הוראת הפונקציה הלוגריתמית בגישה גיאומטרית

אברהם בלוך
חיפה

מבוא

הצגת הלוגריתמים מתוך ראייה גיאומטרית היא רעיון של המתמטיקאי השוויצרי Leonhard Euler (1707-1783) במאמר זה תוצג דרך להתאים את הרעיון להוראה בבית הספר התיכון יחידת לימוד זו מהווה המחשה והכנה לנושא הרחב יותר, אינטגרל מסוים של פונקציה

הוראת הנושא מתוך גישה גיאומטרית מאפשרת לעקוף את המושג גבול הרכיב הבסיסי הוא השטח של רצועת היפרבולה שטח זה מוגדר על-ידי מספר ממשי בר חישוב הפיתוחים האלגבריים הם פשוטים ומובילים להוכחת התכונות האופיניות של הלוגריתמים נוסף על כך, מגיעים בדרך זו אל הלוגריתמים הטבעיים באופן הטבעי ביותר׳

מבט היסטורי

בשלהי המאה ה-16 החלה להתפתח תורת האסטרונומיה כרקע מדעי לטכניקות של ניווט ימי התפתחות זו הייתה כרוכה בחישובים מספריים ארוכים ומייגעים היה צורך חיוני לפתח שיטה לביצוע מהיר וקל של פעולות החשבון הבסיסיות John Napier (1550-1617), אציל סקוטי שהתעניין בתיאולוגיה וגם במתמטיקה שימושית פרסם ב - 1614 את לוחות הלוגריתמים הראשונים המחקר ערך כ-20 שנה כותרת הספר לא הייתה צנועה במיוחד

'Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio', ובעברית ׳תיאור הכללים המופלאים של הלוגריתמים׳ מיד לאחר מכן פרסם המתמטיקאי האנגלי Henry Briggs בשיתוף עם Napier את הלוחות של הלוגריתמים הרגילים בבסיס עשר

במחצית השנייה של המאה הנוכחית, עם הופעת המחשבים והחישוביות, איבדו הלוגריתמים ולוחות הלוגריתמים את חשיבותם בשטח של זרזי חישוב חשיבותה של הפונקציה הלוגריתמית (והמעריכית) מתמקד בהיותה מודל מוביל בתיאור תופעות מתחומי מדע שונים

פרקי התכנית

א. הפונקציה ההיפוכית

נגדיר פונקציה h כדלקמן

התחום:

$$D = \{x \varepsilon R | x \neq 0\}$$

הטווח: R

חוק ההעתקה:

$$h(x) = \frac{1}{x}$$

הפונקציה h מקיימת את התכונה $h(x) = y \Leftrightarrow h(y) = x$

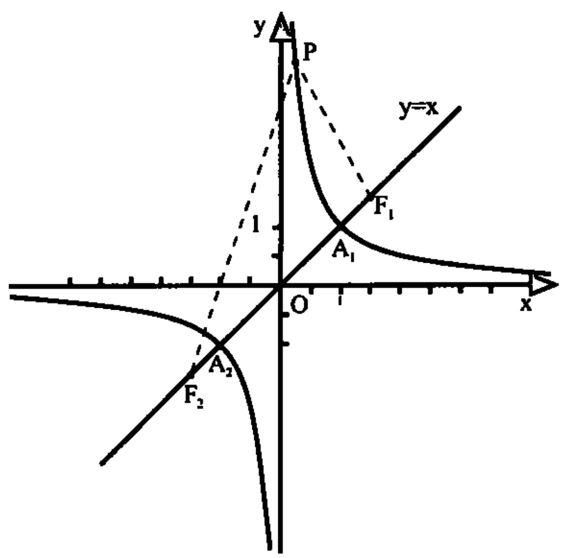
ונקרא לה פונקציה היפוכית

הגרף של הפונקציה h במערכת קרטזית הוא קבוצת הנקודות

$$x \neq 0, (x \frac{1}{x})$$

טענה: הגרף של h הוא היפרבולה שבה המוקדים הם הנקודות

$F_2(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ ו , $F_1(\sqrt{2},\sqrt{2})$



איור 1

הוכחת הטענה:

ניקח נקודה כלשהי $P(x, \frac{1}{x})$ על הגרף של h .

