

יחסי אהבה-שנאה בין מספרי לוקאס למספרי פיבונצ'י

גאוס, שמצא את נוסחת הסכום של טור חשבוני ועל ידי כך היה מסוגל למצוא את סכום 100 המספרים הטבעיים הראשונים, תוך מספר שניות, בעוד מורחו מתכוון לנגוס מהסנדוויץ'.

אריה רוקח
קדומים

יובכן, מהו המספר, ואיך חישובת אותו האם השתמשת במחשבון? שאל המורה בתדהמה

'המספר המבוקש הוא 12,586,269,025' ענה חקרני לקול תשובות חבריו 'לא השתמשתי במחשב. אסביר את שיטת החישוב שלי בשיעור הבא'

א. והמספר המבוקש הוא...

באותו בוקר, הייתה רוחו של המורה למדני מרוממת במיוחד יום קודם לכן, לימד בכיתה על סדרת מספרי פיבונצ'י ועל אחד השימושים שלה בפתרון חידת המטבעות המזויפים הוא פנה אל הכיתה נרגל כעת את חישובי מספרי פיבונצ'י חשבו נא את האיבר ה-50 בסדרה

התלמידים הוציאו נייר ועיפרון והחלו לעבוד בהתחלה, זה הלך קל מאוד

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \\ F_2 &= F_0 + F_1 = 0 + 1 = 1 \\ F_3 &= F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

ב. מספרי לוקאס עוזרים לחישוב מספרי פיבונצ'י

לשיעור הבא הופיע למדני נסער כולו 'יש משחתי איך חישובת מספר שכזה ב-5 דקות' אני הצלחתי, לאחר הרבה טעויות בחישובים, להגיע לתוצאה נכונה רק כעבור כשעה" קרא המורה לעברו של חקרני וזה, כולו חיוכים, ניגש לוח, וללא הסברים צייר את הטבלה הבאה

0	3	21	144
1	5	34	233
1	8	55	377
2	13	89	610

'האם אתם מבחינים במשהו מיוחד בטבלה זו?' שאל חקרני 'בוודאי, אלו הם מספרי פיבונצ'י, מסודרים במטריצה, 4 מספרים בעמודה אחת, לא איחורה התשובה לבוא 'נכון מאוד, ואולם, יש לפחות תכונה מעניינת נוספת במטריצה זו האם מישהו יכול להצביע עליה?'

כעבור מספר דקות של שתיקה, ריחם עליהם ואמר 'שימו לב לקשר בין העמודות המספרים בעמודה הרביעית, למשל, הם כפולה ב-7 של המספרים שמולם בעמודה השלישית, פחות המספר המתאים בעמודה השנייה לדוגמה, $144 = 21 \cdot 7 - 3$ וכך $55 = 7 \cdot 8 - 1$

המורה למדני פיוס לעצמו וחשב הפעם אוכל לאכול את הסנדוויץ' שלי בשלווה הוא הוציא את הסנדוויץ' ואת התרמוס ובירך את מספרי פיבונצ'י ואת ממציאם הוא העיף מבט בכיתה התלמידים החלו זה עתה לגלות כי בכל שלב של החישוב נעשים המספרים גדולים יותר, והחישוב נעשה קשה יותר הוא תפש שבעצם יוכל לבדוק את כל המבחנים הנמצאים בתיקו, ועוד יישאר לו זמן רב הוא שיער לעצמו שראשון התלמידים יגיע לתוצאה המבוקשת כעבור עבודה מאומצת של לפחות שעתיים, וגם אז, רבים הסיכויים שהתוצאה תהיה שגויה. המורה טוב הלב חשב לעצמו 'אולי אתיר לחם לעבוד עם מחשבון'

אבל אז, בדיוק חמש דקות מתחילת העבודה, נשמע קולו של התלמיד חקרני 'המורה, סיימתי' המורה היה המום האיבר ה-50 בסדרת פיבונצ'י הוא מספר בן 11 ספרות, זאת הסיק מתוך נוסחת Binnet². האם אפשר לחשב אותו באופן מדויק וכל זאת תוך 5 דקות? האם חוזר פה הסיפור של הילד

