



ארכיאולוגיה מתמטית

יונתן אחיטוב*

בית ספר דצינגר, קרית שמונה

תעלומה ארכיאולוגית

באתר חפירות ארכיאולוגיות, בכפר נידח במרכז אמריקה, נחשפה בקתה שרופה בתוך האפר נמצאה יריעה קטנה, חרוכה בקצוות, ועליה סימני כתב משונים (ראה איור)

לאיש מבין חברי המשלחת לא היה מושג מהו תוכן היריעה, כי שום מסמכים כתובים של התרבות האינדיאנית העתיקה הזאת, שנכחדה באופן טרגי עוד לפני קולומבוס, לא התגלו קודם לכן

ערב אחד ישבו הארכיאולוגים להכין דו"ח זמני על ממצאיהם הם התקשו לסווג יריעה מסתורית זאת, ולכן שוב הוציאו אותה בזהירות מארזתה, והתבוננו בה שעה ארוכה בדממה

את השתיקה המשותפת קטע לפתע צעיר החופרים, תלמיד תיכון שהתנדב לבלות את חופשתו בחפירות 'לא תאמינו, אבל אלה נראים כמו תרגילי חשבון' קרא בהתרגשות 'למעלה כתובים מספרים, ואחר כך כל מיני פעולות חשבון, אבל לא לגמרי ברור לי מה הן...'

ראש המשלחת לקח לידו את היריעה, הסתכל בה, והפטיר 'חשבתי שבקריירה האקדמית שלי שוב לא אצטרך יותר להתעסק במקצוע המשעמם הזה, אבל יש הפתעות בחיים! הפעם זה נראה לי ממש מעניין יש כאן גם חצים בשני כיוונים מה, לכל הרוחות האינדיאניות, כתוב כאן...'

אחת הארכיאולוגיות הסתכלה שוב ביריעה, והוסיפה 'כן, ונדמה לי שבשורה האחרונה רשומים כמה תרגילים שנשארו מאות שנים ללא פתרון מסכן הילד האלמוני הזה שלא גמר שיעורי בית!'

שאלות מנחות לפתרון החידה (הצעה)

1 מה הם המספרים המופיעים בקבוצה הראשונה? מה מבטאים החיצים שמעל ומתחת למספרים? האם אפשר לפרש אותם בשתי דרכים שונות?

2 מהי פעולת החשבון הכתובה בקבוצה השנייה? רשמו את התרגילים בעזרת הסימנים המקובלים אצלנו? האם יש אפשרות נוספת?

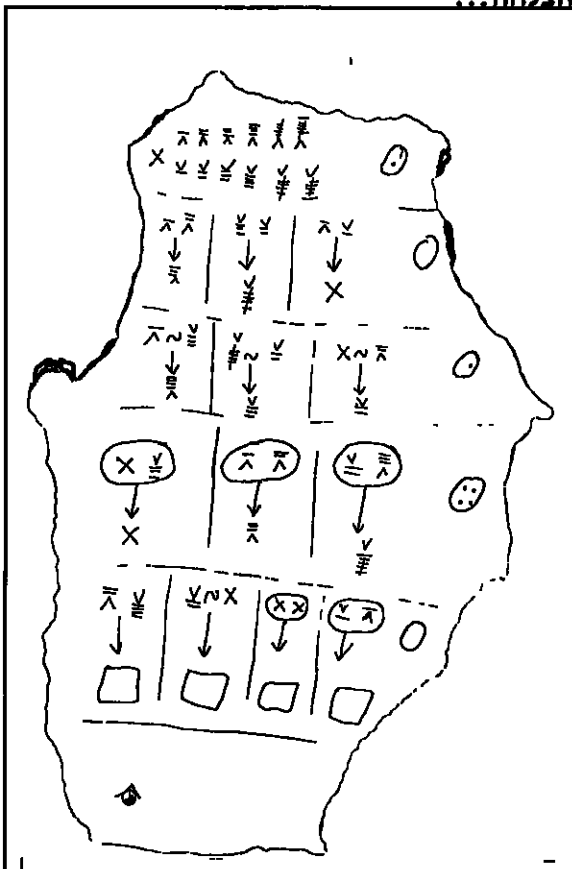
* המחבר משתלם ומדריך במסגרת 'פרוייקט מחר 98' באצבע הגליל, תל חי