על-פי הגדרת ההיפרבולה כמקום גיאומטרי, עלינו להוכיח כי עבור x>0 ההפרש $PF_2 - PF_1$ הוא קבוע

(אם x<0, ההפרש הוא $PF_1 - PF_2$)

$$PF_2 - PF_1 = \sqrt{(x+\sqrt{2})^2 + (\frac{1}{x}+\sqrt{2})^2} - \sqrt{(x-\sqrt{2})^2 + (\frac{1}{x}-\sqrt{2})^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 + \frac{1}{x^2} + 2\sqrt{2}\,\frac{1}{x} + 2} - \sqrt{x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 + \frac{1}{x^2} - 2\sqrt{2}\,\frac{1}{x} + 2} =$$

$$=\sqrt{(x+\frac{1}{x})^2+2\sqrt{2}(x+\frac{1}{x})+(\sqrt{2})^2}-\sqrt{(x+\frac{1}{x})^2-2\sqrt{2}(x+\frac{1}{x})+(\sqrt{2})^2}=$$

$$=\sqrt{(x+\frac{1}{x}+\sqrt{2})^2}-\sqrt{(x+\frac{1}{x}-\sqrt{2})^2}=$$

$$=(x+\frac{1}{x}+\sqrt{2})-(x+\frac{1}{x}-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$$

הערות:

1) במעבר אל השורה שלפני האחרונה השתמשנו בתכונה

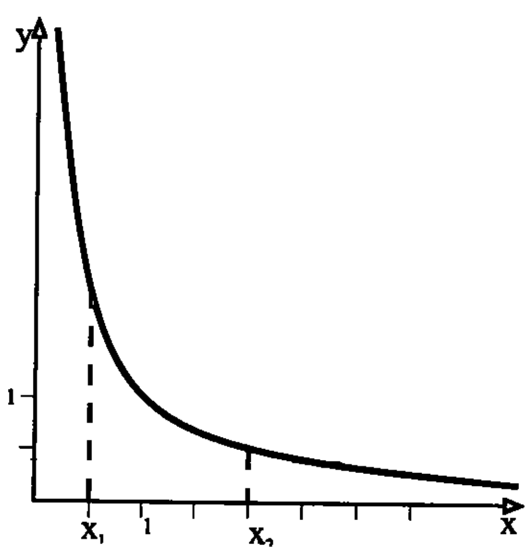
$$\alpha>0 \Rightarrow \sqrt{\alpha^2}=\alpha$$

2) חשוב לציין כי כאשר x>0, גם הביטוי $x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}$ הוא חיובי הדבר נובע מכך שעבור כל x חיובי מתקיים $x+\frac{1}{x}\ge 2$

ולכן, בוודאי גם

$$x+\frac{1}{x}>\sqrt{2}$$

3) באותו אופן אפשר להוכיח טענה הפוכה אם נקודה P(x,y) מקיימת $PF_2-PF_1=2\sqrt{2}$ (כאשר x>0) או $PF_1-PF_2=2\sqrt{2}$ (כאשר x<0), הרי ששיעוריה x ו y מקיימים את המשוואה $y=\frac{1}{x}$



איור 1

בהמשך נתייחס רק לענף החיובי של ההיפרבולה h
לשם כך נגדיר את הפונקציה h_+

התחום $D_+=\{x\in R|x>0\}$, הטווח R

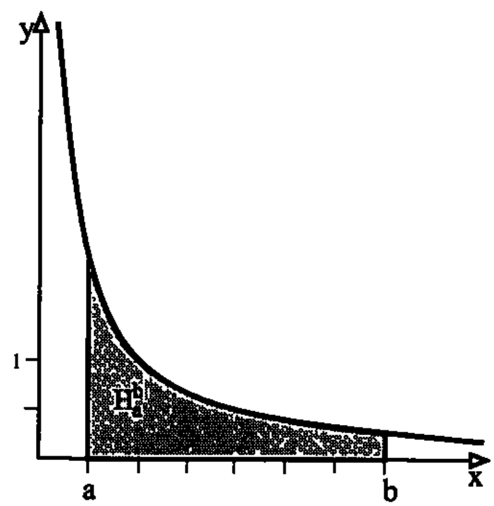
חוק ההעתקה $h_+(x)=\frac{1}{x}$

קל לראות כי הפונקציה h_+ יורדת בתחום הגדרתה את אגפי הפסוק $0<x_1<x_2$, מחלקים במספר החיובי x_1x_2 ומקבלים

$\frac{1}{x_2}<\frac{1}{x_1}$, כלומר $h_+(x_1)>h_+(x_2)$

ב. רצועת היפרבולה ושטח

נגדיר רצועת היפרבולה מ-a ועד b (0<a<b) כשטח H_a^b הכלוא בין ציר ה-x, הגרף של h_+ ושני ישרים המקבילים לציר ה-y x=a ו- x=b



$$H_a^b=\{(x,y)|a\le x\le b,\ 0\le y\le \frac{1}{x}\}$$

איור 2

נחשב שטח S_a^b של רצועת היפרבולה H_a^b באופן הבא

חישוב S_a^b

1 מחלקים את הקטע [a,b] שאורכו b-a, ל-n חלקים שווים אורכו של כל חלק יסומן ב- dx

$$dx=\frac{b-a}{n}$$

שיעורי ה-x של נקודות החלוקה הם

$a,\ a_1=a+dx,\ a_2=a+2dx,\ a_3=a+3dx, \ \ ,a_n=a+n\frac{b-2}{n}=b$

2 ערכי הפונקציה h_+ בנקודות החלוקה הם

3 3 $h_+(a)=\frac{1}{a},h_+(a_1)=\frac{1}{a_1},h_+(a_2)=\frac{1}{a_2}, \ \ ,h_+(a_n)=\frac{1}{b}$

