עקרון המינימום או האינדוקציה המתמטית ?

אלכס קופרמן

הקדמה

חשיבה אינדוקטיבית במתמטיקה כוללת הסקה אמפירית, ניסוח השערות ולבסוף הוכחתן באופן פורמלי. על-ידי כך חשיבה אינדוקטיבית גורמת להגברת מעורבותו האישית של התלמיד בתהליך הלמידה.

תלמיד המנסה לחשב את הסכום

$$S_n = 1+3+5+\ldots+(2n-1)$$

יכול להבחין, על-ידי בדיקה אמפירית, כי

$$S_1 = 1^2,$$
$$S_2 = 1+3 = 2^2,$$
$$S_3 = 1+3+5 = 3^2, \ldots$$

ההשערה הטבעית היא, כי

$$S_n = 1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$$

בעזרת עקרון האינדוקציה המתמטית אפשר להוכיח כי הטענה אמנם נכונה לכל n טבעי.

עקרון האינדוקציה המתמטית מציב לפני התלמיד אתגרי חשיבה רבים (Dubinsky 1986, 1990, Movshovitz- Hadar, 1993, Henkin, 1960).

אחד מהאתגרים האלה קשור לתחושת 'המעגליות בהוכחה'. באחד משלבי ההוכחה יש להראות, כי נכונות הטענה עבור n=k, כאשר k מספר טבעי כלשהו, גוררת את נכונותה עבור n = k + 1. אצל תלמידים רבים נוצר הרושם כי 'משהו אינו כשורה', הרי ייתכן שההשערה אינה נכונה ולכן אולי ההנחה שהמשפט נכון עבור n=k אינה לגיטימית. אחת מהדרכים להתמודד עם קושי זה היא להביא בשלבים הראשונים של ההוראה מודלים שונים הממחישים את תהליך האינדוקציה המתמטית. משכנע במיוחד הוא המודל הבא:

בטור אין-סופי של אבני דומינו, כל האבנים תיפולנה אם יתקיימו ביחד שני התנאים:

- האבן הראשונה תיפול
- הרווחים בין כל שתי אבנים עוקבות יהיו "מספיק קטנים"

מודל אחר הוא משטח האפידמולוגיה. בני שושלת מסוימת יהיו כולם נגועים במחלה אם יתקיימו ביחד שני התנאים:

- ראש השושלת (האדם הראשון בשושלת) יחלה במחלה זו
- המחלה היא תורשתית דומיננטית, כלומר, המחלה עוברת מדור לדור

הצגת מודלים אלה ואחרים עשויה להביא לשיפור מסוים בהבנת עקרון האינדוקציה המתמטית. למרות זאת, הניסיון מראה כי תלמידים רבים 'רואים, אך אינם מאמינים'. תלמידים אלה יכולים לשלוט היטב בטכניקת ההוכחה, אך אין לעובדה זו ערך רב להתפתחות החשיבה המתמטית. יתרה מזו, אצל חלקם נוצר הרושם שמתמטיקה הוא תחום ידע מפוקפק למדיי, אשר בו אפשר, על-ידי מניפולציות שונות ומשונות, להוכיח, בעצם, כל דבר!

כידוע עקרון האינדוקציה המתמטית נובע מאקסיומת הסדר הטוב (הידועה גם כעקרון המינימום). זוהי אחת מחמש האקסיומות של פיאנו (Giuseppe Peano 1858-1932), המגדירות את קבוצת המספרים הטבעיים.

אקסיומת המינימום: בכל קבוצה לא ריקה של מספרים טבעיים קיים מספר קטן ביותר.

מבחינה לוגית ומבנית, אקסיומה זו פשוטה יותר מעקרון האינדוקציה המתמטית, ועשויה להתקבל על-ידי תלמידים בלי החששות האופייניים לעקרון האינדוקציה.

נוכיח, כי עקרון האינדוקציה המתמטית נובע מעקרון המינימום. לשם כך, נסמן ב- $P(n)$ טענה הקשורה במספרים טבעיים.

