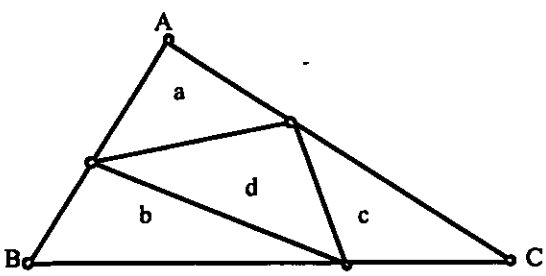
משימה בגיאומטריה אוקלידית

דן בוחניק

בעיה

נתון משולש כלשהו ABC **ונתונות** 3 נקודות כלשהן על צלעותיו, כך שאם נעביר ישרים בין 3 נקודות אלה נקבל שהמשולש ABC מתחלק ל-4 משולשים קטנים נסמן את שטחם ב- a, b, c, d. המשולש d, הוא המשולש 'המרכזי' (ראה איור 1)

צריך להוכיח שלפחות שטח של משולש אחד a, b או c, קטן או שווה לשטח המשולש d (כלומר, $a \le d$, $b \le d$ או $c \le d$)

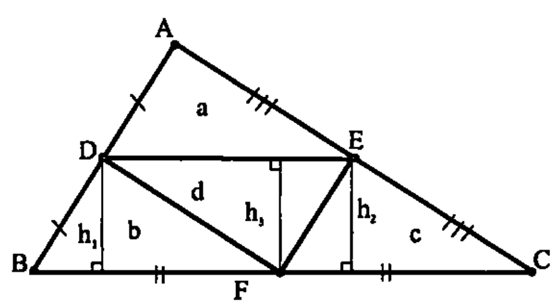


איור 1

פתרון

אם 3 הנקודות F<D<E על צלעות המשולש ABC, הן נקודות האמצע של הצלעות (ראה איור 2) נקבל כי

$DE \parallel BC,\quad EF \parallel AB,\quad DF \parallel AC$



איור 2

נסמן ב- h_1 h_2 ו-h_3 את הגבהים למשולשים ששטחם b,c,d בהתאמה (ראה איור 2) משוויון (1) נובע $h_1=h_2=h_3$ (2)

DE הוא קטע אמצעים במשולש ABC לכן $DE\ 2=BC$ ולכן

$DE=BF=FC$ (3)

מ-(2) ו-(3) מקבלים $h_1\,BF=h_2\,FC=h_3\,DE$

כלומר

$\boxed{b = c = d}$

* באותה צורה נוריד אנכים בין FE ו- AB, ונקבל

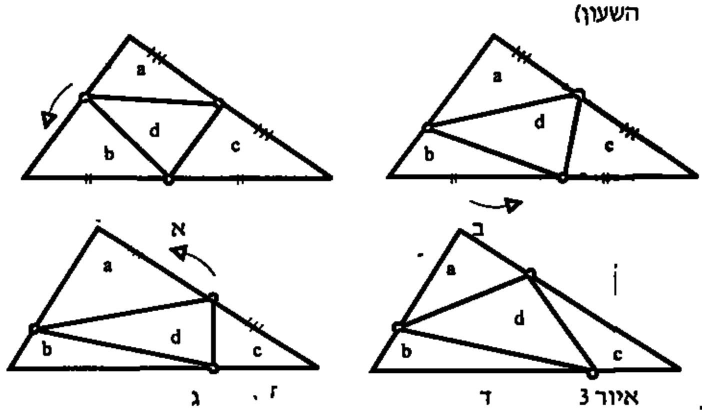
$* a = b = d$

סה"כ $x = a = b = c = d$ ו- $S_{\Delta ABC} = 4x$

מסקנה: אם מחברים את אמצעי הצלעות במשולש, נוצרים 4 משולשים 'קטנים', ששטחם שווה זה לזה (a=b=c=d)

מהמצב המקורי שבו 3 הנקודות הן אמצעי הצלעות של המשולש ABC, אפשר ליצור את **כל** המשולשים ('הקטנים') האפשריים בין 2 מקרים:

א הזזת הנקודה/ות **לאותו כיוון** (עם כיוון השעון או נגד כיוון השעון)

