חידות, בעיות ומשימות מתמטיות בעלות פתרונות עם מספרים שלמים בלבד

לאה אוקסמן ומשה סטופל
בית הספר אמי"ת עירוני ו, דתי לבנות, חיפה
והמכללה הדתית לחינוך "שאנן", חיפה

תקציר

להבלטת חשיבותו של המספר השלם בפתרון בעיות מתמטיות שונות, רוכזו במאמר זה לקט רחב ומגוון של 23 משימות מעניינות שפתרונותיהן מספרים שלמים בלבד לחלק מהמשימות הוצעו דרכי פתרון מלאות הודגמה שיטת דיאפנטוס לפתרון המשוואה $ax+by=c$ כאשר המקדמים a, b, c וכן הנעלמים הם מספרים שלמים

המאמר מכוון לתרום לקידום ההבנה ויכולת ההתמודדות עם משימות מתמטיות המבוססות על מספרים שלמים, חלקן מאפיינות תחומים שונים של בעיות מעשיות המתעוררות בחיי היום-יום

הקדמה

בתחומים רבים במתמטיקה, מהווה המספר השלם מרכיב מרכזי בפתרון משימות שונות לעתים קרובות קיימת דרישה שהמספר השלם יהיה הפתרון היחיד למשל, בבעיות העוסקות בגודל אוכלוסיית אנשים, בעלי חיים, חפצים וכד', הפתרון חייב להיות שלם בחלוקת מספרים שלמים - המנה והשארית הם מספרים שלמים, ספרותיו של מספר הן מספרים שלמים וכן גם מספר האיברים בסדרה והמיקום שלהם

במהלך ההתמודדות עם פתרון בעיות או עם משימות מתמטיות, מתקבלים פתרונות מספריים שונים, לעתים יותר מפתרון אחד, והתלמיד חייב לברור את הפתרונות המתאימים לבעיה הדרישה לפתרונות עם מספרים שלמים וכן הגבלות נוספות כגון מספר חד-ספרתי, מספר בתחום מסוים, מאפשרת לנפות פתרונות בלתי-מתאימים

קבלת פתרונות של מספרים לא שלמים, במקרים שהפתרון חייב להיות מספר שלם, יכולה להוות אינדיקציה לכך שהפתרון אינו נכון או שנפלה טעות באחד משלבי הפתרון

תחום מעניין הוא פתרון מערכת משוואות שבה חסרה משוואה אחת או יותר, כשאת המשוואות החסרות משלים הנתון שהנעלמים הם מספרים שלמים לכאורה, ממבט ראשון, אי-אפשר למצוא את הנעלמים, כי הרי לדוגמה, מציאת שלושה נעלמים כשנתונות שתי משוואות, בלבד, היא משימה בלתי אפשרית אולם לאחר מחשבה, התייחסות לנתונים וניתוח המשימה, היא הופכת להיות אפשרית

בחלק מהמשימות שלהלן המשוואות הנתונות אינן ליניאריות, דבר המגביר את הקושי משימות כאלה מחייבות ניתוח וחשיבה מעמיקה, תוך בדיקת אפשרויות רבות ופיתוח דרכים חילופיות - לא קונבנציונליות, לקיצור השלבים למציאת הפתרונות ההתמודדות תורמת לפיתוח החשיבה, לגילוי יופייה של המתמטיקה ומהווה תמריץ לעיסוק בפתרון בעיות וחידות מתמטיות, במסגרת תרבות הפנאי

מהניסיון בהוראת המתמטיקה בחינוך העל-יסודי, מתברר שמבחינה מתודית, לא תמיד מקפידים המורים להדגיש לתלמידים את חשיבותם של המספרים השלמים כתוצאה מכך נתקלים התלמידים בקשיים מיותרים בשלבי הניתוח של בעיות מתמטיות בחלק מהמקרים, מסיבה זו, חודרים פתרונות שאינם מתאימים לנתונים המקוריים במאמר שלהלן מובא לקט של משימות, חידות ובעיות מתמטיות, שפתרונותיהם הם מספרים שלמים בלבד

המשימות הראשונות מוצגות על-ידי סיפור כדי להגביר את העניין של התלמידים לחלק גדול מהבעיות מוצעות דרכי פתרון ואילו השאר ניתנו להעמקת הנושא וכאתגר ללימוד וחשיבה

המשימות

משימה א׳ בני כמה הם ילדיו של המורה?