נתון $P(1)$ נכונה, כמו כן, נכונותה של הטענה עבור $n = k$ (k מספר טבעי כלשהו) גוררת את נכונותה של הטענה עבור $n = k + 1$

יש להוכיח: $P(n)$ נכונה לכל n טבעי

נוכיח זאת בדרך השלילה. נניח, כי קיימת קבוצה A **לא ריקה** המורכבת מכל המספרים הטבעיים שעבורם הטענה **אינה נכונה**. לפי הנתון, $P(1)$ נכונה, כלומר, מספר 1 אינו שייך לקבוצה A. על פי עקרון המינימום קיים בקבוצה A מספר מינימלי. נסמן אותו ב- $k + 1$

(*) תודתי נתונה לגברת קלרה זיסקין על עזרתה בהכנת מאמר זה. החומר הוצג במסגרת הסדנאות של קשר-חם

הטענה $P(k+1)$ אינה נכונה המספר k יותר קטן מ- $k+1$ ולכן **אינו שייך** לקבוצה A, כלומר, הטענה $P(k)$ נכונה אבל, לפי הנתון, מנכונותה של $P(k)$ נובע כי חטענה $P(k+1)$ נכונה התקבלה סתירה לכן ההנחה שקבוצה A לא ריקה אינה נכונה
מסקנה A היא קבוצה ריקה ולכן הטענה $P(n)$ נכונה לכל n טבעי

הוכחות בעזרת עקרון המינימום

בהמשך רשומות חמש דוגמאות להוכחות באמצעות עקרון המינימום הראשונה קשורה להוכחת זהויות, השנייה בהתחלקות, השלישית באי-שוויונים, והרביעית במעבר מכלל נסיגה להצגה מפורשת בדוגמה החמישית מוצגת דרך לא שגרתית להוכחת הטענה שהמספר $\sqrt{2}$ אינו רציונלי

דוגמה 1

יש להוכיח, כי לכל n טבעי מתקיים השוויון

$$1+3+5+\ .\ .+(2n-1)=n^2 \qquad (*)$$

הוכחה

א. עבור $n = 1$ $1=1^2$, כלומר, הטענה נכונה עבור $n=1$

ב. נניח, כי קיימים ערכי n טבעיים שעבורם הטענה אינה נכונה נסמן ב-A את הקבוצה המורכבת מכל המספרים הטבעיים שעבורם הטענה אינה נכונה ונניח, שהקבוצה A אינה ריקה מעקרון המינימום נובע שבקבוצה זו יש מספר קטן ביותר מסעיף א נובע שעבור $n = 1$ הטענה נכונה ולכן המספר 1 **אינו שייך** ל-A אפשר לסמן את המספר הקטן ביותר בקבוצה A בסימן $k+1$, כאשר k מספר טבעי כלשהו המספר $k+1$ **שייך** ל- A ולכן עבורו הטענה (*) **אינה נכונה**

$$1+3+5+\quad .+2(k+1)-1 \neq (k+1)^2 \qquad (**)$$

ג. היות שוהמספר $k+1$ הוא הקטן ביותר ב-A, הרי שהמספר k אינו שייך ל-A ולכן עבורו הטענה מתקיימת

