עורך המדור:
עופר ליבה

ללמד טוב יותר

עופר ליבה
אוניברסיטת בן-גוריון בנגב, באר-שבע

• **דרכים בהוראת המתמטיקה.** נעמי ציזיק הוצאת אורט ישראל, 1995

מבוא

לפנינו ספר ייחודי בנוף החינוך המתמטי בישראל נעמי ציזיק, המפקחת על הוראת המתמטיקה ברשת אורט, אשר לה ניסיון רב-היקף בהוראה ובהדרכת מורים, מרכזת בספר שלל עצות להוראת הנושאים של החטיבה העליונה בכך היא מסייעת למורה בשיפור דרכי ההוראה ובגיוון השיטות והמהלכים הדידקטיים

במאה האחרונה אנו עדים להתקדמות ולהתפתחות חסרות תקדים של המדע והטכנולוגיה תהליך זה מחייב עדכון של שיטות ההוראה מצד אחד, ומצד שני הקניית חשיבה וידע מתמטיים לכלל התלמידים, ברמה שתאפשר להם להבין וליישם את הטכנולוגיות המתקדמות במהלך חייהם לשינויים בדרך הוראת המתמטיקה פנים רבות יש לשים יותר דגש על הבנה אינטואיטיבית ופחות על מיומנויות טכניות, על פיתוח חשיבה מקורית, על כושר ניתוח של בעיות ומגוון דרכי פתרון, וכן על ראייה כוללת ואינטגרטיבית של המקצוע יש להרגיל ולעודד את התלמידים לשאול, לחקור ולבנות בעיות באופן יזום ועצמאי כמו כן כדאי להנהיג דיונים בכיתה, תוך יצירת אווירה המאפשרת העלאת רעיונות באופן פתוח וחופשי, ובכך לטפח אצל התלמיד את היכולת להגיע למסקנות ולתובנות תוך כדי מעורבות פעילה בתהליך הלמידה

השינויים הרצויים מחייבים תכנון נכון, לקיחת סיכונים, וביצוע תוך כדי בקרה מתמדת והפקת לקחים אם נצליח ביישום השינויים הנדרשים, יצא התלמיד עם מגוון כלים ללמידה עצמית ועם יכולת התמודדות עצמאית לעולם המשתנה בקצב מהיר

בסקירה זו, נדגים מבחר הצעות המובאות בספר, והדגש בדוגמאות שבחרנו הוא 'שיתוף הפעולה' בין חלקים שונים של תכנית הלימודים.

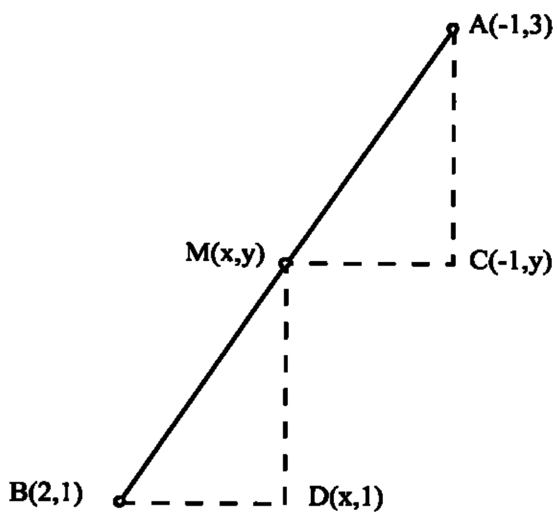
הגיאומטריה בשירות הגיאומטריה האנליטית

נתונות הנקודות $A(-1, 3)$ ו- $B(2, 1)$ נסמן $M(x, y)$ אמצע הקטע AB ניצור שני משולשים ישרי זווית חופפים ΔMCA ו-ΔBDM, כמתואר באיור 1 כעת

$$\Delta x_{AM} = \Delta x_{MB} \Rightarrow -1 - x = x - 2$$
$$\Delta y_{AM} = \Delta y_{MB} \Rightarrow 3 - y = y - 1$$

קיבלנו מערכת קלה לפתרון

אותו עיקרון פשוט יפעל גם כאשר נתונים אמצע הקטע ואחד הקצוות



איור 1

ההמחשה הגרפית של שקילות מערכת ליניארית

נתונות הנקודות $A(-1, 3)$ ו- $B(2, 1)$ נסמן בתור $M(x, y)$ נקודה כלשהי הנמצאת במרחקים שווים מקצות הקטע AB. אם נבטא את העובדה $MA = MB$ באמצעות נוסחת המרחק בין שתי נקודות, נקבל את המשוואה $6x - 4y + 5 = 0$ מצד שני, אם נבנה את משוואת האנך האמצעי לקטע, נמצא את אותה משוואה