3 האיחוד של n המלבנים, בעלי בסיס משותף dx וגובה

$\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2} \ \ ,\frac{1}{b}$ ייקרא **מצולע מלבני חסום.** שטחו יסומן על-ידי $\underline{S}_a^b$

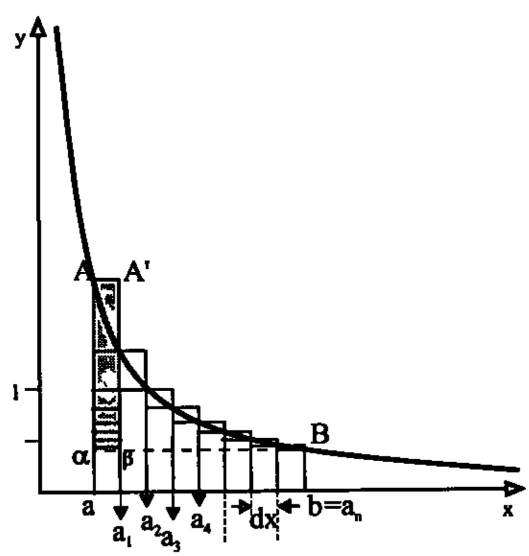
4 האיחוד של n המלבנים בעלי בסיס משותף dx וגובה

$\frac{1}{a},\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2} \ \ ,\frac{1}{a_{n-1}}$ ייקרא **מצולע מלבני חוסם.**

שטחו יסומן על-ידי $\overline{S}_a^b$

5 השטח $\underline{S}_a^b$ ייקרא **ערך מקורב מלרע** של שטח הרצועה H_a^b

השטח $\overline{S}_a^b$ ייקרא **ערך מקורב מלרע** של שטח הרצועה H_a^b



איור 3

ההפרש $\overline{S}_a^b-\underline{S}_a^b$ הוא **הסטייה המרבית** בחישוב השטח S_a^b כדי לחשב את הסטייה המרבית נתייחס אל ההפרשים בין המלבנים החוסמים והמלבנים החסומים בעלי אותו הבסיס, המפוזרים לאורך הקשת AB של h_+ (ראה איור 3) כל הפרש כזה הוא מלבן בעל אותו בסיס dx הזזתם של הפרשים אלו במקביל לציר ה-x, כמתואר באיור 3, יוצרת את המלבן $\alpha\beta A'A$ נחשב את שטחו על-ידי כפל הבסיס בגובה

$$(1)\quad \overline{S}_a^b-\underline{S}_a^b=dx\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\frac{(b-a)}{n}\,\frac{(b-a)}{ab}$$

$$\therefore \overline{S}_a^b-\underline{S}_a^b=\frac{(b-a)^2}{ab}\,\frac{1}{n}$$

טענה: אפשר לבחור את n (מספר המלבנים החוסמים והחסומים, כך שכל הספרות בחלק השלם וכל k הספרות (k מספר טבעי) בחלק העשרוני של $\overline{S}_a^b$ ושל $\underline{S}_a^b$ תהיינה שוות בהתאמה

במילים אחרות, עלינו להוכיח כי קיים מספר טבעי n שעבורו מתקיים $\overline{S}_a^b-\underline{S}_a^b\le\frac{1}{10^{k+1}}$

במקרה זה כל הספרות (השלמות והעשרוניות) שרשומות לפני הספרה העשרונית ה- (k+1) תהיינה שוות כדי שההפרש יהיה קטן מ- $\frac{1}{10^{k+1}}$, כנדרש

הוכחה:

נצא מהאי-שוויון:

$$\overline{S}_a^b-\underline{S}_a^b=\frac{(b-a)^2}{abn}\le\frac{1}{10^{k+1}}$$

שני האגפים (החיוביים) לכן

$$\frac{abn}{(b-a)^2}\ge10^{k+1}$$

כדי לבודד את n, נכפיל את שני האגפים במספר החיובי $\frac{(b-a)^2}{ab}$ נקבל $n\ge\frac{(b-a)^2 10^{k+1}}{ab}$, וברור שקיים n טבעי שמקיים אי-שיוויון זה

לסיכום: עבור $n\ge\frac{(b-a)^2\ \ 10^{k+1}}{a\ \ b}$ כל הספרות של $\underline{S}_a^b$ ושל $\overline{S}_a^b$, עד הספרה העשרונית ה-k-ית, שוות בהתאמה