$$1+3+5+\ .\ .+2k-1=k^2$$

מהשוויון האחרון נקבל

$$1+3+5+.\ .+2k-1+2(k+1)-1=$$
$$=k^2+2(k+1)+1=(k+1)^2$$

כלומר, הטענה מתקיימת עבור $n = k+1$ מכאן נובע שהמספר $k+1$ **אינו נמצא** ב-A

זוהי סתירה מכאן נובע כי ההנחה ש-A אינה ריקה, היא בלתי נכונה

מסקנה A היא קבוצה ריקה ולכן הטענה נכונה לכל n טבעי

דוגמה 2

יש להוכיח, כי הביטוי 2^n-1 מתחלק ב-7 לכל n טבעי המתחלק ב- 3

הוכחה

א. עבור $n = 3$ $2^3-1=7$ ולכן הטענה נכונה עבור $n=3$

ב. נניח, כי קיימת קבוצה A המורכבת מכל המספרים הטבעיים המתחלקים ב- 3 שעבורם הטענה אינה נכונה נניח, כי הקבוצה A אינה ריקה מעקרון המינימום נובע שבקבוצה זו יש מספר קטן ביותר מסעיף א נובע כי המספר 3 אינו שייך ל-A, ולכן אפשר לסמן את המספר הקטן ביותר בקבוצה A בסימן $k+3$, כאשר k הוא מספר טבעי כלשהו, המתחלק ב-3 עבור המספר הזה הטענה אינה נכונה, כלומר, הביטוי $2^{k+3}-1$ אינו מתחלק ב-7

ג. היות שהמספר $k+3$ הוא הקטן ביותר ב-A, הרי שהמספר k אינו שייך ל-A, ולכן עבורו הטענה נכונה, כלומר, 2^k-1 מתחלק ב-7 מכאן נובע כי הביטוי

$$2^{k+3}-1=2^k\ \ 2^3-1=8\cdot 2^k-1=$$
$$=(7+1)\ \ 2^k-1=7\ \ 2^k+(2^k-1)$$

מתחלק ב-7, בניגוד למסקנה שהתקבלה בסעיף ב

מסקנה: A היא קבוצה ריקה ולכן הטענה נכונה לכל n טבעי המתחלק ב-3

דוגמה 3

יש להוכיח, כי האי-שוויון $2^n \geq n$ מתקיים לכל n טבעי

הוכחה

א. עבור $n = 1$ $2^1 \geq 1$ ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$

ב. נניח, כי קיימת קבוצה A, המורכבת מכל המספרים הטבעיים שעבורם הטענה **אינה נכונה** ונניח, שהקבוצה A אינה ריקה על פי עקרון המינימום קיים בקבוצה זו מספר קטן ביותר היות שהמספר 1 מקיים את הטענה, נובע מכאן ש-1 **אינו**

שייך ל-A לכן אפשר לסמן את המספר המינימלי ב-A בסימן k + 1

עבור k + 1 הטענה אינה נכונה, כלומר

$$(*) \quad 2^{k+1} < k+1$$

ג. המספר k + 1 הוא הקטן ביותר בקבוצה A ולכן המספר k אינו שייך ל-A, לכן $2^k \ge k$ מכאן נובע, כי

$$2^{k+1} = 2\ 2^k \ge 2k = k+k \ge k+1$$

כלומר, $2^{k+1} \ge k+1$ בניגוד ל- (*) סתירה זו גוררת ש- A היא קבוצה ריקה

מסקנה: הטענה נכונה לכל n טבעי

דוגמה 4

סדרה a_n מוגדרת באמצעות כלל נסיגה

$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 6$ ולכל n טבעי

$$(*) \quad a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$$

יש להוכיח כי לכל n טבעי

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

הוכחה

א. נבדוק כי הטענה נכונה עבור n = 1, 2, 3

$$a_1 = \frac{1\ (1+1)}{2} = 1$$
$$a_2 = \frac{2\ (2+1)}{2} = 3$$
$$a_3 = \frac{3\ (3+1)}{2} = 6$$

ולכן הטענה נכונה עבור n = 1, 2, 3

ב. נניח כי קיימת קבוצה לא ריקה A, המורכבת מכל המספרים הטבעיים שעבורם הטענה אינה נכונה. על פי עקרון המינימום קיים בקבוצה A מספר מינימלי מסעיף א נובע כי המספרים 1,2,3 מקיימים את הטענה ולכן אינם שייכים ל- A אפשר לסמן את המספר המינימלי בקבוצה A על-ידי k + 3, כאשר k הוא מספר טבעי כלשהו המספר k + 3 שייך לקבוצה A ולכן עבורו הטענה אינה נכונה

$$(**) \quad a_{k+3} \ne \frac{(k+3)(k+4)}{2}$$

ג. k + 3 הוא המספר המינימלי בקבוצה A ולכן המספרים k, k + 1, k + 2 אינם שייכים לקבוצה A, כלומר עבורם הטענה אמנם מתקיימת

$$a_k = \frac{k\ (k+1)}{2}\ ,$$
$$a_{k+1} = \frac{(k+1)\ (k+2)}{2}\ ,$$
$$a_{k+2} = \frac{(k+2)\ (k+3)}{2}$$

