אינטרמטיקה

עורך המדור
עופר ליבה

בגיליון זה אנו פותחים מדור חדש, אשר יסקור את המידע הרב המצוי ברשת האינטרנט, במתמטיקה, חינוך וחינוך מתמטי
יתוארו בעיקר אתרים מעניינים בארץ ובעולם, וכן קבוצות דיון ואמצעים נוספים לשאיבת מידע מהרשת
המדור פתוח להשתתפות פעילה של הקוראים
נעמי ציזיק, המפקחת על הוראת המתמטיקה ברשת אורט, 'ביקרה' באתר המפורסם Ask Dr Math, והיא מתארת לנו את אחד האירועים שהייתה 'עדה' להם

Ask Dr. Math...

נעמי ציזיק
אורט ישראל

בחיפושיי אחרי עבודות חקר לטיפוח חשיבה פתוחה ויצירתית, נתקלתי באתר אינטרנט בשם Dr Math (http || forum Swarthmore edu/dr math), שתלמידים מציגים בו שאלות, ומקבלים תשובות מקבוצת מרצים באוניברסיטת סווארת'מור (Swarthmore) או מכל המעוניין להשתתף בדיון כדוגמה, בחרתי להביא כאן תיאור של השתלשלות העניינים בנושא שהוא חומר לימוד בבית הספר התיכון חקירת פולינום ושורשיו

הדיון נפתח בשאלה שהוצגה על-ידי קבוצת תלמידים בקורס מקדים ללימודי חדו"א (pre-calculus), שלמדו כבר מספרים מרוכבים שאלתם

> ידוע לנו כי אפשר לגלות מידע רב על שורשיו הממשיים של פולינום על-ידי הסתכלות בגרף שלו מה אפשר לגלות על שורשיו המרוכבים של הפולינום (בעל מקדמים ממשיים) על-ידי התבוננות בגרף? נראה לנו, כי יש 'קמטי' מעניין במקום שנראה קשור בדרך כלשהי ל'ממוצע' של זוג שורשים מרוכבים
> האם יש לכם רעיונות בנושא?

בשלב זה עונים **המרצים**, כי מעולם לא חשבו על הבעיה אך הם יתייעצו ויבדקו אותה אחד מהם דיווח, תוך זמן קצר, כי סרטט במחשב פונקציות רבות ולא מצא בהן 'קמטים' כמתואר בשאלה הוא אף ביקש הבהרה של המושג 'ממוצע' של שורשים אשר בו משתמשים התלמידים

התלמידים מבהירים

> אנו משתמשים במחשבון גרפי TI-82 לסרטוט הפולינומים לעתים הקמט נראה בקלות ולעתים קשה להבחין בו להלן שתי דוגמאות
>
> $$x^4-6x^3-22x^2+56x-64 \quad (1) \qquad (1)$$
>
> לפולינום זה זוג שורשים מרוכבים 1+i ו 1-I הממוצע שלהם (ממוצע חשבוני רגיל) הוא 1 אם תתבוננו בגרף הפולינום, יש "גבעה" (או קמט מוגבה) ליד x=1 השתמשנו בחלון
>
> $-10<x<10 \quad -600<y<100$
>
> דוגמה נוספת
>
> $$3x^4-4x^3+3x-4 \qquad (2)$$
>
> לפולינום זה זוג שורשים מרוכבים $\frac{1+\sqrt{5}i}{2}$ ו $\frac{1-\sqrt{5}i}{2}$, שהממוצע שלהם הוא $\frac{1}{2}$
>
> השתמשנו בחלון
>
> $-3<x<3 \quad -5<y<5$

גם כאן יש קמט ליד $x=\frac{1}{2}$

למחרת הם מוסיפים

בשני הפולינומים שהזכרנו, הקמט היה ליד הממוצע של זוג השורשים המרוכבים השתמשנו בשאלה במלה 'לידי' שיש להבהירה בפולינום (1) הקמט מוגבה, ועל-פי התכנה למציאת המקסימום (שבמחשב) השיא הוא בנקודה בה x=0 97051 (כאשר ממוצע השורשים הוא ב-1) בפולינום (2) הקמט דומה יותר לשקע, והוא נמצא בנקודה בה $x=\frac{1}{3}$ (וממוצע השורשים הוא $\frac{1}{2}$) זו הכוונה במלה 'לידי' שנמשיך להשתמש בה, מאחר שאנו סבורים, כי קשה להגדיר במדויק את השפעת השורשים המרוכבים על הגרף הממשי