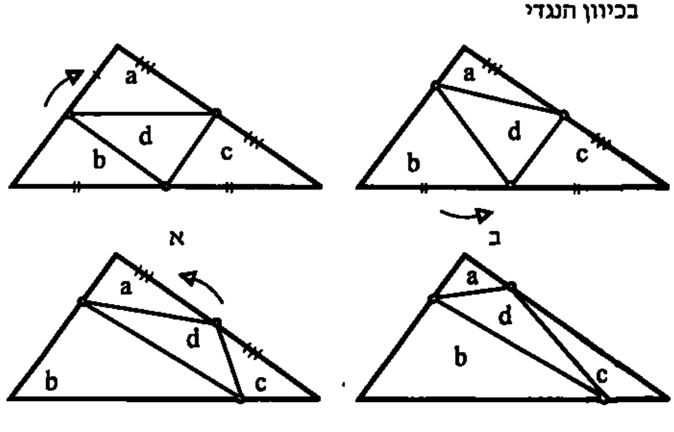


איור 3

הזזנו 3 נקודות   הזזנו 2 נקודות   הזזנו נקודה אחת

הערה: שיטת ההוכחה זהה גם אם מזיזים את הנקודה/ות בכיוון הנגדי

ב הזזת נקודה אחת בכיוון אחד והזזת נקודה/ות אחרת/ות בכיוון הנגדי



איור 4

איור 4

הערה: הזזנו את הנקודה המונחת על הצלע AB עם כיוון השעון, ואת הנקודה/ות האחרת/ות נגד כיוון השעון

שיטת ההוכחה היא זהה גם אם מזיזים את הנקודות בכיוונים הנגדיים (פשוט קוראים את ההוכחה מול מראה) כמו כן ההוכחה זהה גם אם בוחרים להזיז את הנקודה שעל הצלע BC או AC לכיוון אחד, ואת הנקודות האחרות בכיוון הנגדי

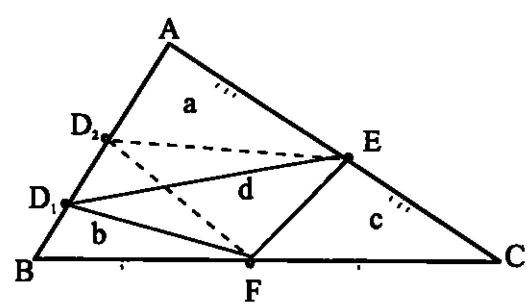
בכל מקרה של הזזת הנקודות בכיוונים שונים יש שתי נקודות המוזזות באותו כיוון

מכאן נובע ששני המקרים שציינו כוללים את כל המצבים האפשריים

ניתוח מקרה א

1 המצב המקורי הוא $x = a = b = c = d$

עתה נזיז את D נגד כיוון מחוגי השעון



איור 5

השטח a גדל ל-'AD (AD גדל והגובה לצלע זו לא משתנה)

b קטן (BD קטן ל-'BD והגובה לצלע זו נשאר ללא שינוי)

d איננו משתנה ושוב EF והגובה אליו אינם משתנים (כי AB || EF)

קיבלנו מצב חדש

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= a + \Delta a \\ b_1 &= b - \Delta b \\ c_1 &= c \\ d_1 &= d \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad b_1 < c_1 = d_1 < a_1 \Rightarrow b_1 < d_1$$

b_1

במילים אחרות, יש משולש b_1 ששטחו קטן משטח המשולש "המקורי"

הערות: א. שינוי השטח Δ הוא תמיד ערך חיובי

ב סכום כל השינויים בשטחים שווה לאפס כי

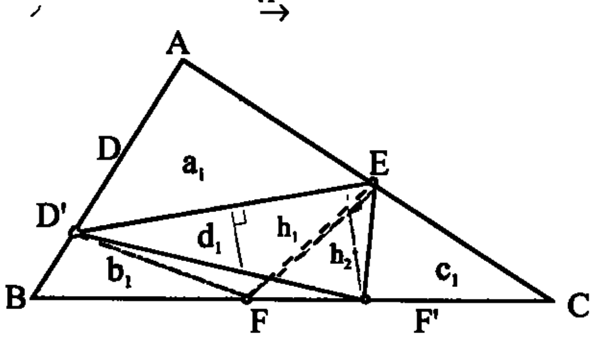
$$\Delta a - \Delta b = 0 \Rightarrow \quad \Delta a = \Delta b$$

שטח המשולש ABC הוא קבוע ושווה ל- 4x.