המורה למתמטיקה נכנס לשיעור ואמר לתלמידים "יש לי שלושה בנים שסכום הגילים שלהם הוא 13 ומכפלת הגילים שלהם היא 36, כמספר הבית שבו אני גר.

בני כמה הם ילדיי אם ידוע שהגילים שלהם הם מספרים שלמים?"

פתרון

מסמנים את הגילים ב- x y ו-z, המשוואות המתארות את הבעיה

$$x+y+z=13$$
$$x\ y\ z=36$$

מציעים לתלמידים למצוא את הפתרונות בדרך הניסוי והבדיקה

לאחר זמן קצר נמצאות שתי שלישיות המתאימות לנתונים 9, 2, 2 או 6, 6, 1 איזו היא התשובה המתאימה?

רק המורה יכול לענות על כך והוא רומז "בני הגדול מנגן בכינור" משפט זה מצביע על כך, שיש לו בן גדול **אחד** (ולא תאומים גדולים) ולכן התשובה 9, 2, 2 היא הנכונה

משימה ב: מהו מחיר השי?

לשני אחים היה עדר של n כבשים. הם מכרו את העדר במחיר של n שקלים לכל כבשה. את הסכום שהתקבל מהמכירה הם חילקו ביניהם באופן הבא: הבכור קיבל 10 שקלים ואחריו הצעיר 10 שקלים ושוב הבכור 10 שקלים ואחריו הצעיר 10 שקלים וכך הלאה. את ה-10 שקלים האחרונים קיבל הבכור ואת היתרה קיבל הצעיר. כדי ששני האחים יקבלו סכום שווה וכפיצוי לכך שהצעיר קיבל פחות בעת החלוקה, נתן המוכר שי בגובה ההפרש לצעיר

מהו מחיר השי?

פתרון

בכל סבב חלוקה קיבלו האחים יחד 20 שקלים ובסבב האחרון קיבל הבכור 10 שקלים והצעיר סכום קטן יותר. מאחר ש-n (מספר הכבשים) הוא מספר טבעי, נציג אותו באופן הבא

$n=10a+b$ כאשר b מספר שלם $0\le b\le 9$ ו-a מספר שלם כלשהו

הסכום שהתקבל ממכירת העדר הוא

$$n^2=(10a+b)^2=100a^2+20ab+b^2=20(5a^2+ab)+b^2$$

בכל סבב של חלוקה קיבלו שני האחים יחד 20 שקלים. לכן הביטוי האחרון בסוגריים מבטא את מספר החלוקות המלאות. היות ש $0\le b\le 9$ b^2 יכול לקבל את הערכים

0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81

מתוך אפשרויות אלו רק 36 ו-16, מתאימות לבעיה כי בחלוקה האחרונה קיבל הבכור 10 שקלים ואילו לצעיר יתרה הקטנה מ-10 שקלים

לפיכך בפעם אחרונה קיבל הצעיר 6 שקלים בלבד ועל כן מחיר השי שהוא קיבל מהמוכר היה של 4 שקלים

הערה

לגודל העדר יש פתרונות רבים. כל מספר שלם המסתיים ב-4 או ב-6 (6, 14, 16, 24, 26 ...), מתאים לגודל העדר

משימה ג: כמה חיילים ביחידה? - מסדר א

מפקד ביקש לסדר את חייליו על מגרש המסדרים. כשניסה לסדר את חייליו בשלשות נותר אחד מהם בחוץ. לפיכך החליט המפקד לסדר אותם ברביעיות ואז נותרו שניים בחוץ. לכן ניסה לסדר אותם בחמישיות אולם אז נותרו בחוץ שלושה. בלית ברירה, הוא ניסה לסדר אותם בשישיות ואז נותרו בחוץ ארבעה

כמה חיילים משרתים ביחידה?

