ועוד על חתך הזהב

איגור זלצר
אוניברסיטת בן-גוריון בנגב

'Lucas Pacioli (1445-1517) במאמרו המפורסם 'On Divine Proportion כתב על חתך הזהב (הוא גם השתמש במונחים (golden mean or divine proportion

איור 1

הקטע AB מחולק על-ידי נקודה M לשני קטעים (גדול וקטן), כך שהיחס בין AM ל-MB (קטן לגדול) שווה ליחס בין MB ל-AB (גדול לקטע כולו)

אם נניח ש-$AB = 1$ ונסמן $MB = x$ אז נקבל $1\ x = x\ (1-x)$ ומכאן $x^2 = 1 - x$ או $x^2 + x - 1 = 0$

נתבונן רק בשורש החיובי (השורש השני שלילי) והוא $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

- אחת הבעיות המפורסמות בגיאומטריה היא טריסקציה של זווית - לחלק את הזווית הנתונה לשלושה 'חלקים' שווים באמצעות סרגל ומחוגה

ידוע שאי-אפשר לבצע את הבנייה באמצעות הכלים הללו, אך אפשר לפתור את הבעיה, אם נוסף על סרגל ומחוגה נשתמש בכלים אחרים

ננסה לבצע את הבנייה באמצעות מחוגה וסרגל עם קטע המסומן עליו

1 תהי α הזווית הנתונה נסרטט את המעגל, כך שרדיוסו r שווה לאורך הקטע המסומן על הסרגל ומרכזו בקדקוד הזווית הנתונה

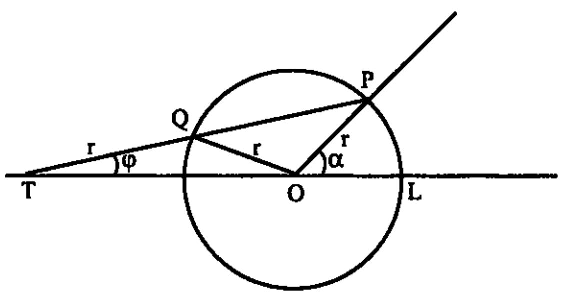
2 תהי נקודה P נקודת החיתוך בין המעגל לאחת מהקרניים של הזווית הנתונה

3 תהי נקודה P קו ישר, כך שאורך הקטע QT הוא r, כאשר הנקודה T היא נקודת החיתוך בין קו ישר העובר דרך הנקודה P להמשכה של הקרן השנייה של הזווית הנתונה והנקודה Q היא נקודת החיתוך בין קו ישר העובר דרך הנקודה P למעגל

4 נסמן זווית $\angle QTO - \varphi$

5 אפשר לראות שמתקיים $\varphi = 3\alpha$

6 אומרים שאת אופן הבנייה הזה המציא ארכימדס



איור 2

7 ציור 1 כאן 'דומה' לציור 6 במאמר 'חתך הזהב' (עופר ליבה, על"ה 18, עמ' 51) והוא 'זהה' לו, כאשר מתקיים התנאי $TP = TO$, כלומר, משולש זהב 'צר' אפשר לקבל כמקרה פרטי של הבעיה - טריסקציה של זווית הפתורה באופן של ארכימדס'''

8 שים לב במשולש זהב 'רחב' שתי זוויות חדות, בנות 36°, הן שליש (כל אחת בנפרד) מהזווית הקהה, בת 108°

9 שים לב במשולש זהב 'צר' זווית אחת היא בת 36° (שליש של הזווית הקהה במשולש זהב 'רחב') ושתי הזוויות האחרות הן בנות 72° (שני שלישים של הזווית הקהה במשולש זהב 'רחב')

10 כל הזוויות הן כפולות של 36, $6^2 = 2^1\ \ 3^2$

11 $72 = 6^2\ \ 2 = 3^2\ \ 2^1$ קסם''' נתבונן במכפלות של הבסיסים והמעריכים הן 6'''

12 $108 = 6^2\ \ 3 = 3^1\ \ 2^2$ ושוב מכפלות של הבסיסים והמעריכים הן 6'''

13 לא נשכח שהמספר 6 הוא מספר מושלם והמספרים 2, 3 הם מחלקים 'ראשוניים' שלו

• נשוב לבעיות בניית קטעים באמצעות סרגל ומחוגה חשוב לדעת מהו התנאי לבניית הקטע הנתון בעזרת הנוסחה

הערה פעולות החיבור, חיסור, חילוק, כפל, הוצאת שורש (ממספר לא שלילי) נקראות פעולות בסיסיות

משפט אפשר, באמצעות סרגל ומחוגה, לבנות את הקטע X שאורכו נתון כפונקציה חיובית של אורכי קטעים נתונים, אם ורק אם אפשר לבטא את אורכו של הקטע X בעזרת אורכי קטעים נתונים ומספר סופי של פעולות בסיסיות