2 המצב התחלתי הוא המצב שקיבלנו ב-1

$$b_1 < c_1 = d_1 < a_1$$

נזיז את F נגד כיוון השעון ל- $\overrightarrow{F'}$.



איור 6

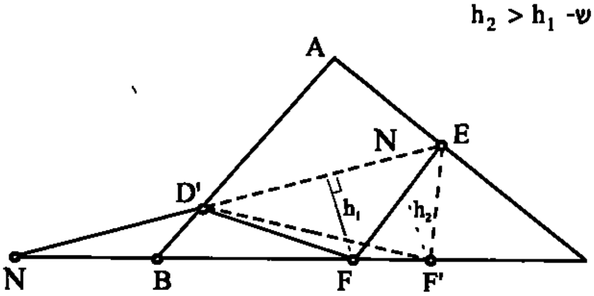
a_1 - לא משתנה

b_1 גדל כי BF גדל והגובה אליו לא משתנה

c_1 קטן כי CF קטן והגובה אליו נשאר קבוע

d_1 גדל כי הגובה גדל $h_2 > h_1$ והבסיס DE נשאר קבוע

הסבר $h_2 > h_1$, כי אם נמשיך את D'E ו- BF', הם ייפגשו בנקודה M קיבלנו משולש ΔMNF. (N - נקודת החיתוך של הגובה h_2 עם D'E), $h_1 \,||\, h_2$ ולכן לפי משפט תאלס ברור ש- $h_2 > h_1$



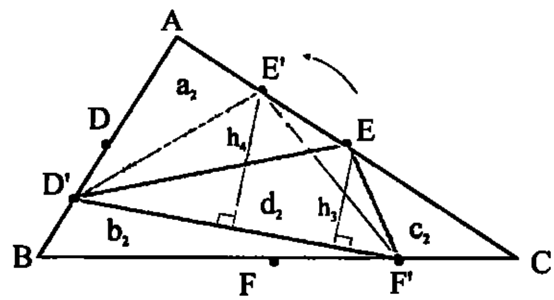
איור 7

קיבלנו מצב חדש

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= a_1 \\ b_2 &= b_1 + \Delta b_1 \\ c_2 &= c_1 - \Delta c_1 \\ d_2 &= d_1 + \Delta d_1 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} & c_1 = d_1 \\ \Rightarrow\ & c_2 < c_1 \\ \Rightarrow\ & d_2 > d_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_2 < d_2$$

לכן אם מזיזים 2 נקודות באותו כיוון, תמיד יהיה משולש c_2 הקטן בשטחו מהמשולש המרכזי d_2

3 המצב ההתחלתי הוא המצב הקודם שבו $c_2<d_2$ מזיזים את E ל-'E, בכיוון הפוך למחוגי השעון



איור 8

a_2 קטן, הבסיס AE קטן והגובה נשאר קבוע

b_2 - לא משתנה

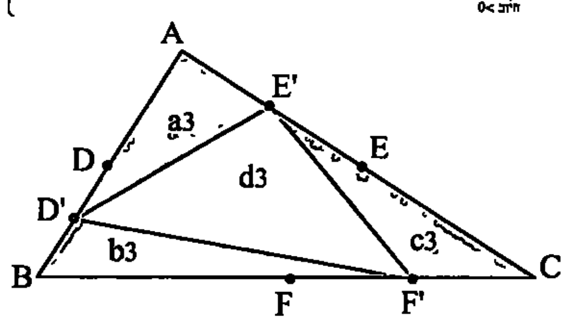
c_2 גדל, הבסיס CE גדל והגובה קבוע

d_2 גדל, הגובה גדל, $h_4 > h_3$, והבסיס D'F' נשאר ללא שינוי

הסבר: מראים כי $h_4 > h_3$ באותה דרך שהראינו ב-2-ש $h_2>h_1$

המצב שהתקבל הוא

$$\begin{cases} a_3 = a_2 - \Delta_{a_2} = a_1 - \Delta_{a_2} = a + \Delta_{a_2} = x + \Delta_{a} - \Delta_{a_2} \\ b_3 = b_2 \qquad = b_1 + \Delta b_1 = b - \Delta b + \Delta b_1 = x - \Delta b + \Delta b_1 \\ c_3 = c_2 + \Delta c_2 = c_1 - \Delta c_1 + \Delta c_2 = c - \Delta c_1 + \Delta c_2 = x - \Delta c_1 + \Delta c_2 \\ d_3 = d_2 + \Delta d_2 = d_1 + \Delta d_1 + \Delta d_2 = d + \Delta d_1 + \Delta d_2 = x + \underbrace{\Delta d_1 + \Delta d_2}_{\text{חיובי } 0<} \end{cases}$$