3 מהי פעולת החשבון הכתובה בקבוצה השלישית? רשמו את התרגילים בעזרת הסימנים המקובלים אצלנו? האם יש אפשרות נוספת?

4 מהי פעולת החשבון הכתובה בקבוצה הרביעית? רשמו את התרגילים בעזרת הסימנים המקובלים אצלנו? האם יש אפשרות נוספת?

5 האם עכשיו יש פירוש יחיד לשני סוגי החצים שמעל ומתחת למספרים? אם כן, מהו? פתרו את התרגילים שנתרו "מאות שנים" ללא פתרון

ההצלחה!!!



ניתוח החידה הארכיאולוגית

התבוננת בשתי שורות המספרים הרשומים בקבוצה הראשונה, וכן פתרון תרגילי החיבור והחיסור המופיעים בשתי הקבוצות הבאות, מבליטים עובדה חשובה **אין כל אפשרות להבחין בין המספרים החיוביים והשליליים על-ידי פעולות החיבור והחיסור**. אפשר לומר ששתי קבוצות אלה סימטריות זו לזו ביחס לפעולות אלה סימטריה זאת ניתנת להמחשה נוספת על-ידי התרגיל הבא

נסמן את קבוצות החיוביים והשליליים באותיות A ו- B, לאו דווקא בהתאמה התבוננו בשני המשפטים הבאים
א סכום של שני מספרים מקבוצה A הוא מספר מקבוצה A

ב ההפרש בין מספר מקבוצה B למספר מקבוצה A הוא מספר מקבוצה _____ (השלִימו)

האם תוכלו לקבוע אם B היא קבוצת החיוביים או שהיא קבוצת השליליים?

הסימטריה הזאת 'מתקלקלת' רק בקבוצת התרגילים הרביעית, תרגילי הכפל מכפלת שני מספרים בעלי חצים הפוכים (התרגיל הימני בקבוצה) היא ודאי שלילית, ומכאן מתברר שהסימן V^1 מציינ מספרים שליליים, והסימן ההפוך - את החיוביים

אם נמשיך את התרגיל הקודם נוסף את שני המשפטים הבאים

ג מכפלת שני מספרים מקבוצה A הוא מספר מקבוצה B
ד מכפלת מספר מקבוצה B במספר מקבוצה A הוא מספר מקבוצה _____ (השלִימו)

האם תוכלו עתה לקבוע אם B היא קבוצת החיוביים או שהיא קבוצת השליליים?

הגדרת המושג 'מספר חיובי'

לאור הניתוח של פתרון החידה הארכיאולוגית, אפשר עתה להגדיר את המספרים החיוביים כך

המספרים הממשיים מתחלקים לשלוש קבוצות זרות, האחת היא $\{0\}$, והשתיים האחרות מקיימות את התכונות הבאות

- 1 כל אחת מהן מכילה את כל הנגדיים של חברתה
- 2 כל אחת מהן סגורה לפעולות החיבור
- 3 רק אחת מהן סגורה גם לכפל

הערה

לא כדאי למסור לתלמידים דף עבודה מסודר עם השאלות הנ"ל, אלא לכוון את תשומת לבם במהלך עבודתם לנקודות שהעליתי במיוחד חשוב לשים לב להבדל שיש בין חיבור וחיסור לבין כפל, ביחס לסימטריה שיש בין החיוביים והשליליים, כלומר, להבדל במספר הפירושים האפשריים בכל קבוצה של תרגילים

אי-שוויונים ו'ארכיאולוגיה מתמטית'

מה זה $a > b$?