ספרות אלה מהוות את ההצגה העשרונית של המספר S_a^b, שטח הרצועה H_a^b

ג. חישובים

1) נחשב את שטח הרצועה בין x=18 לבין x=21, עבור n=24 אורך הבסיס של כל מלבן יהיה D

$$D = \frac{21-18}{24} = \frac{1}{8} = 0125$$

שיעורי ה-x של נקודות החלוקה הם

18, 18 125, 18 250 18 375 , 20 750, 20 875, 21

השטחים (מלעיל ומלרע) הם

$$\overline{S}_{18}^{21} = 0\ 125\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{18125}+\frac{1}{18250}+ \quad +\frac{1}{20875}\right) \approx 0\ 154$$

$$\underline{S}_{18}^{21} = 0\ 125\left(\frac{1}{18\ 125}+\frac{1}{18250}+ \quad +\frac{1}{20875}+\frac{1}{21}\right) \approx 0\ 153$$

לפי שוויון (1), הסטייה המרבית

$$\overline{S}_{18}^{21} - \underline{S}_{18}^{21} = \frac{(21-18)^2}{18\ 21\ 24} = \frac{1}{1008} < 0001$$

מכאן נובע כי $S_{18}^{21} \approx 015$, כאשר הספרות של העשיריות ושל המאיות מדויקות ואמנם הספרות של העשיריות ושל המאיות שוות בהתאמה ב $\underline{S}_{18}^{21}$ וב $\overline{S}_{18}^{21}$

2 אפשר לחשב את ערכיהם של $\underline{S}_a^b$ ושל $\overline{S}_a^b$ במחשבון בעל אופן (MODE) סטטיסטי

I) הכנס נתונים על-ידי הקלידים, $M_+, \frac{1}{x}, x$

II) הקש Σx

III) הכפל Σx ב-D, עבור $D = \frac{b-a}{n}$

3) להלן תכנית לחישוב $\overline{S}_a^b$ ו $\underline{S}_a^b$ בשפת ה-BASIC

```
10 "A" PRINT "חישוב שטח הרצועה"
20 PRINT "A=" INPUT A
30 PRINT "B=" INPUT B
40 PRINT "N=" INPUT N
50 D=(B-A)/N
60 H=0
70 FOR K=0 TO N-1
80 H=H+1/(A+K*D)
90 NEXT K
100 S=H*D
110 PRINT "S מלעיל =" PRINT S
120 V=((B-A)^2)/(A*B*N) L=S-V
130 PRINT "S מלרע =" PRINT L
140 PRINT "סטייה<" PRINT V
150 END
```

לאחר הפעלת התכנית התקבלו התוצאות הבאות

$N = 249$ $S_{18}^{21} \approx 0154$ עם דיוק של אלפית

$N = 3000$ $S_1^3 \approx 1098$ עם דיוק של אלפית

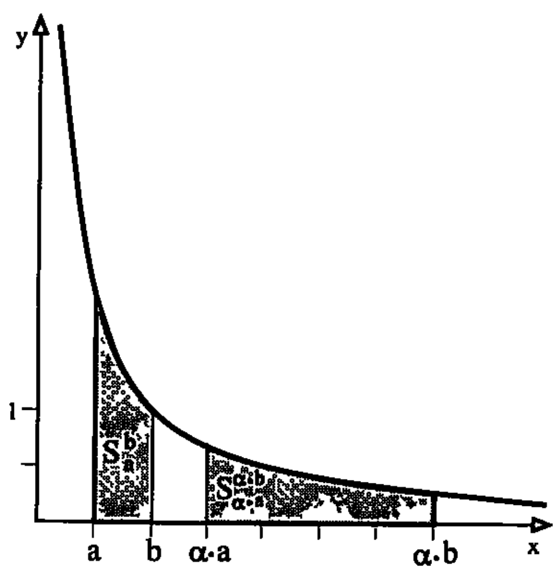
$N = 3000$ $S_1^2 \approx 0693$ עם דיוק של אלפית

(בשתי התוצאות האחרונות נשתמש בהמשך)

ד. שימור שטח רצועות

טענה: לכל מספר חיובי λ, מתקיים $S_a^b = S_{\lambda a}^{\lambda b}$

על תכונה זו של רצועת היפרבולה יתבסס הפיתוח של הפונקציה הלוגריתמית העתידה 'להיוולד'



איור 4

הוכחה: עלינו להראות כי עבור כל n טבעי מתקיים $\underline{S}_{\lambda a}^{\lambda b} = \underline{S}_a^b$

וגם $\overline{S}_a^b = \overline{S}_{\lambda a}^{\lambda b}$ כך של- S_a^b ול- $S_{\lambda a}^{\lambda b}$ תהיה אותה הצגה עשרונית

נוכיח את השוויון הראשון (הוכחת השוויון השני נעשית באותה דרך)

שטח המצולע המלבני החוסם את הרצועה $\overline{S}_a^b$, הוא

$$\bar{S}_a^b = dx\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_{n-1}}\right)$$