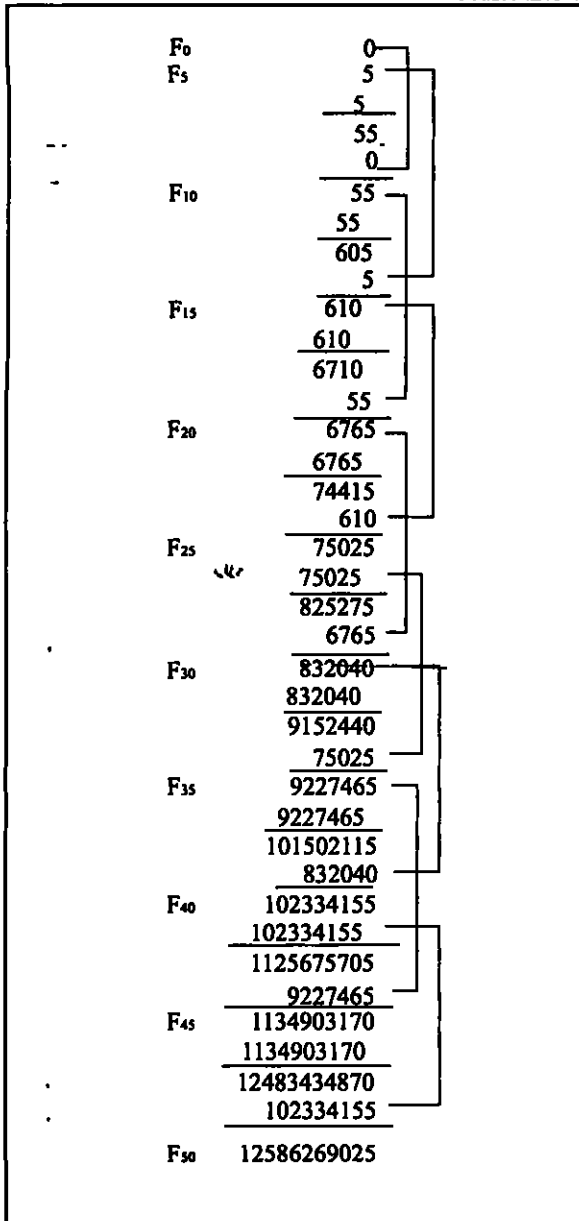
1 נוסחת Binnet

$$\begin{aligned} F_n &= (\alpha^n - \beta^n) / \sqrt{5} \\ \alpha &= (1 + \sqrt{5}) / 2, \quad \beta = (1 - \sqrt{5}) / 2, \end{aligned}$$

התלמידים הזריזים בנו בינתיים טבלה חדשה

0	5	55	610
1	8	89	987
1	13	144	1597
2	21	233	2484
3	34	377	4181

כדאי להשתמש במטריצה בגודל עמודה 5, כי אז המספר החמישי בסדרת לוקאס הוא 11 בכפל מאונך, הכפלה ב-11 היא למעשה חיבור שתי שורות זהות, בהזזה של השורה השנייה ב-1 זהו בוודאי הטריק שהשתמשת בו כדי לחשב את האיבר ה-50 בסדרה במהירות אסטרונומית" חקרני הניד ראשו בהסכמה, ניגש ללוח והחל לשחזר את חישובו המהיר



עתה נשמעו כבר קריאות הפתעה בכיתה יש פה אותה חוקיות כמו בטבלה הקודמת, אלא שההכפלה היא ב-11 ובמקום לחסר את האיבר מהעמודה הקודמת, מחברים אותי מעניין, מה יהיה אם במקום מטריצה של 5 שורות נבנה מטריצה של 6 שורות של 7 שורותי האם תהיה חוקיות דומהי מה יהיו גורמי ההכפלה"

חקרני חיך מאוזן לאוזן יובכן, לכל הטבלאות יש אותה חוקיות הגורם המכפיל, עבור טבלה בת k שורות, הוא האיבר ה-k בסדרת מספרי לוקאס, כאשר הסדרה היא 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29. .

סדרה זו מזכירה את סדרת פיבונצ'י בכך שכל איבר הוא סכום שני קודמיו ההבדל בינה לבין סדרת פיבונצ'י הוא בכך שהיא מתחילה במספרים 1, 3, בעוד שסדרת פיבונצ'י מתחילה במספרים 0, 1 באופן מתמטי מדויק, אפשר לנסח את הכלל שמצאנו בין עמודות המטריצה באופן הבא