ספרי אלגברה מקובלים לרמה של 4-5 י"ל (תכנית רגילה)¹ פותחים את הפרק "אי שוויונים" בהגדרה המנוסחת, בקירוב, כך

יאם $a - b$ מספרים ממשיים, וקיים מספר חיובי p כך $a = b + p$, אז a גדול מ- b

מניסיוני, אין בהגדרה זאת קושי כלשהו לתלמידים, וכל חוקי האי-שוויון מוכחים בעזרתה בצורה פשוטה וקלה עם זאת, ניסיתי לפני שנים אחדות להעמיק בהבנת הגדרה זאת, ושאלתי את תלמידי הטובים 'מה פירוש "מספר חיובי p " הנוכח בהגדרה?' התשובה הצפויה הייתה, כמובן 'ק חיובי הוא מספר גדול מ-0'

עתה הפניתי את תשומת לבם למעגליות ההגדרות, כלומר, היחס 'גדול מ-' מוגדר בעזרת המושג 'מספר חיובי', ואילו המושג 'מספר חיובי' מוגדר באמצעות היחס 'גדול מ-''

בעיה לוגית זאת איננה, אמנם, בחומר לבגרות, אך היה נראה לי די חשוב לחדד קצת את רגישותם של תלמידי לדייקנות מתמטית

נתתי להם הזדמנויות אחדות לנסות ולהגדיר מחדש את המושג 'מספר חיובי', מבלי להיעזר באי-שוויון, אך זאת, כמובן, משימה לא קלה כלל (הקורא מוזמן לעצור כאן ולהציע תשובה משלו) אחרי ניסיונות אחדים סיפרתי להם את הסיפור על 'התגלית הארכיאולוגית', והם פתרו תרגילים אחדים הדומים לאלה המופיעים ביתצלום של יריעת העור החרוכה ששרדה מאות שנים (שוב אוזמין את הקורא שטרם התמודד עם חידה זאת, לעצור ולבלות שעה קלה בניסיונות פענוח של מסתרי 'הארכיאולוגיה המתמטית')

¹ דניאל שמיר, אלגברה, עמ' 5, בני גורן, אלגברה (4 ו-5 יחידות לימוד), עמ' 30

- 1 בכיתות ז', ח', אחרי לימוד פרק המספרים המכוונים וחוקי הפעולות שלהם
- 2 בכיתות י', י"א, כהכנה לחקירת סימני השורשים של משוואה ריבועית בעזרת נוסחאות וייטה
- 3 בכל הכיתות ז'-י"א, כפעילות העשרה ושעשוע

במשך הזמן שעבר מאז הצגת החידה בפני משתלמים מהפרייקט הני"ל, ובפני מורים למתמטיקה במפגשים של קשר-חם בשנת הלימודים תשנ"ז, נמסר לי על שימוש שנעשה בה בכיתות שונות בדרך כלל דווח על הנאה גדולה שגרם פתרון החידה לתלמידים, וכנראה גם למוריהם אני מקווה שהפצת רעיון זה תתרום לתוספת הנאה והנעה בלימוד המתמטיקה

אותה קבוצה הסגורה גם לכל נקראת בשם **המספרים החיוביים**.

יישומי החידה בכיתות שונות

כאמור, המוטיבציה שלי לכתיבת הסיפור ולעיל הייתה הצורך בהגדרה מדויקת של יחס האי-שוויון, המסתמך על המושג 'המספר החיובי' ההתנסות עם כיתות י"א ברמה של 4-5 יחידות לימוד הייתה חיובית מאוד, והצגת רעיון זה בפני חברי קבוצת העבודה שלי במסגרת פרויקט 'מחר 98 באצבע הגלילי' (שנה ג' בתשנ"ו) עוררה מיד הצעות לשילוב פעילות זאת בהקשרים מגוונים מאוד