14 האם אפשר לסרטט, באמצעות סרגל ומחוגה, קטעים שאורכם

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ו- $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,

התשובה היא כן

15 נתבונן במצולעים משוכללים האם אפשר, באמצעות סרגל ומחוגה, לבנות את המצולע המשוכלל בעל n צלעות? השאלה הזו שקולה לשאלה האם אפשר, באמצעות סרגל ומחוגה, לחלק את המעגל ל-n חלקים (קשתות) שווים?
ב-1976 הוכיח Karl Gauss את המשפט הכללי על האפשרות לבנות את המצולע המשוכלל בעל n צלעות באמצעות סרגל ומחוגה

נתבונן ברעיון עיקרי של המשפט
יהי (O,r) ω מעגל ויהי $r=1$ נחלק את המעגל ל-n חלקים (קשתות) שווים, כאשר n הוא מספר ראשוני נעביר דרך נקודה O שני קווים ישרים מאונכים זה לזה, משמעותם צירים ה-X וה-Y

יהי קרן חיובי של ציר ה-X חותך את המעגל ω בנקודה $E\ (1,0)$

ידוע שלכל מספר $z=x+yi$ במערכת הצירים מתאימה נקודה עם שיעורים (x,y) כדי לחלק את המעגל ל-n חלקים שווים עלינו לבנות את הנקודות הבאות על המעגל

$$z_k=\cos\frac{2\pi}{n}k+i\sin\frac{2\pi}{n}k$$

(כאשר $k=0,1,\ \ n-1$), כלומר, לבנות שורשים שונים מאפס של משוואה $z^n-1=0$

השורשים הללו הם שורשים של המשוואה הבאה שנקראת משוואת חלוקת המעגל

$$Z^{n-1}+Z^{n-2}+\quad+Z+1=0$$

נתבונן במקרה פרטי, כאשר $n=5$

משוואת חלקות המעגל היא

$$z^4+z^3+z^2+z+1=0$$

נבדוק אם אפשר לבנות (באמצעות סרגל ומחוגה) שורש כלשהו של המשוואה הזו, למשל,

$$z=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$$

נסמן $v=z+\frac{1}{z}$ (1), אז $v=2\cos\frac{2\pi}{5}>0$

הערה אם $z=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}=x+iy$,
אז $z=\frac{1}{z}=2\cos\frac{2\pi}{n}$

נחלק את שני האגפים של המשוואה ל- z^2 , ונקבל את המשוואה הבאה

$$(2)\quad z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0$$

מ-(1), אחרי הצבה, נובע שמשוואה (2) ניתנת להצגה באופן הבא

$$v^2+v-1=0$$

למשוואה הזאת יש שני שורשים, אחד מהם חיובי והשני שלילי, אך כיוון ש- $v>0$ נקבל

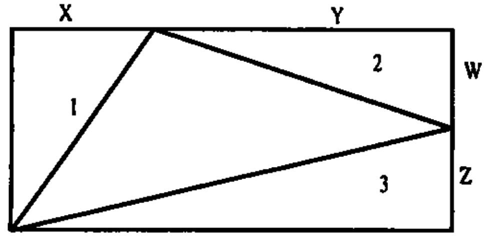
$$\boxed{v=\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

אפשר לבנות באמצעות סרגל ומחוגה קטע באורך כזה, לכן אפשר לבנות את הנקודה

$$z=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$$

ולכן אפשר באמצעות סרגל ומחוגה לחלק את המעגל לחמישה חלקים (קשתות) שווים

• נתבונן בבעיה נוספת
כיצד לגזור מיפינותי של מלבן נתון שלושה משולשים שווי שטח (ראה איור 3)



איור 3

שטח משולש (1) - $y = (w + z) / 2$

שטח משולש (2) - $yw / 2$

שטח משולש (3) - $z(x + y) / 2$

השטחים שווים לכן

$x(w + z) = yw$ (1) , $x(w + z) = z(x + y)$ (2)

מ-(1) נקבל (3) $x = yw / (w + z)$, מ-(2) נקבל $zy = xw$ (4)

או

$$\boxed{xy = zw}$$

מסקנה: הצלעות של המלבן הנתון מחולקות באותו יחס!!!

נציב (3) ב-(4) ונקבל $\frac{yw^2}{w + z}$ או $w^2 = z^2 + zw$

אם נחלק את שני האגפים ב-z^2 ונסמן $x = \frac{w}{z}$ נקבל

משוואה ריבועית

$$\boxed{x^2 - x - 1 = 0}$$

האם זה מוכר לכם?

ספרות

1 בי ארגונוב ומי באלק: בניות גיאומטריות במישור, מוסקבה, 1957

2 עופר ליכה, חתך הזהב, עליה 18, עמי 51

3 Hunter, *The Fibonacci Quarterly* 1 (1963) 66

המצאות מסוכנות