO*fx8700GB*

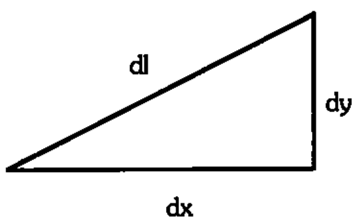
$$\int(\sqrt{}(1 - x^2),-1,0) = 0\ 7854$$

וב-TI82

$$\mathrm{fnInt}(\sqrt{}(1 - x^2), X, -1, 0) = 0\ 7853984608$$

בעוד אשר $\pi / 4 = 0\ 7853981634$ (בשני המקרים חישבנו את $\int_{-1}^{0}\sqrt{1 - x^2}dx$) תרומה מידית של המחשבונים הגרפיים יכולה להיות בדיקת החישובים של אינטגרלים מסוימים באמצעות אינטגרלים לא מסוימים תרומה נוספת שהודגמה כאן היא יכולתם לחשב בקירוב טוב למדיי אינטגרלים מסוימים שאיננו יודעים לחשב בדרכים הקלסיות לבסוף, וזאת אולי התרומה החשובה ביותר, אפשר בעזרת המחשבונים הגרפיים לחשב אינטגרלים מסוימים חשובים שלא עסקנו בהם בעבר בגלל דלות הטכנולוגיה שעמדה לרשותנו

כדי לחשב את אורך קטע גרף הפונקציה $y=f(x)$ מעל לקטע הסגור $[a ,b]$, נחלק את הקטע ל-n קטעים שווים שאורך כל אחד מהם dx נתבונן בקטע הגרף שמעל dx שנקרא לו dl בדרך כלל הקטע dl משופע ומהווה יתר במשולש ישר זווית שבו הניצבים הם dx ו-dy



כמובן, שהיתר במשולש ישר זווית זה אינו בהכרח ישר אבל אם dx מספיק קטן (כלומר n מספיק גדול), מדובר בכמעט משולש ישר זווית באשר לאורך היתר

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

אם נוציא את dx מחוץ לסוגריים, נקבל

$$dl = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\,dx = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

מכאן נובע

$$\mathrm{length}(f(x),a,b) = \lim\sum\sqrt{1 + y'^2}dx = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

גם חישוב הנגזרת אינו בהכרח משימה קלה לכן במקרה של TI82 נשתמש בנגזרת הנומרית, nDeriv, הנותנת קירוב מספרי לנגזרת באופן הבא

$$\mathrm{nDeriv}(f(x), x, a) = \frac{f(a + 0\ 001) - f(a - 0\ 001)}{0\ 002}$$

נפנה כעת לספריית הפונקציות =Y ונרשום כ- Y_1 את הפונקציה הנתונה $f(x)$, כ-Y_2 נרשום את הנגזרת הנומרית $\mathrm{nDeriv}(Y_1,X,X)$ וכ-Y_3 נרשום את $\sqrt{}(1 + Y_2^2)$ נחזור למסך העיקרי ונחשב את האורך בעזרת fnInt (מספר 9 בתפריט MATH)

למשל נציב $Y_1=\sin X$ ונקבל עבור הקשת שמעל הקטע הסגור $[0,\pi]$ $\mathrm{fnInt}(Y_3, X, 0, \pi) = 3\ 820197589$ מכאן נובע שהיקפו של השטח הכלוא בין הקטע הסגור $[0,\pi]$ והקשת של הסינוס הוא 6 961790243, בעוד שהשטח עצמו שווה ל-2 ראינו שאורך הקשת של $\sin(x)$ המחברת את (0,0) עם $(0,\pi)$ הוא 3 820197589 אם נחשב באופן דומה את אורך הקשת של $0\ 5\sin(2x)$ המחברת אותן נקודות נקבל תוצאה קרובה 3 82019699 כיוון שההבדל בין התוצאות הוא רק בספרה השישית מימין לנקודה העשרונית עולה החשד שאורכי שתי הקשתות שווים ורק בגלל

בשיטת החישוב נתקבלו תוצאות שונות. אפשר כמובן לאשר את החשד (בהתבסס על כך שהפונקציה השנייה מתקבלת מן הראשונה על-ידי כיווץ פי שניים!) זאת הזדמנות מעניינת שבה תוצאה נומרית מובילה להשערה תיאורטית

כדוגמה שנייה נחשב את אורך הקשת של $y=x^n$ עבור ערכים שונים של n בין הנקודות (0,0) ו-(1,1) אם n=2 מקבלים אורך קשת 1 478942858, אם n=3 אז אורך הקשת הוא 1 547866183, ואם n=4 אז אורך הקשת הוא 1 600230775, וכו' בהזדמנות זו נעיר שבכל חישוב חדש מספיק לשנות את המעריך ב-Y_1, לחזור למסך הראשי ולחשב שוב אותו אינטגרל תוך שימוש ב-2nd, ENTRY