אפשר להכליל ולהיווכח שהדבר תמיד נכון לגבי נקודות A, B כלשהן, המשוואה המתקבלת (בשתי הדרכים) היא:

$$2(y_A - y_B)y + 2(x_A - x_B)x = y_A^2 - y_B^2 + x_A^2 - x_B^2$$

ובניסוח גיאומטרי מילולי המקום הגיאומטרי של הנקודות הנמצאות במרחקים שווים מקצות קטע נתון, הוא האנך האמצעי לקטע

באופן דומה אפשר לאמת מספר רב של תכונות גיאומטריות, כמו התכונות של המרובעים המיוחדים (דלתון, טרפז שווה שוקיים, מקבילית, מעוין, מלבן, ריבוע) לדוגמה, אם נמקם את קדקודיו של מלבן בנקודות $(a, b), (a, -b), (-a, -b), (-a, b)$, דבר הדורש בפני עצמו הכרה טובה של הגדרת המלבן ובחירה נוחה של מיקומו במערכת הצירים, נקבל, משוואת האלכסונים

$$bx - ay = 0, \quad bx + ay = 0,$$

נקודת מפגש האלכסונים היא $(0, 0)$, והיא גם אמצע שני האלכסונים,

והאורך המשותף לשני האלכסונים הוא $\sqrt{(2a^2 + 2b^2)}$

כלומר האלכסונים חוצים זה את זה ושווים זה לזה

אם היינו ממקמים את קדקודיו של המלבן אחרת, כגון בנקודות $(0, 0), (0, b), (a, b), (a, 0)$, כאשר למען הפשטות הפרמטרים חיוביים, היינו מקבלים את אותן מסקנות

ההמחשה הגרפית של שקילות מערכת ליניארית

אם מלמדים לפתור מערכת ליניארית (שני משתנים) על-ידי מעברים אשר שומרים על השקילות - והמחברת מציעה להקפיד בעניין זה - נוכל להמחיש היטב מה קורה בתהליך, באמצעות הגרפים של המשוואות.

לדוגמה, נפתור את המערכת

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$$

אם נקפיד כאמור על שלבי מעבר אשר שומרים על שקילות המערכת, נקבל

$$\begin{aligned} 2x &= 4 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$$

ולאחר מכן

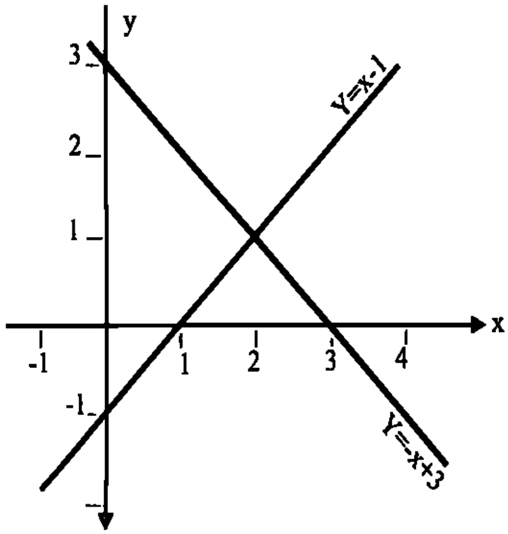
$$\begin{aligned} x &= 2 \\ 2 - y &= 1 \end{aligned}$$