איור 9

היות ש- $d_3=x+\Delta d_1+\Delta d_2$ ו- $x=d$ מקבלים כי בהשוואה למצב ההתחלתי המקורי d גדל כלומר, $d_3>d$

$$S_{\Delta ABC} = 4x = a + b + c + d = \underbrace{a_3 + b_3 + c_3}_{x3>} + d_3$$

$d_3>x$ לכן $a_3+b_3+c_3<3x$

היות ש- d גדל, a+b+c קטן לכן a קטן או/ו b קטן או/ו c קטן מכיוון שבמצב ההתחלתי 'המקורי' a=b=c=d, מקבלים כי יש תמיד משולש אחד לפחות ששטחו קטן מ-d_3

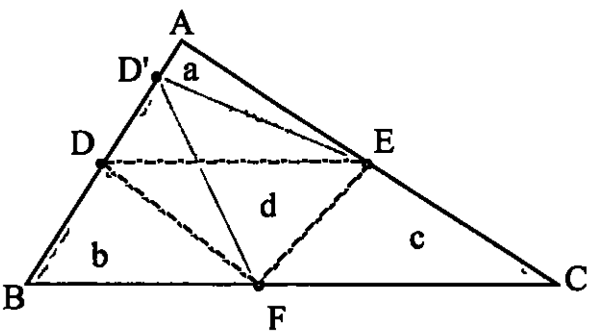
$$\left.\begin{matrix} \Rightarrow d\uparrow \Rightarrow (a+b+c)\downarrow \Rightarrow c\downarrow \text{ ¥/¥ˆ } b\downarrow \text{ ¥/¥ˆ } a\downarrow \\ a=b=c=d \end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

מסקנה כאשר מזיזים 3 נקודות באותו כיוון, תמיד יש משולש אחד לפחות, שקטן מהמשולש 'המרכזי' (d_3)

ניתוח מקרה ב

1 המצב ההתחלתי הוא המצב המקורי a = b = c =d

מזיזים את D בכיוון מחוגי השעון לנקודה 'D



איור 10

1 a קטן ראה הסבר א1

2 b גדל ראה הסבר א1

c נשאר קבוע

d נשאר קבוע ראה הסבר א1

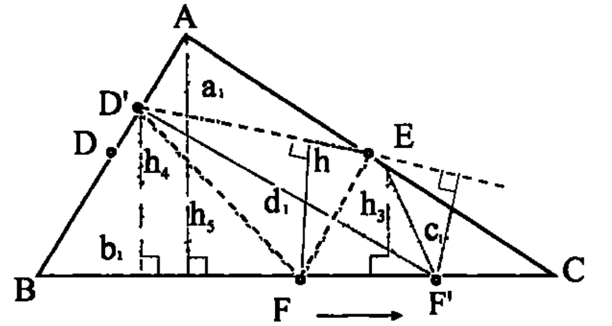
$$\left.\begin{matrix} a_1 = a - \Delta a \\ b_1 = b + \Delta b \\ c_1 = c \\ d_1 = d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_1 < c_1 = d_1 < b_1 \Rightarrow a_1 < d_1$$

מסקנה אם מזיזים נקודה אחת מהמצב 'המקורי', תמיד נוצר משולש אחד קטן יותר מהמשולש 'המרכזי'

הערה ההוכחה זהה להוכחה שניתנה ב-א1, אלא שהפעם הזזנו את הנקודה עם כיוון השעון

2 מצב התחלתי $a_1 < c_1 = d_1 < b_1$

מזיזים את הנקודה F בכיוון הפול למחוגי השעון לנקודה 'F



איור 11

a_1 - נשאר קבוע

b_1 גדל - הבסיס BF גדל, הגובה נשאר ללא שינוי

c_1 קטן - הבסיס CF קטן, הגובה נשאר קבוע

d_1 קטן - הגובה קטן, $h_2 < h_1$, הבסיס D' E נשאר ללא שינוי

האם $\Delta d_1 < \Delta c_1$?