פתרון

את מספר החיילים נסמן ב-n

השאריות בכל אחד מהסידורים הן כדלקמן

סידור ראשון	n/3	שארית 1
סידור שני	n/4	שארית 2
סידור שלישי	n/5	שארית 3
סידור רביעי	n/6	שארית 4

כדי למצוא את הפתרון בונים סדרות של מספרים הנותנים בחלוקות השונות את השאריות הרצויות. המספר המשותף לכל הסדרות, הוא מספר החיילים

לחלוקה ב-3	מתאימה הסדרה	4, 7, 10, 13, 16, 19, 22
לחלוקה ב-4	מתאימה הסדרה	6, 10, 14, 18, 22, 26, 30
לחלוקה ב-5	מתאימה הסדרה	8, 13, 18, 23, 28, 33, 38
לחלוקה ב-6	מתאימה הסדרה	10, 16, 22, 28, 34, 40, 46

הערה

כל אחת מהסדרות היא סדרה חשבונית שהפרשה הוא המחלק. אפשר להיעזר בסדרת המספרים של החלוקה ב-5 משום שמספריה מסתיימים ב-3 או ב-8

בדרך זו, קל לגלות שמספר חיילי היחידה הוא 58

יש לתת את הדעת לכך שמספר זה איננו הפתרון היחיד. שאר הפתרונות יופיעו במחזור של 60, (מדוע?), כלומר $60K + 58$ ($K = 0, 1, 2, 3 ...$)

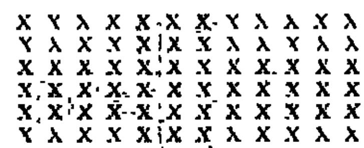
תלמיד השולט בתכנות בסיסי, יכול, בעזרת הפונקציה INT וההוראה AND, להכין תכנית הסוקרת את כל המספרים השלמים בתחום מסוים ולקבל את התשובות במהירות

משימה ד: כמה חיילים בגדוד? - מסדר ב

מפקד סידר את חייליו על מגרש המסדרים בשורות ועמודות מלאות, כמתואר באיור 1

לאחר מכן הוא הורה ל-10 שורות של חיילים לרדת מהמגרש בשלב הבא הוא הורה לקבוצה נוספת של חיילים, שמספרם כמספר החיילים ב-10 העמודות המקוריות, לרדת מהמגרש חייל בודד נותר על המגרש

10 עמודות



10 שורות

איור 1

כמה חיילים משרתים בגדודי

(השאלה הופיעה במדור השעשועים של שבועון ידיעות אחרונות '7 ימים ')

פתרון

נסמך ב-m וב-n את מספרי השורות והעמודות בהתאמה לכן מספר החיילים בגדוד הוא m n

מתקבלת המשוואה

mn-10m-10n=1 או mn-1=10(m+n), m ו-n מספרים שלמים מהצורה האחרונה של המשוואה רואים שהמכפלה mn חייבת להסתיים ב-1 זוגות המספרים m ו-n האפשריים הם 2 מספרים המסתיימים ב-1, 2 מספרים המסתיימים ב-9, או זוג מספרים שאחד מהם מסתיים ב-3 והשני ב-7 קיימים זוגות רבים של מספרים פוטנציאליים המקיימים תנאים אלה לכן תהליך הבחירה והבדיקה, למציאת הזוג המתאים, ממושך ביותר