ניסינו לחקור את השפעת הזזת השורש הממשי של הפולינום על הקמט בכל אחד מהפולינומים שלהלן השורשים המרוכבים הם 1+i ו-1-i, שהממוצע שלהם 1

• שימו לב מה קורה לשיעור ה-x של הקמט כשהשורש הממשי זז ימינה בכל אחד מהמקרים הללו קיבלנו קמט מוגבה, והשתמשנו ב-TI-82 למציאת שיעור ה-x של נקודת המקסימום שלו

שיעור ה-x	הפולינום
1 333334	$(x^2-2x+2)(x-3)$
1 183504	$(x^2-2x+2)(x-4)$
1 131482	$(x^2-2x+2)(x-5)$
1 103195	$(x^2-2x+2)(x-6)$
1 085147	$(x^2-2x+2)(x-7)$
1 056082	$(x^2-2x+2)(x-10)$
1 005051	$(x^2-2x+2)(x-100)$
1 000501	$(x^2-2x+2)(x-1000)$

נראה לנו כי הקמט בגרף מושפע תמיד מהשורשים המרוכבים אנו מנסים למצוא שיטה גרפית שתאפשר לגלות את השורשים המרוכבים מהגרף הממשי

כאן שילבו **המרצים** הסבר מהי נקודה 'חשודה' מאחר שהתלמידים עדיין לא למדו חדו"א

בשלב זה, הצטרף אל הדיון **פרופסור מאורר** (Prof. Maurer), חבר בצוות האוניברסיטה ודמות מובילה בנושאי מתמטיקה דיסקרטית הוא הוסיף פן מעניין לחקירה

נניח כי $c=a+bi$ ו-$c^*=a-bi$ הם שני שורשים צמודים של הפולינום $p(x)$ ושאר השורשים ממשיים פירוק לגורמים של הפולינום יתן, אם כך

$$p(x)=A(x-c)(x-c^*)(x-r_1)\quad(x-r_k)$$

כאשר $r_1, r_2, \quad r_k$ הם השורשים הממשיים של הפולינום, נגדיר

$$f(x)=(x-c)(x-c^*)=x^2-2ax+(a^2+b^2)$$

ו- $g(x)=A(x-r_1)\quad.(x-r_k)$

כך שקיים $p(x)=f(x)g(x)$

נניח $K=g(a)$ אזי עבור x קרוב ל-a

$$p(x)\sim f(x)g(a)=Kf(x) \quad (*)$$

במלים אחרות, עבור x קרוב ל-a, $p(x)$ נראה בערך כמו $Kf(x)$, שהיא פונקציה ריבועית מאחר שהקודקוד של פונקציה ריבועית זו נמצא ב-x=a, גם הקמט נמצא בסביבה

בדוגמה (2) שנתם, גרף הפונקציה

$$p(x)=3x^4-4x^3+3x-4$$

מראה קמט קטן, לא מוגבה מדועי מכיוון ש-(*) אינה תבנית מדויקת $p(x)$ היא למעשה $f(x)g(x)$ ולא $f(x)g(a)$

אם $g(x)$ קרובה ל-$g(a)$ (כלומר, $\frac{g(x)}{g(a)}$ קרוב ל-1), אזי (*) די מדויקת, ונקבל קמט האם הקמט יהיה מוגבה או שקועי זה תלוי בסימן של K' אחרת, השינוי ב-$g(x)$ יגבר על האופי הריבועי של $f(x)$ זה מה שקורה בדוגמה (2) אפשר להראות בעזרת חדו"א, כי ככל שמתרחקים השורשים הממשיים מ-a וככל שהחלק המדומה של השורשים, b, קטן יותר, תהווה (*) אומדן טוב יותר, כלומר, אפשר לחניח שנראה קמט בולט יותר