נוריד אנך מהנקודה E ל-FC (נסמן את האנך על-ידי h_3)
ונוריד אנך מהנקודה D' ל-FC (h_4)

$$\Delta c_1 = \frac{1}{2}\ FF'\ h_3$$

$$\Delta d_1 = \frac{1}{2} FF'\ h_4 - \frac{1}{2} FF'\ h_3 = \frac{1}{2}\ FF'(h_4 - h_3)$$

הנקודה E היא אמצע הקטע AC לכן אם היינו מורידים אנך (גובה) מהנקודה A ל-BC (h_5), אזי $h_5 = 2\ h_3$

את הנקודה D הזזנו לכיוון הנקודה A כלומר הנקודה D' היא בין A ל-D
לכן $h_4>h_3$

המצב שבו h_4 הוא מקסימלי (שווה ל-h_5), מתקבל כאשר $A = D'$

אולם אם $A= D'$ כי אז שטח המשולש a שווה ל-0 בסתירה לנתון שבמשולש ABC יש 4 משולשים) משום כך $A \neq D'$ ולכן

$$h_4 < h_5 \Rightarrow h_4 < 2h_3$$

$$\Delta d_1 = \frac{1}{2} FF'(h_3 - h_4) < \frac{1}{2} FF'\ h_3 = \Delta a_1$$

$h_4<h_3$ לכן $\Delta d_1<\Delta c_1$ ומכאן מקבלים כי

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = a_1\\ b_2 = b_1 + \Delta b_1\\ c_2 = c_1 - \Delta c_1\\ d_2 = d_1 - \Delta d_1 \end{array}\right\} \Rightarrow c_2 < d_2 < b_2$$

מסקנה אם מזיזים מהמצב המקורי 2 נקודות בכיוונים מנוגדים,

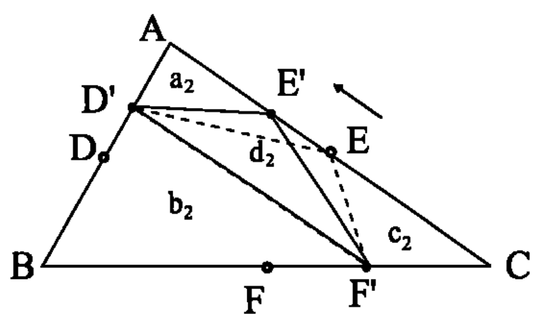
תמיד יהיה משולש (C_2) הקטן בשטחו מהמשולש 'המרכזי'

הערה: מתקיים גם $a_2 < d_2$ (ראה להלן)

3 המצב ההתחלתי

$$\begin{cases} a_2 < b_2\\ c_2 < d_2 < b_2 \end{cases}$$

מזיזים את הנקודה E בכיוון הפוך למחוגי השעון לנקודה E'



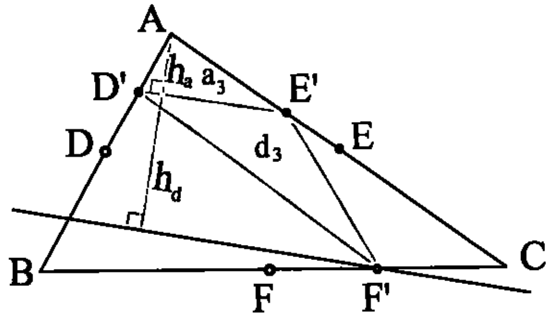
איור 12

a_2 קטן - הבסיס AE קטן, הגובה נשאר קבוע

b_2 - לא משתנה

c_2 גדל - הבסיס ce גדל, הגובה איננו משתנה

d_2 ?