כדי לקצר את הדרך נבודד את m

$$m = \frac{10n+1}{n-10} = \frac{10(n-10)+101}{n-10} = 10 + \frac{101}{n-10}$$

היות ש-m הוא מספר שלם, חייב גם הביטוי $\frac{101}{n-10}$ להיות מספר שלם המספר 101 הוא מספר ראשוני המתחלק ב-1 ובעצמו

לכן n-10=1 או n-1=101

לכן הפתרון היחיד של הבעיה הוא הזוג (m,n)=(11,101), דהיינו מספר החיילים בגדוד הוא 1221

אם משנים את נתוני השאלה לכך שלאחר ביצוע שני השלבים של הורדת החיילים נותרו על המגרש 2 חיילים, מקבלים את המשוואה

$$mn-10m-10n=2$$

נבודד את m ונקבל,

$$m = 10 + \frac{102}{n-10}$$

המספר 102 מתחלק במספרים 1, 3, 17, 51, 102

במקרה זה מקבלים 4 זוגות של פתרונות אפשריים

(11 ,122), (12 ,61), (13 ,44), (27 ,16)

משימה ה: כמה מבוגרים, כמה נערים וכמה ילדים צפו בהצגה?

להצגת תיאטרון הגיעו מבוגרים, נערים וילדים מחיר הכרטיס למבוגר 50 ש"ח, לנער - 20 ש"ח ולילד - 5 ש"ח בסך הכול צפו בהצגה 63 איש ששילמו יחד 1500 ש"ח

כמה מבוגרים, כמה נערים וכמה ילדים צפו בהצגה?

פתרון

נסמן ב-x, y ו-z את מספרי המבוגרים, הנערים והילדים בהתאמה נקבל 2 משוואות

$$\begin{matrix} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=63 \\ 50x+20y+5z=1500 \end{cases}$$

נבודד את z מהמשוואה הראשונה ונציב אותו במשוואה השנייה

לאחר צמצום נקבל את הקשר y=79-3x

על-פי המשוואה הראשונה מוגבל ערכו של כל אחד מהמשתנים לתחום $1 \le x,y,z \le 61$ (למה?), אך למעשה, בשל המשוואה השנייה התחום יותר צר

רק החל מ-x=9 מקבלים קבוצה גדולה של פתרונות אפשריים ונביא חלק מהם

x	y	z
9	52	2
10	49	4
25	4	34
26	1	36

שיטה כללית לפתרון משוואת דיאופנטוס מהסוג
- ax+by=c

משוואות מהסוג ax+by=c, שבהן המקדמים b, a ו-c הם מספרים שלמים וקיימת דרישה שגם פתרונות המשוואה x ו-y יהיו מספרים שלמים, נקראות משוואות דיאופנטוס ממעלה ראשונה. דיאפונטוס - מתמטיקאי יווני בן המאה השלישית, שגר באלכסנדריה, מצא שיטה כללית לפתרון בעיות מסוג זה

נדגים את השיטה באמצעות דוגמה יש למצוא שני מספרים שלמים שהפרש המכפלות של הראשון ב-19 ושל השני ב-8 הוא 13 במילים אחרות, יש למצוא את כל זוגות המספרים השלמים x ו-y המקיימים את המשוואה

$$19x-8y=13 \qquad (1)$$

המקדמים במשוואה הם a=19, b= -8 ולכן $|b|<|a|$, כלומר המקדם של y קטן בערכו המוחלט מהמקדם של x נבטא את y בצורה מפורשת

$$y=\frac{19x-13}{8} \qquad (2)$$

יש למצוא x-ים שלמים שעבורם גם y יהיה מספר שלם נשנה את ההצגה של y כדלקמן

$$y=2x+\frac{3x-13}{8} \qquad (3)$$

מצורה זו נובע ש-y יהיה מספר שלם, אם הביטוי $\frac{3x-13}{8}$ יהיה מספר שלם עבור כל x שלם