ועוד מחשבה בשבילכם שמתם לב שהנקודות הקריטיות של $p(x)$ ושל $f(x)$ אינן זהות מאיזה צד של השנייה תהיה הראשונה' אנו זקוקים למידע זה כדי שנוכל לאמוד, על-פי הגרף, את השורשים המרוכבים התשובה נקבעת על-פי צורת הגרף של $g(x)$ סביב x=a למשל, אם $g(a)>0$ ו-$g(x)$ יורדת סביב x=a, אזי המינימום המקומי של $p(x)$ יהיה מימין למינימום המקומי של $f(x)$ האם אתם רואים מדועי

כאן חזר לדיון אחד המרצים ממשתתפיו הראשונים הוא מעלה רעיון חדש

נתבונן בגרף של פרבולה ממוצע שורשי הפרבולה הוא שיעור ה-x של הקדקוד נתבונן, אם כך, בתהליך הבא ככל שערכי n בביטוי x-n גדלים, הקמט שאתם רואים מתקרב ל-x=1 אפשר לומר, כי בסביבות הראשית, (נניח בין 3 ו-3-), x-n הוא גורם שאינו משמעותי **לצורתו** של הגרף הוא רק 'מותח' אותו במקצת (במקביל לציר ה-y) נסו לקחת שני מחשבונים גרפיים בראשון בחרו $0<x<3$ 5 $1<y<3$. ובשני $1000<y<3500$. $0<x<3$ (scale 1000) סרטטו בהם, בהתאמה, את x^2-2x+2

$(x^2-2x+2)(x+1000)$ (בחרתי ב- 1000 במקום ב- -1000 כדי ששני הגרפים יהיו פתוחים כלפי מעלה, דבר שאינו משפיע על הבנת הרעיון הכללי)

נראה לי, שזה צעד בכיוון הנכון, למרות שאין זו תשובה מלאה. נראה לי, שהעניין קשור בעובדה, שלכל קטע של עקום אפשר למצוא קירוב שהוא פרבולה (ראו טורי טיילור - התעלמו אם אינכם מבינים)

פה הצטרף לדיון **ג'ון קונווי** (John Conway), מתמטיקאי דגול מאוניברסיטת פרינסטון, שכתב בין השאר

בואו נחזור לשאלה המקורית. נראה לי שיש להוסיף שדרגת הפולינום היא גודל ידוע, אם ברצוננו 'לקרוא' אינפורמציה בקלות

בנוסף, בואו ונחשוב מה כוונתנו במלים 'התבוננות בגרף' אילו יכולנו למדוד את ערכי הנקודות שעל הגרף בדיוק רב, היינו יכולים, תיאורטית לפחות, לחשב איזו פונקציה הוא מתאר, ואז כל השורשים היו למעשה נקבעים על-ידי צורתו **המדויקת** של הגרף. אם ידוע שדרגת הפולינום היא n, אנו נדרשים 'למדוד' n+1 נקודות על הגרף כדי שנוכל, באופן תיאורטי לפחות, לחשב את כל המקדמים של הפולינום

אם כך, אפשר **לנחש** על-ידי התבוננות בגרף, מה יהיו שורשיו המרוכבים

וכאן נפתח דיון ארוך שכלל בתוכו המלצות של פרופ' קונווי לגבי דרכי הוראה, שלא אכנס אליהן כאן

התלמידים המשיכו לבדוק פולינומים שלהם **שני** זוגות של שורשים מרוכבים צמודים וקבוצות אחרות של פולינומים, והגיעו למסקנה **שאין שיטה פשוטה למציאת שורשיו המרוכבים של פולינום מהתבוננות בגרף הממשי שלו**, אך הם למדו רבות מעצם החקירה

החקירה לא הסתיימה ומי יודע אם תסתיים, אך בעיניי היא דוגמה ומופת לעבודת חקר משותפת של תלמידים, מורים ומרצים, פתוחה ומעניינת. כל המשתתפים בדיונים חזרו והדגישו כמה הנאה ועניין מצאו בחקירה ובקשרים שנוצרו בעקבותיה

אם נצליח גם אנו לפתוח בדיונים כאלה בבתי הספר מבלי להיבהל כשהתשובה אינה גלויה לעין ואיננו יודעים לאן הדיון יוביל - אזי נגדל דור של תלמידים חושבים ויוצרים, והרי זה שכרנו