מכאן נובע כי

$$a_{k+3} = 3\ a_{k+2} - 3a_{k+1} + a_k =$$
$$= 3\frac{(k+2)(k+3)}{2} - 3\frac{(k+1)(k+2)}{2} + \frac{k(k+1)}{2} =$$
$$= \frac{(k+3)(k+4)}{2}$$

בניגוד ל- (**)

מסקנה: A היא קבוצה ריקה, ולכן הטענה נכונה לכל n טבעי

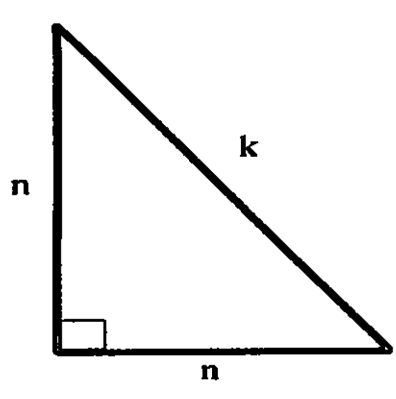
דוגמה 5

יש להוכיח ש- $\sqrt{2}$ אינו מספר רציונלי

הוכחה

נניח, שקיימים מספרים טבעיים n ו-k כך ש- $\sqrt{2} = \frac{k}{n}$

מכאן נובע ש- $k^2 = 2n^2$ או $k^2 = n^2 + n^2$ את השוויון האחרון נוכל לפרש באופן הבא קיימים משולשים ישרי זווית ושווי שוקיים שאורכי צלעותיהם n, n, ו- k

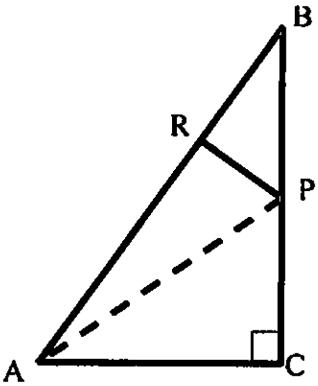


נתבונן באוסף של כל המשולשים בעלי תכונה זו ונגדיר קבוצה A באופן הבא

$$A = \left\{ k \,\middle|\, k^2 = n^2 + n^2\ ,\quad k, n \in N \right\}$$

ונניח, כי A אינה ריקה מעקרון המינימום נובע, שבקבוצה זו יש מספר מינימלי, k_o כלומר, קיים משולש בעל אורך היתר k_o ואורכי הניצבים n_o (n_o ו-k_o טבעיים), והמספר k_o הוא הקטן ביותר בעל תכונה זו

נתבונן במשולש זה (ABC)



נעביר בו את חוצה הזווית AP מהנקודה P נוריד אנך PR לצלע AB המשולשים ΔAPC ו- ΔAPR חופפים

מכאן $AR = n_o$ ו- $RB = RP = PC = k_o - n_o$

ולכן $BP = n_o - (k_o - n_o) = 2n_o - k_o$

.

בכל משולש סכום של זוג צלעות גדול מהצלע השלישית ולכן BP הוא מספר שלם חיובי מצאנו, אם כן, משולש ישר זווית ושווה שוקיים ΔBRP בעל אורך יתר קטן יותר מ- k_o וזוהי סתירה פירושו של הדבר, שלא קיים מספר שלם או שריבועו שווה לכפולת ריבוע של מספר שלם אחר

לכן ההנחה ש- $\sqrt{2}=\frac{k}{n}$ הייתה לא נכונה, כלומר $\sqrt{2}$ אינו מספר לא רציונלי .