נסמן ביטוי זה על-ידי y_1 ונקבל את המשוואה

$$3x-8y_1=13 \qquad (4)$$

גם הפתרונות של משוואה זו חייבים לחיות מספרים שלמים היתרון של משוואה (4) ביחס למשוואה (1), הוא בכך שהמקדם 3 יותר קטן מהמקדם 19

נבודד את x ממשוואה (4) ונקבל באותה דרך את המשוואה

$$x=\frac{8y_1+13}{3}=2y_1+\frac{2y_1+13}{3} \qquad (5)$$

מאחר ש-x ו-y_1 הם מספרים שלמים חייב גם הביטוי $y_2=\frac{2y_1+13}{3}$ להיות אף הוא מספר שלם מכאן נקבל את המשוואה

$$3y_2-2y_1=13 \qquad (6)$$

$$y_1=\frac{3y_2-13}{2}=y_2+\frac{y_2-13}{2} \qquad (7)$$

נסמן $y_3=\frac{y_2-13}{2}$ ונקבל את המשוואה

$$y_2-2y_3=13 \qquad (8)$$

זו המשוואה הפשוטה ביותר שאפשר לקבל משום שאחד המקדמים של הנעלמים הוא המספר 1, כלומר,

$$y_2=2y_3+13 \qquad (9)$$

(בדומה למשוואה הסופית של המשימה הקודמת), כאשר y_2 ו-y_3 מספרים שלמים

ממשוואות (5), (7), (9) ו- (3) נקבל

$$x=2y_1+y_2=2(y_2+y_3)+y_2=3y_2+2y_3=$$
$$3(2y_3+13)+2y_3=8y_3+39$$
$$y=2x+y_1=2(8y_3+39)+y_2+y_3=19y_3+91$$

כלומר בסופו של תהליך התקבלו המשוואות $x=8y_1+39$
$y=19y_1+91$

עבור $y_1=0,1,2,3,4$
מקבלים אינסוף פתרונות למשוואה (1), נציג חלק מהם

$y_1=$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	
$x=$	7	15	23	31	39	47	55	63	4
$y=$	15	34	53	72	91	110	129	148	167

הערה יש לשים לב לעובדה שהפתרונות של- x ו-y הם סדרות חשבוניות

חשוב לציין שבעיות מעשיות מחיי היום-יום, מחייבות לעתים פתרון משוואות כלליות ממעלה ראשונה

בהזדמנות זו, נזכיר שהמתמטיקאי הצרפתי לגראנז' (1736-1813), פתר באופן כללי משוואות דיאפונטוס ממעלה שנייה אחת מהבעיות המפורסמות בתחום משוואות דיאפונטוס הוא המשפט הגדול של פרמה (1601-1665) 'אין פתרונות שלמים למשוואה $x^n+y^n=z^n$ עבור n טבעי גדול מ-2'
משפט זה הוכח רק לאחרונה

משימה 1: מהו המספר?
למצוא שני מספרים ראשוניים דו-ספרתיים המורכבים מאותן ספרות, כך שהפרשם שווה לריבוע של מספר שלם

פתרון
נרשום את שני המספרים בצורה $10x+y$ ו- $10y+x$, ונניח ש- $x\ge y$ ו- $1\le x\le 9$ ו- $1\le y\le 9$

לפני הנתון $(10x + y) - (10y + x) = n^2$

או $9(x - y) = n^2$

מאחר שנתון כי n^2 הוא ריבוע של מספר שלם וגם 9 הוא ריבוע של מספר שלם, אזי גם x-y הוא ריבוע של מספר שלם ועל כן יש שתי האפשרויות היחידות $x-y=1$ או $x-y=4$

א אם $x-y=1$ אזי x ו-y הם שני מספרים עוקבים ולכן אחד מהם הוא זוגי מזה נובע שאחד משני המספרים הדו-ספרתיים הוא זוגי - בסתירה לנתוני המשימה ששני המספרים הם ראשוניים, כלומר חייב להיות ש-$x-y\neq 1$