ולבסוף

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

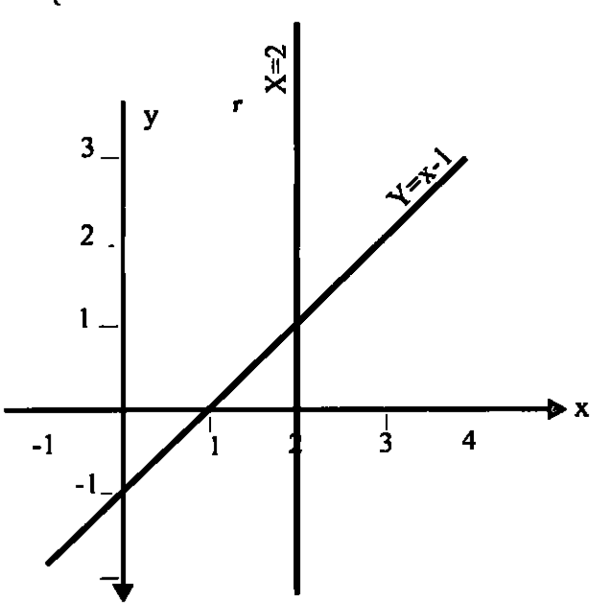
כלומר פתרון המערכת הוא הזוג $(2, 1)$

אם נסרטט את הגרפים של המשוואות המתקבלות בכל שלב (איור 2), אנו נראה יפה מאוד מה הכוונה בשקילות בכל שלב, נקודת החיתוך בין הישרים, הנקודה $(2, 1)$, 'תישאר במקומה'



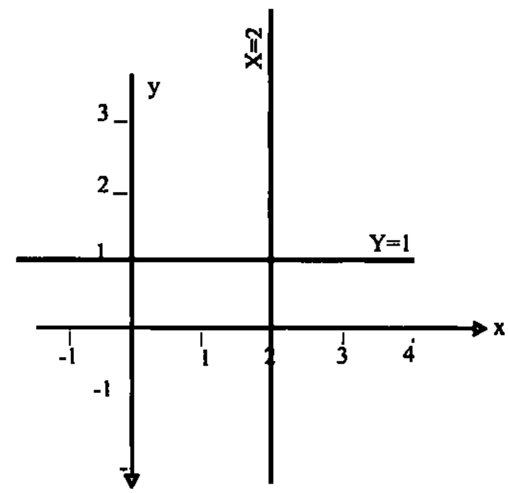
איור 2א

$$\begin{cases} x + y = 3 \quad (y = -x + 3) \\ x - y = 1 \quad (y = x - 1) \end{cases}$$



איור 2ב

$$\begin{cases} 2x = 4 \quad (x = 2) \\ x - y = 1 \quad (y = x - 1) \end{cases}$$



איור 2 ג

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

הפתרונות של המשוואה הריבועית

בסעיף זה אנו נניח שנוסחת הקדקוד ידועה, וכן ידועה העובדה שהפרבולה סימטרית יחסית לקו אנכי שעובר דרך הקדקוד ('ציר הסימטריה')

נתייחס לפרבולה שמשוואתה היא $y = ax^2 + bx + c$ ואשר חותכת את ציר ה- x בשתי נקודות $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$, כאשר $x_1 < x_2$, ונסמן את הקודקוד בתור K

אם t הוא המרחק בין נקודות החיתוך לבין היטל הקודקוד על ציר ה- x, מתקיים

$$x_2 - x_K = x_K - x_1 = t$$

נציב $x_K = -b/2a$

ונקבל $x_2 = t - b/2a$

נציב כעת $(x_2, 0) = (t - b/2a, 0)$

במשוואת הפרבולה

$$a(t - b/2a)^2 + b(t - b/2a) + c = 0$$

סידור המשוואה ייתן

$$t^2 = (b^2 - 4ac)/ 4a^2$$

ולכן

$t = \sqrt{}(b^2 - 4ac)/ 2a$ אם $a > 0$,

$t = -\sqrt{}(b^2 - 4ac)/ 2a$ אם $a < 0$

ומכאן

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad (a>0)$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad (a<0)$$

פעולה דומה לגבי הנקודה $(x_1, 0)$ תיתן

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad (a>0)$$

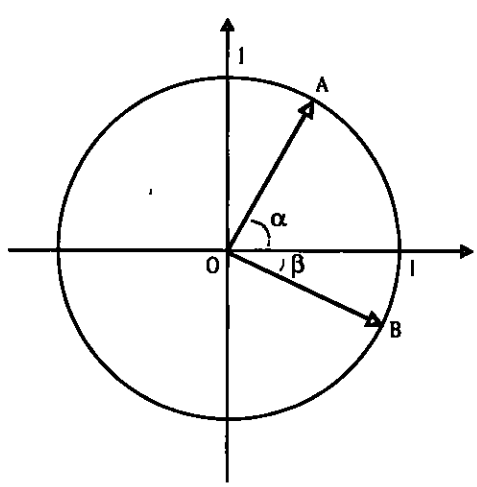
$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad (a<0)$$