איור 13

ננסה להוכיח ש- $a_3 < d_3$

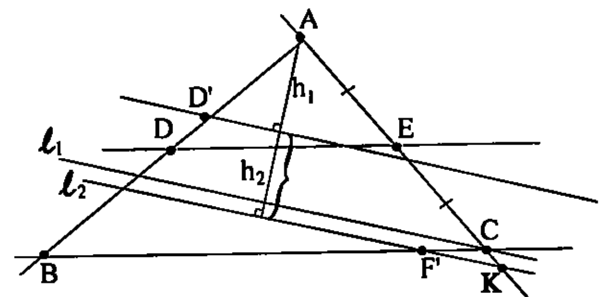
במשולשים a_3 ו-a'_3 הבסיס D'E' הוא משותף,

$$a_3 = \frac{1}{2} D'E'h_a$$

$$d_3 = \frac{1}{2} D'E'h_d$$

לכן, אם נראה ש- $h_a < h_d$ (ללא הגבלת הכלליות), סיימנו

הנקודה D היא אמצע קטע AB, הנקודה E היא אמצע קטע AC, לכן DE|| BC



איור 14

1) מקרבים את הנקודה D לכיוון A (ל- 'D)
מעבירים ישר D'E דרך הנקודה C מעבירים ישר ℓ_1, מקביל ל-D'E (קיים רק ישר אחד כזה, לפי אקסיומת המקבילים) 'F היא נקודה על BC

דרך הנקודה 'F מעבירים ישר ℓ_2, מקביל ל-D'E מהנקי A מורידים אנך ל-D'E (h_1), וממשיכים אותו עד ל-ℓ_2
את המרחק בין D'E ל-ℓ_2 נסמן ב-h_2 (גובה במשולש $\Delta D'EF$)
נקודת המפגש של ℓ_2 עם המשך AC נסמך ב-K

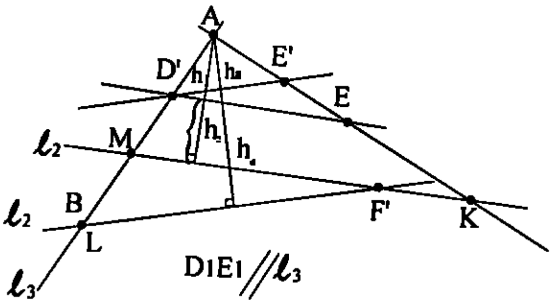
הנקודה 'F שווה מהנקודה C בסתירה לנתון של קיום 4 משולשים 'קטנים' לכן על-פי משפט $D'E \parallel \ell_1 \parallel \ell_2$ תאלס

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{EC+CK}{AE} = \frac{EC}{AE} + \frac{CK}{AE} = 1 + \frac{CK^{1^0}}{AE} > 1 \Rightarrow h_2 > h_1$$

מסקנה: כאשר מזיזים רק את הנקודה D לכיוון A, אזי גובה המשולש $\Delta AD'E$ (h_1) קטן מגובה המשולש D'EF' (h_2)

הערה הוכחה זו תקפה גם למשולש חד זווית וגם לקהה זויות

2) מקרבים את הנקודה E לכיוון A (ל-'E)



איור 15

את נקודת המפגש של הישר ℓ_2 עם AB נסמן ב-M
נעביר ישר בין 'D ל-'E (D' E')
דרך 'F נעביר ישר, ℓ_3, ומקביל ל-D'E'
הישר ℓ_3 חייב לחתוך את המשך הישר AM (היות שלא ייתכן ש- M = F'), נסמן את נקודת החיתוך ב-L
מהנקודה A נוריד אנך ל-D'E' (h_a) ואת המרחק מ-D'E' ל-ℓ_3 נסמן ב-h_d
על-פי משפט תאלס מקבלים

$$\Rightarrow 1 < \frac{h_2}{h_1} = \frac{D'M}{AD'} < \frac{DM'+ML}{AD'} = \frac{h_d}{h_a} \Rightarrow h_d > h_a \Rightarrow d_3 > a_3$$

מסקנה כאשר מזיזים מהמצב 'המקורי' 2 נקודות בכיוונים נגדיים, ואת הנקודה השלישית (נגד כיוון השעון), אזי תמיד נוצר משולש אחד a_3 שקטן בשטחו מהמשולש 'המרכזי'

סיכום

דנו בכל המקרים האפשריים והראינו כי תמיד יש משולש שקטן בשטחו או שווה למשולש 'המרכזי'

ההוכחה נכונה (זהה) גם עבור משולש חד זווית ומשולש קהה זווית

הערות

א ב1 למעשה מיותר, כי א1 ⇔ ב1
ב גם ב2 מיותר, כי ב3 מכיל את שני המצבים
ג ב3 מכסה גם את א2