אורך קשת המעגל שמרכזו בנקודה (0,1) ורדיוסו 1 המחברת את שתי הנקודות לעיל הוא $\pi/2 = 1\ 570796327$ עבור איזה ערך של n (אולי שבור) יהיה אורך הקשת כאורך קשת המעגלי מן התוצאות הקודמות מתברר שצריך להתקיים $3<n<4$ עריכת מספר חישובים החל ב-3 5 מובילה לתוצאה n=3 4045 (הניתנת כאן בדיוק של ארבע ספרות מימין לנקודה העשרונית) שאז אורך הקשת הוא 1 570797948 אפשר כמובן לשאול גם היכן צריך להימצא מרכז המעגל העובר דרך שתי הנקודות הנתונות באופן שהדרך הקצרה על המעגל בין שתי הנקודות תהיה שווה לדרך ביניהן על $y = x^2$ הדרך האחרונה ידועה 1 478942858 (נכניס אותה לזיכרון B) מרכז המעגל המבוקש חייב להימצא על האנך האמצעי לקטע המחבר את שתי הנקודות, על הישר y=1-x גודלו של רדיוס המעגל הוא $Y_1 = \sqrt{2x^2 - 2x + 1}$ אורך המיתר המחבר את שתי הנקודות הוא $\sqrt{2}$ לכן, גודל הקשת הקצרה של המעגל בין שתי הנקודות הוא $Y_2 = 2Y_1 \sin^{-1}(1 / Y_1\sqrt{2}))$ אם נפתור את המשוואה $Y_2 = X$ נגלה כמובן את מרכז המעגל המבוקש לשם כך נשתמש באלגוריתם לפתרון משוואות $\mathrm{solve}(Y_2\text{-}B,X,O)$ ונקבל שמרכז המעגל המבוקש הוא

(M,N)=(M,1-M)=(-0 381692049,1 381692049) יש כמובן פתרון נוסף סימטרי לפתרון הראשון יחסית לישר y=x, אבל אנו נסתפק בפתרון הראשון נבדוק כעת את אורך קשת המעגל לשם כך נבצע חשמה $Y_1(M) \to R$, ואז משוואת המעגל היא $(x - M)^2 + (y - N)^2 = R^2$, יוצא שמשוואת הקשת התחתונה של המעגל היא

$$y = N - \sqrt{R^2 - (x - M)^2}$$

נחשב כעת את אורך קשת המעגל בשיטה שתוארה למעלה ונקבל

fnInt(Y3,X,0,1)=1 478948371 שסוטה מן התוצאה הנכונה רק אחרי הספרה השישית שמימין לנקודה העשרונית

נסיים בדוגמה הבאה בכמה אחוזים ארוכה הדרך מ-$(\pi,0)$ אל $(2\pi,0)$ על הגרף של $y = \frac{\sin(x)}{x}$ מן הדרך הקצרה בין שתי הנקודות? אורך הדרך הקצרה הוא, כמובן, π נחשב את הדרך הארוכה בשיטה שלמדנו, ונקבל 3 180012519 על כן, דרך זו גדולה ב-22% 1 מן הדרך הקצרה

בשיטות דומות אפשר לחשב שטח מעטפת או פנים של גוף סיבוב הנוסחה לשטח המעטפת היא

$$M = \int_a^b 2\pi y\sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

נניח שהשטח הכלוא בציר X ובגרף הפונקציה y=sin(x) בין 0 ו-π יצר גוף סיבוב (על-ידי סיבוב סביב ציר X) נחשב את שטח המעטפת (שהוא גם שטח הפנים)

$\mathrm{fnInt}(2\pi Y_1,Y_3,X,O\pi)$=14 42359889 (כאשר הפונקציות הן אותן פונקציות כמו בחישובי האורך) ראוי להעיר שחישוב שטח הכדור אינו דורש כל שיטות נומריות ומתקבל ישירות מנוסחת שטח המעטפת

לסיכום לתלמידים נאמר, כי זו הפעם הראשונה בהיסטוריה של הוראת המתמטיקה, ששימוש בכלים הנומריים של המחשבון הגרפי מאפשר לעסוק בנושאים בסיסיים, ובמאמץ סביר לבצע חישובים שנמנענו מהם בעבר בגלל היעדר טכנולוגיה חישובית החיסרון של חישובים אלה הוא שאינם סימבוליים, ואפילו התוצאות המספריות אינן מדויקות במיוחד עם זאת, גם התוצאות המקורבות מאפשרות העלאת השערות ובעקבותיהן הוכחות מתמטיות הצעד הבא יהיה מעבר ל-CAS ואז נחליף את הגזרת הנומרית בנגזרת עצמה, ונוכל להעלות את הדיוק עוד יותר יותר מכך, כאשר CAS מכירה את האינטגרל הבלתי מסוים, היא מחשבת בעזרתו את האינטגרל המסוים ואז שוב גדל הדיוק אנו רואים דוגמה נוספת לתמיכה של הטכנולוגיה המאפשרת רענון תכנית הלימודים ושחרור אנרגיה מעיסוק בחישובים לעיסוק בחשיבה