עבור

$$dx = \frac{b-a}{n}$$

$$a_1 = a+dx,\quad a_2 = a+2dx,\quad \dots,a_{n-1} = a+(n-1)dx$$

עבור אותו n הוא $\bar{S}_{\lambda a}^{\lambda b}$

$$\bar{S}_{\lambda a}^{\lambda b} = d'x\left(\frac{1}{a'}+\frac{1}{a'_1}+\frac{1}{a'_2}+\dots+\frac{1}{a'_{n-1}}\right)$$

כאשר

$$d'x = \frac{\lambda b-\lambda a}{n} = \lambda dx$$

$$a' = \lambda a,\quad a'_1 = \lambda a+\lambda dx,\quad a'_2 = \lambda a+2\lambda dx,\quad \dots,$$

$$a'_{n-1} = \lambda a+(n-1)\lambda dx$$

נציב בשוויון המתאר את $\bar{S}_{\lambda a}^{\lambda b}$

$$\bar{S}_{\lambda a}^{\lambda b} = \lambda dx\left(\frac{1}{\lambda a} = \frac{1}{\lambda a+\lambda dx}+\frac{1}{\lambda a+2\lambda dx}+\dots+\frac{1}{\lambda a+(n-1)\lambda dx}\right) = dx\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+dx}+\frac{1}{a+2dx}+\dots+\frac{1}{a+(n-1)dx}\right] = \bar{S}_a^b$$

כלומר $\bar{S}_{\lambda a}^{\lambda b} = \bar{S}_a^b$

ה. רצועת היפרבולה תקנית

נציב $\lambda = \frac{1}{a}$ בשוויון שהוכחנו ונקבל $S_a^b = S_{\frac{1}{a}a}^{\frac{1}{a}b}$

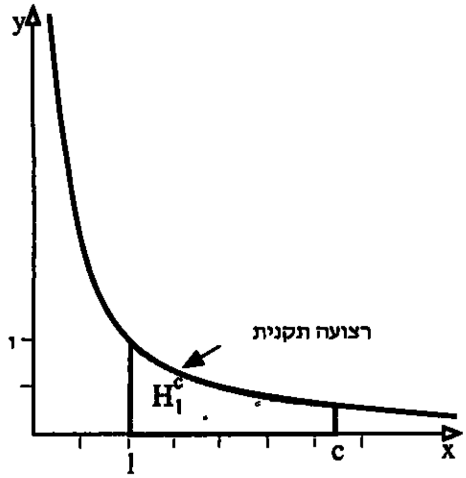
$S_a^b = S_1^{\frac{b}{a}}$.

לחישוב על-ידי שטח של רצועת היפרבולה שבה הקצה השמאלי של הבסיס מונח על היחידה של ציר ה-x זאת אומרת השטח של כל רצועת היפרבולה ניתן ומתקיים

$$S_a^b = S_1^c,\ c = \frac{b}{a} > 1$$

רצועות היפרבולה מן הסוג H_1^c נקראות תקניות

דוגמה $S_3^4 = S_1^{4/3},\ S_2^5 = S_1^{2.5},\ S_{20}^{21} = S_1^{1.05}$

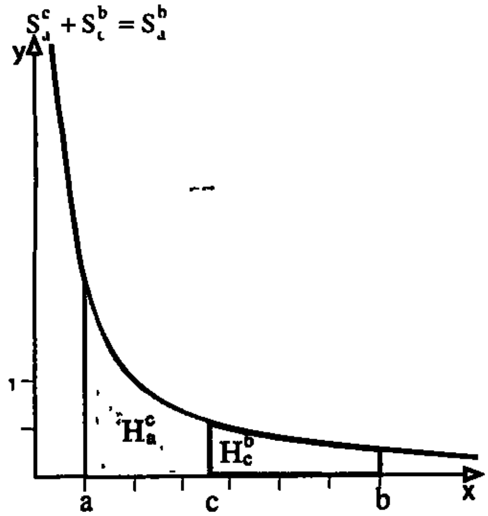


איור 5

ו. הרחבת המושג 'שטח רצועה'