אין ספק ששיטה זו מאפשרת להבין היטב הן את נוסחת הפתרונות והן את הגרף של הפונקציה הריבועית

הוקטורים בשירות הטריגונומטריה

לאחר הוראת המושג מכפלה סקלרית של שני וקטורים, אפשר להוכיח בקלות נוסחאות בטריגונומטריה דוגמה אחת תמחיש היטב את העניין

u ו- v הם שני הווקטורים אשר מחברים את מרכז המעגל הטריגונומטרי עם הנקודות A ו- B על המעגל (בהתאמה), α ו- β הן הזוויות (החיוביות) אשר יוצרים שני הווקטורים עם הציר האופקי, בהתאמה)איור 3(



איור 3

מצד אחד, לפי הגדרת המכפלה הסקלרית

$$u \cdot v = 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha + \beta)$$

מצד שני, שיעורי הנקודות הם $A(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $B(\cos\beta, -\sin\beta)$, לכן, לפי הנוסחה האנליטית של מכפלה סקלרית

$$u \cdot v = (\cos\alpha, \sin\alpha) \cdot (\cos\beta, -\sin\beta) =$$
$$\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

משתי התוצאות מקבלים את הנוסח

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

הקלות שבה אפשר להוכיח משפטים ותכונות בגיאומטריה התלת-ממדית באמצעות וקטורים ידועה ניתן כאן דוגמה להמחשת העניין

משפט דרך כל נקודה P במרחב עובר ישר אחד ויחיד אשר ניצב למישור נתון π

הוכחה
נניח ללא הגבלת הכלליות שהנקודה P נמצאת על המישור π
נבחר כבסיס למרחב שלושה וקטורים אורתונורמלים **u**, **v**, ו-**w**, אשר להם מוצא משותף והוא הנקודה P, כאשר שני הראשונים מונחים על המישור

כל וקטור **p** במרחב אפשר להציג כצירוף ליניארי של וקטורי הבסיס נוכל אפוא לרשום
$\mathbf{p} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w}$ (c ,b ,a הם מספרים ממשיים)
נבנה את המכפלות הסקלריות

$$\mathbf{p}\ \mathbf{u} = a\mathbf{u}\ \ \mathbf{u} + b\mathbf{v}\ \ \mathbf{u} + c\mathbf{w}\ \ \mathbf{u} =$$
$$= a\ \ 1 + b\ \ 0 + c\ \ 0 = a$$
$$\mathbf{p}\ \mathbf{v} = a\mathbf{u}\ \ \mathbf{v} + b\mathbf{v}\ \ \mathbf{v} + c\mathbf{w}\ \ \mathbf{v} =$$
$$= a\ \ 0 + b\ \ 1 + c\ \ 0 = b$$

אם נדרוש כעת שהווקטור **p** יהיה ניצב לווקטורים **u** ו- **v**, נקבל
$a = b = 0$ כלומר, $\mathbf{p} = c\mathbf{w}$
פירוש הדבר שרק הווקטור **w** (עד כדי כפל בסקלר) ניצב למישור π, ובמילים אחרות יש רק ישר אחד דרך P הניצב למישור

רשימת ספרות

Backhouse, John, and others *Improving the Learning of Mathematics* Cassell, 1992.

Cooney, Thomas (ed) *Teaching and Learning Mathematics in the 1990s* NCTM, 1990

Coxford, Arthur (ed) *The Ideas of Algebra* NCTM, 1988

Crouse, Richard and Clifford Sloyer *Mathematical Questions from the Classroom* Janson, 1987

Farrell, M and W Farmer *Secondary Mathematics Instruction* Janson, 1988

Gruws, Douglas and Thomas Cooney, (ed) *Effective Mathematics Teaching* NCTM, 1988

Hirsch, Christian (ed) *The Secondary School Mathematics Curriculum* NCTM, 1985

Krulic, Stephen (ed) *Problem Solving in School Mathematics* NCTM, 1980

Lindquist, Mary *Learning and Teaching Geometry* NCTM, 1987

NCTM *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* NCTM, 1989

NCTM *Professional Standards for Teaching Mathematics* NCTM, 1991

Polya, George *How to Solve It* Penguin, 1990

Skemp, Richard *The Psychology of Learning Mathematics* Penguin, 1986

Solow, Daniel *How to Read and Do Proofs* Wiley, 1990

Willoughby, Stephen *Mathematics Education for a Changing World* ASCD, 1990