מה עדיף, ללמד אינדוקציה מתמטית באופן מסורתי או בהסתמך על עקרון המינימום?

מחמש הדוגמאות שהובאו, אפשר לראות כי ההוכחות בעזרת עקרון המינימום דומות מאוד להוכחות בעזרת האינדוקציה המתמטית ההוכחות בעזרת עקרון המינימום אינן ישירות אלא על דרך השלילה מבחינה פסיכולוגית ודידקטית ידוע שההוכחות על דרך השלילה בדרך כלל קשות יותר לתלמידים מההוכחות הישירות (Thompson 1996, Fischbein and Engel 1989) אחד הקשיים בהוכחות על דרך השלילה נובע מכך, שלאחר ההנחה שהטענה אינה נכונה, יש להגיע לסתירה לוגית ברוב ההוכחות הפותר אינו יודע מראש איזו סתירה תתקבל בסוף כתוצאה מההנחה השגויה קושי זה אינו קיים בהוכחות המסתמכות על עקרון המינימום תמיד יש להניח, כי קיימת קבוצה לא ריקה A המורכבת מכל המספרים הטבעיים שעבורם הטענה אינה נכונה לאחר מכן יש להוכיח שהנחה זו גוררת את המסקנה שהמספר המינימלי בקבוצה, **שייך** ל-A וגם **אינו שייך** ל-A, מאידך גיסא, במהלך ההוכחות בעזרת עקרון המינימום לא נוצרת אצל התלמידים 'תחושת המעגליות' האופיינית כל כך להוכחות באמצעות האינדוקציה המתמטית קיים נימוק נוסף בעד לימוד עקרון המינימום במסגרת התיכון בתכנית הלימודים בתיכון יש מספר שולי ביותר של הוכחות על דרך השלילה (בדרך כלל אלו הן ההוכחות בהנדסת המישור) מצד שני, בתכניות הלימודים של המתמטיקה במוסדות להשכלה גבוהה מגיע שיעור ההוכחות על דרך השלילה ליותר מ-20% (כך לפחות באלגברה ליניארית ובחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי) לכן, הוראת עקרון המינימום מהווה הזדמנות מצוינת לתלמידי התיכון להתנסות נוספת בהוכחות על דרך השלילה

בכל מקרה, לעקרון האינדוקציה המתמטית שמור מקום חשוב ביותר בהשכלה המתמטית של כל תלמיד המסיים תיכון, ולכן שאלת העדיפויות ששאלנו אינה רלוונטית לימוד הקשר בין עקרון המינימום לעקרון האינדוקציה המתמטית מעניין ומשפר הבנת ההוכחות באמצעות האינדוקציה כותב שורות אלו ומורים נוספים לימדו את עקרון המינימום במספר מסגרות (תלמידי היחידות הקדם-אקדמיות בטכניון ובאוניברסיטת חיפה, ובהשתלמויות מורים) והתוצאות והתגובות היו מעודדות

רשימת ספרות

Dubinsky, E [1986] 'Teaching Mathematical Induction I', *Journal of Mathematical Behavior* no 5 305-317

Dubinsky, E [1990] 'Teaching Mathematical Induction II', *Journal of Mathematical Behavior* 8, no 3 285-304

Fischbein, E and I Engel [1989] 'Psychological Difficulties in Understanding the Principle of Mathematical Induction', in G Vergenaud et als (Eds), *Proceedings of the 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Paris, France*, pp 276-282

Henkin, L [1960] 'On Mathematical Induction', *American Mathematical Monthly* 67, no 4 323-338

Movshovitz-Hadar, N [1993] 'The False Coin Problem, Mathematical Induction, and Knowledge Fragility', *The Journal of Mathematical Behavior* 12, no 3 253-268

Thompson, D [1996] 'Learning and Teaching Indirect Proof', *Mathematics Teacher* 89, no 6 474-481