חיבור שטחי רצועות מוגדר היטב כאשר 0<a<c<b ואז

$$S_a^c + S_c^b = S_a^b$$

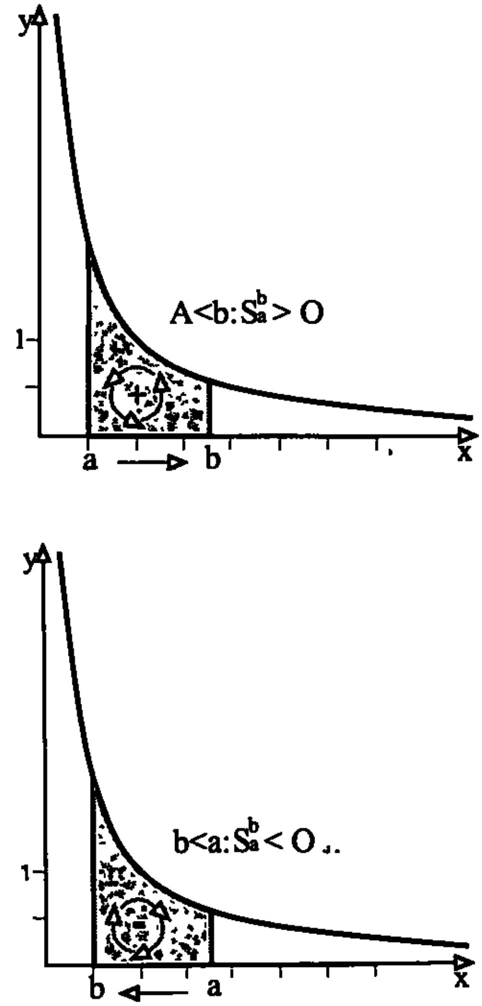


איור 6

כדי להסיר את המגבלה a<c<b, נסכים כי לכל שני מספרים חיוביים a ו- b יתקיים $S_b^a = -S_a^b$, ומכאן $S_a^a = 0$

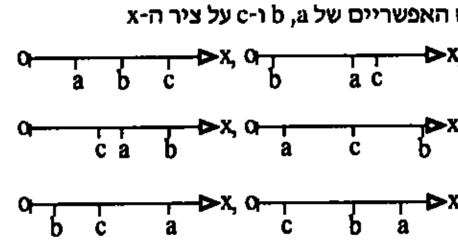
הפירוש הגיאומטרי של הרחבה זו היא שכאשר הולכים מ-a ל-b **נגד** סיבוב השעון, השטח המורחב S_a^b ימשיך להיות **חיובי**, וכאשר הולכים מ-a ל-b **עם** סיבוב השעון, השטח המורחב S_a^b יהיה **שלילי**

כתוצאה מההרחבה של המושג 'שטחי' יוצא שעבור b<a מתקיים $S_a^b < 0$ ועבור a<b מתקיים $S_a^b > 0$



איור 7

השוויון $S_a^c + S_c^b = S_a^b$ מתקיים כעת עבור כל אחד מששת המצבים האפשריים של a, b ו-c על ציר ה-x



איור 8

נדגים את המקרה שבו 0<b<a<c במקרה זה $S_a^c + S_c^b = S_a^b$

או $-S_a^b + S_a^c = -S_c^b$ אחרי העברת אגפים נקבל $S_a^c + S_c^b = S_a^b$

ז. פונקציית הלוגריתם הטבעי

נגדיר פונקציה ln x כדלקמן

התחום $D = \{x \in R | x > 0\}$

הטווח R

חוק העתקה $\ell n\, x = S_1^x$

ערך זה ייקרא 'הלוגריתם הטבעי של x'

הערה הכינוי 'לוגריתם טבעי' ניתן מכיוון שבהגדרה משתמשים בפונקציה

$$y = \frac{1}{x}$$

אפשר להגדיר פונקציה לוגריתמית, לאו דווקא טבעית, אם משתמשים בפונקציה $y = \frac{k}{x}$, $k > 0$.

על-פי ההרחבה מקבלים

$\ell n\, x>0$ אם ורק אם $1>x$ $(S_1^x > 0)$

$\ell n\, 1=0$ $(S_1^1 = 0)$

$\ln x<0$ אם ורק אם $0<x<1$ $(S_1^x < 0)$

התכונות האלגבריות של הפונקציה $\ell n\, x$ (a ו- b מספרים חיוביים):

1 $\ell n(a\ b) = \ell n\, a + \ell n\, b$

2 $\ell n\left(\frac{a}{b}\right) = \ell n\, a - \ell n\, b$

3 $\ell n\left(\frac{1}{b}\right) = -\ell n\, b$

4 p טבעי $\ell n\, (a^p) = p\, \ell n\, a$

5 q טבעי, $q \geq 2$ $\ell n\, (\sqrt[q]{a}) +\frac{1}{q}\ \ell n\, a$

6 r רציונלי $\ell n\, (a^r) = r\, \ell n\, a$

הוכחות:

1 $\ell n\, (ab)$

$$= S_1^{ab} = S_1^a + S_a^{ab} = S_1^a + S_{\frac{1}{a}a}^{\frac{1}{a}ab} = S_1^a + S_1^b =$$

$$= \ell n\, a + \ell n\, b$$

2 לצורך ההוכחה, נרשום את a כמכפלה $\frac{a}{b}\ b$

$$\ell n\, a = \ell n\left(\frac{a}{b}\ b\right) = \ell n\left(\frac{a}{b}\right) + \ell n\, b$$

ומכאן על-ידי העברת אגפים $\ell n\left(\frac{a}{b}\right) = \ell n\, a - \ell n\, b$

.3 $\ell n\left(\frac{1}{b}\right) = \ell n 1 - \ell n b = 0 - \ell n b = -\ell n b$