$$F_{n+k} = F_n L_k + (-1)^{k+1} F_{n-k}$$

כאשר F_n הוא המספר ה-n בסדרת פיבונצ'י, ו- L_k הוא המספר ה-k בסדרת לוקאס

נוסחה זו מאפשרת לחשב את מספרי פיבונצ'י על ידי הכפלות וסכומים, ולא רק על ידי סכומים אם נחזור למטריצות המופלאות שלמעלה, נבין כי הבחירה באיזה גודל עמודה כדאי להשתמש היא בידינו אם נבנה מטריצה שבה גודל העמודה הוא 2, נוכל לחשב את מספרי פיבונצ'י על-ידי הכפלה ב-3, כי האיבר השני בסדרת לוקאס היא המספר 3 אם נבנה מטריצות שבהם גודל העמודה הוא 3, נוכל לחשב את המספרים האלה על-ידי הכפלה ב-4, כי המספר השלישי בסדרת לוקאס המופלאה הוא 4 נניח שאני מתכוון לחשב את האיבר ה-50 בסדרת פיבונצ'י, איזה גודל עמודה כדאי לבחור"

כאן הפסיק חקרני את הרצאתו והתבונן בכיתה בצפייה להברקה שתבוא. זו, כמובן, לא איחרה לבוא

ירואים אתם, אפוא, שאכן אפשר להגיע לאיבר ה-50 בסדרה תוך 5 דקות, וכל זאת בעזרת מספרי לוקאס העוזרים לחשב את עמיתיהם, מספרי פיבונצ'י ואולם, למרות קשר הדוק זה,

בסדרה זו יש 12 מספרים והיא שונה לחלוטין מהסדרה המקבילה שלמעלה
 סדרת פיבונצ'י וסדרת לוקאס הן, אפוא, 2 סדרות אצילות ומיוחדות בעולם המספרים יש ביניהן קשרים - סדרת לוקאס מסייעת לחשב את סדרת פיבונצ'י במהירות מדהימה יש ביניהן גם יחסי זרות כפי שראינו
 ויש עוד הרבה ללמוד עליהן ולגלות סיים חקרני

יש מקרה אחר, שבו מספרי פיבונצ'י ומספרי לוקאס מסתגרים זה מפני זה, כפי שנראה'

ג. יחס זרות בין שתי קבוצות המספרים

נתבונן בסדרה המבטאת את הספרה האחרונה של מספרי פיבונצ'י ונכתוב את כל המספרים, עד שהסדרה חוזרת על עצמה

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, 5, 9, 4, 3, 7, 0 7, 7, 4, 1, 5, 6, 1, 7, 8, 5, 3,
 8, 1, 9 0, 9, 9, 8, 7, 5, 2, 7, 9, 6, 5, 1, 6 7, 3 0, 3, 3 6, 9, 5, 4, 9, 3,
 2, 5, 7, 2, 9, 1,
 0, 1, 1

בסדרה זו יש 60 מספרים נבנה סדרה כזו עבור מספרי לוקאס
 1, 3, 4, 7, 1, 8, 9, 7, 6, 3, 9, 2,
 1, 3

ספרות:

A Rokach, 'Optimal Computation of Fibonacci Numbers,' *The Fibonacci Quarterly*, November 1996

נצא כאינטרנט:

הוראת מתמטיקה 1950 - 1990

1980

חוטב עצים מוכר משאית של בולי עץ
 תמורת \$ 100 עלות הייצור היא \$ 80
 והרווח הוא \$ 20 המטלה שלך מתח קו
 מתחת ל-20

1950

חוטב עצים מוכר משאית של בולי עץ
 תמורת \$ 100 עלות הייצור היא 4/5 של
 המחיר מהו הרווח שלי

1990

על-ידי חיטוב עצים ביער יפהפה מרוויח
 החוטב \$ 20 מה דעתך על דרך חייו
 נושא לדיון כיתתי לאחר מתן תשובה
 לשאלה הנ"ל איך הרגישו ציפורים וסנאים
 ביער כאשר חטב האיש את העצים אף
 תשובה לא תיחשב לבלתי נכונה.

1960

חוטב עצים מוכר משאית של בולי עץ
 תמורת \$ 100. עלות הייצור היא 4/5 של
 המחיר, או \$ 80 מהו הרווח שלי

1970

חוטב עצים מחליף קבוצה L של בולי עץ
 בקבוצה M של כסף עצמת הקבוצה M היא
 100 כל איבר שווה \$ 1 צייר 100 נקודות
 המייצגות את האיברים של הקבוצה M
 הקבוצה C, עלות הייצור, מכילה 20 נקודות
 פחות מהקבוצה M.
 הציג את C כתת-קבוצה של M וענה על
 השאלה. מהי עצמת הקבוצה P של
 הרווחים

LINDSAY CORRIGAN

lindsay@wired.com