4 התכונה היסודית תקפה עבור מכפלה של כל מספר (טבעי) של גורמים (הוכחה באינדוקציה שלמה)

$$\ell n(a \cdot b \cdot c \cdots t) = \ell n a + \ell n b + \ell n c + \ldots + \ell n t$$

כעת, משתמשים בעובדה ש- a^p הוא מכפלה (p טבעי)

$$\ell n(a^p) = \ell n(a \cdot a \cdots a) = \ell n a + \ell n a + \cdots + \ell n a = p\,\ell n a$$

5 נרשום a כחזקה

$(\sqrt[q]{a})^q \quad \ell n a = \ell n[(\sqrt[q]{a})^q] = q\,\ell n(\sqrt[q]{a})$

ועל-ידי חלוקה ב q נקבל

$$\ell n(\sqrt[q]{a}) = \frac{1}{q}\,\ell n a$$

6 א) אם המערים r הוא מספר טבעי, הרי שהוכח ב ℓV

ב) אם r = 0 אז $\ell n(a^0) = \ell n(1) = 0 = 0\,\ell n a$

ג) אם r הוא מספר שלם שלילי נרשום r = -p (p טבעי)

$$\ell n(a^r) = \ell n(a^{-p}) = \ell n\left(\frac{1}{a^p}\right) = -p\ \ell n(a) = r\ \ell n a$$

ד) לבסוף, אם r הוא לא שלם, אפשר לרשום אותו כשבר $\frac{p}{q}$, כאשר p שלם ו-q טבעי, $q \ge 2$

$$\ell n(a^r) = \ell n[(a)^{\frac{p}{q}}] = \ell n[(\sqrt[q]{a})^p] = p\ \ell n(\sqrt[q]{a}) = p\ \frac{1}{q}\ell n a = r\ \ell n a$$

ז. אפיון הפונקציה הלוגריתמית והגרף שלה

1 התפלגות הסימנים של $\ell n x$

$\ell n x>0$ אם ורק אם $1<x$, $\ell n 1 = 0$, $\ell n x<0$ אם ורק אם $0<x<1$

מכאן שהגרף נמצא רק ברביעים הראשון והרביעי, וחותך את ציר x בנקודה (1,0)

2 הפונקציה $\ell n x$ **עולה** בכל תחומה

נוכיח כי עבור כל שני מספרים x_1 ו x_2 המקיימים $x_2 > x_1 > 0$, מתקיים $\ell n x_2 > \ell n x_1$ נחלק את שני האגפים הראשונים של האי-שוויון $x_2 > x_1 > 0$ ב- x_1 ונקבל

$\frac{x_2}{x_1} > 1$ לכן $\ell n\frac{x_2}{x_1} > 0$, כלומר $\ell n x_2 - \ell n x_1 > 0$

3 התנהגות בקצוות

לכל מספר טבעי G קיים מספר M, (התלוי ב-G), כך שלכל X, $x > M$, מתקיים $\ell n x>G$

הוכחה נסתמך על החישוב שקבע כי $\ell n 3>1$ וכן על העובדה ש-$\ell n x$ עולה נבחר M, $M = 3^G$ עבור כל x שמקיימים $x>M$ אפשר לקבוע כי

$\ell n x > \ell n M$ זאת אומרת $\ell n x > \ell n(3^G)$ או $\ell n x > G\ \ell n 3$, ולבסוף $\ell n x>G$ באופן דומה אפשר להראות כי לכל מספר שלם שלילי G- קיים מספר M, התלוי ב-G, כך שלכל x, $0<x<M$ מתקיים $\ell n x < -G$

אותה התנהגות שהוכחנו אפשר לנסח בקיצור

$$\lim_{x\to 0_+} \ell n x = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \ell n x = +\infty$$

4 גודל ההשתנות של הפונקציה הלוגריתמית

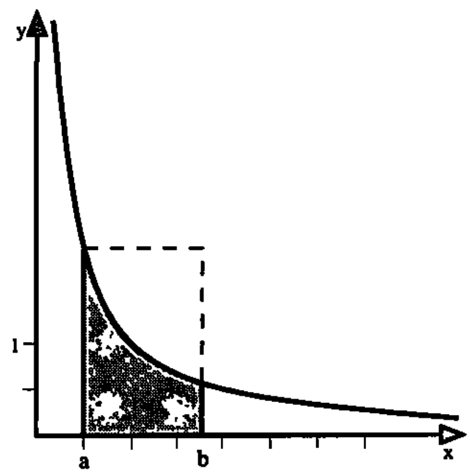
עבור $0<a<b$ מתקיים $\ell n b - \ell n a>0$ נחפש חסם עליון להשתנות

$\ell n b - \ell n a$ נרשום השתנות זו כשטח של רצועה

$$\ell n b - \ell n a = -S_1^a + S_1^b = +S_a^1 + S_1^b = S_a^b$$

השטח S_a^b קטן משטחו של המלבן שבסיסו b-a וגובהו $\frac{1}{a}$

לכן



$$0 < \ell n b - \ell n a < (b-a)\,\frac{1}{a}$$

הערה:

אם נסיר את המגבלה $a < b$ אז עבור כל שני מספרים חיוביים שונים a ו-b מתקיים

$$,0 < | \ell n\, b - \ell n\, a | < | b - a | \frac{1}{c}$$

כאשר c הוא הקטן מבין a ו b

יתר על כן, לכל מספר x הנמצא בין a ל-b, ההשתנות מקיימת את השוויון

$$0 < | \ell n\, x - \ell n\, a | < | x - a | \frac{1}{c}$$

בשפת תורת הגבולות פירוש עובדה זו שהפונקציה $\ell n\, x$ רציפה בכל תחומה

5 קיום ויחידות

היות ש-$\ell n\, x$ הוא פונקציה עולה ורציפה אפשר להוכיח כי כל מספר ממשי הוא הלוגריתם הטבעי של מספר חיובי אחד ויחיד

כלומר נתון מספר ממשי כלשהו y, קיים מספר חיובי יחיד x, המקיים את השוויון $\ell n\, x = y$

הפירוש הגרפי של עובדה זו הוא שכל ישר מקביל לציר x חותך את גרף הפונקציה הלוגריתמית בנקודה אחת ויחידה כסיום ליחידת הלימוד נציג את גרף הפונקציה הלוגריתמית

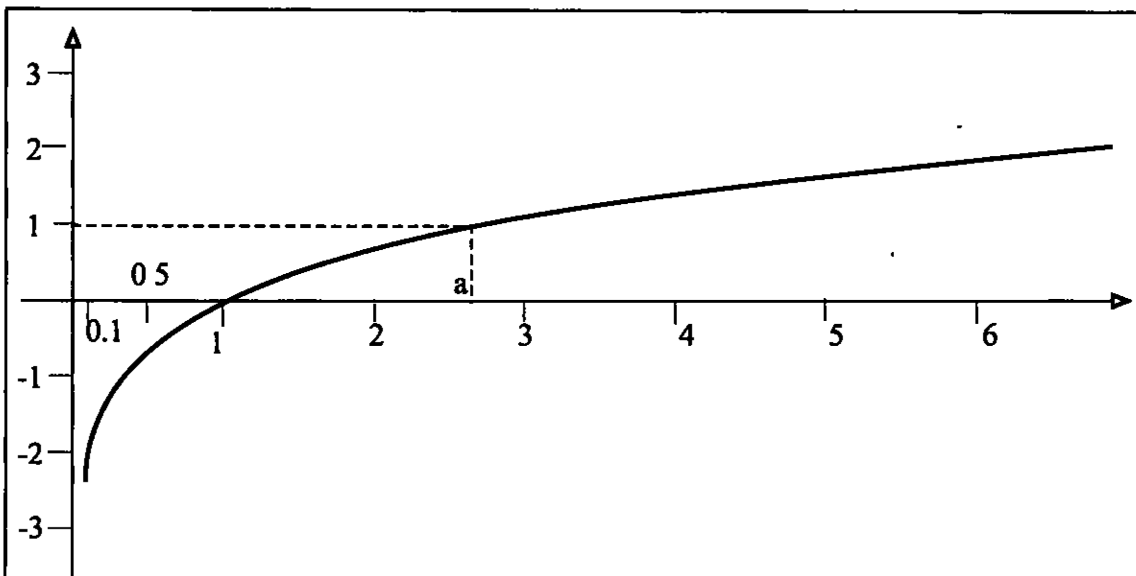
סיכום

במאמר זה הובאו השלבים העיקריים והמייחדים את הצגת הפונקציה הלוגריתמית מתוך גישה גיאומטרית הגישה המובילה היא אמנם גיאומטרית אך משולבים כאן פריטים מתוך האלגברה, האנליסה וכמובן הגיאומטריה האנליטית שילוב זה יכול להיות גורם המרענן את ההוראה והלמידה, וכפי שהוצג כאן, ללא קשיים ומוקשים

ביחידות הבאות יוצג המספר e, המספר בעל לוגריתם טבעי ששווה לאחד הנגזרת של הפונקציה הלוגריתמית הנובעת במישרין מהצגתה כשטח

הפונקציה המעריכית, תכונותיה ונגזרתה, מובאות מתוך ראייה של הפונקציה ההפוכה ללוגריתמית

קיים קובץ של תרגילים מותאמים ליחידת הלימוד שהוצגה כאן



x	0.1	0 2	0 5	1	2	a	3	4	5	6	7	8	9	10
ln x	-2.3	-1 6	-a7+	0	0 7+	1	1 1+	1.4+	1.6	1.8	1 9	2 1+	2 2+	2.3