ב אם $x-y=4$ אזי $x\geq 5$ וייתכנו שלוש האפשרויות הבאות

- אם $x=5$, אזי $y=1$ והמספר המתקבל 51 איננו ראשוני
- אם $x=7$, אזי $y=3$ והמספר המתקבל 73, והמספר השני 37 ואכן $73 - 37 = 36 = 6^2$
- אם $x=9$, אזי $y=5$ והמספר המתקבל 95 איננו ראשוני

לפיכך שני המספרים המבוקשים הם 37 ו-73 ואין עוד

משימה ז: פתרונות ראשוניים של משוואה

יש למצוא את הפתרונות הראשוניים x y z של המשוואה

$$x^8 - y^5 z = x^5$$

פתרון

על-ידי פעולות מותרות נעביר את המשוואה לצורה

$$x^5(x^3 - 1) = y^5 z$$

אם x y ו-z הם מספרים ראשוניים אזי חייב להתקיים ש-$x=y$ ו-$x^3-1=z$ (משום ש-z מספר ראשוני ו-$x^5 \neq z$) מהשוויון

$$x^3 - 1 = z$$

נקבל את הקשר $z = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

מכיוון ש-z מספר ראשוני, חייב להתקיים ש-$x-1=1$ ($x^2 + x + 1 \neq 1$ משום ש-$x^2 + x + 1 > 0$), כלומר, $x=2$ ולכן $z=8-1=7$ פתרון המשוואות הוא, אם כן,

$x=y=2$ ו-$z=7$

משימה ח: כיצד מוכיחים שמספר איננו ראשוני?

יש להוכיח שהמספר הטבעי $n^4 + 4$ איננו מספר ראשוני עבור n טבעי גדול מ-1

פתרון

$$n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 =$$

$$(n^2 + 2 + 2n)(n^2 + 2 - 2n) = ((n+1)^2 + 1)\;((n-1)^2 + 1)$$

$n^4 + 4$ הוא מכפלה של שני מספרים טבעיים גדולים מ-1 ולכן הוא איננו מספר ראשוני

הטענה ש-$n^4 + 4$ איננו ראשוני, ידועה כמשפט סופי שרמן (1776-1831) - מתמטיקאית צרפתית מפורסמת, שעסקה במחקרים בתורת הגמישות

משימה ט: פתרון מערכת אי-שוויונים

למצוא את הפתרונות השלמים של מערכת האי-שוויונים

$$\begin{cases} |x^2 - 2x| < y + 0.5 \\ y + |x - 1| < 2 \end{cases}$$

פתרון

$|x^2 - 2x| \geq 0$ לכל x-

לכן $y + 0.5 > 0$ או $y > -0.5$ גם $|x - 1| \geq 0$ לכל x

ולכן $y < 2$ כלומר, y מוגבל לתחום $-0.5 < y < 2$. מאחר ש-y מספר שלם, ייתכנו רק שתי אפשרויות $y=0$ או $y=1$

אם $y=0$ מקבלים את מערכת האי-שוויונים,

$$\begin{cases} |x^2 - 2x| < 0.5 \\ |x - 1| < 2 \end{cases}$$

היות ש-x מספר שלם, x יכול לקבל רק שני ערכים אפשריים $x=0$ או $x=2$

אם $y=1$ מקבלים את מערכת האי-שוויונים

$$\begin{cases} |x^2 - 2x| < 1.5 \\ |x - 1| < 1 \end{cases}$$

היות ש-x חייב להיות מספר שלם, יש רק פתרון $x=1$

ולכן הפתרונות האפשריים (x y) הם (0,0), (1,1), (2,0)

משימה י

יש להוכיח שאין פתרונות שלמים למשוואה $x^4 + y^4 = 10z + 9$

פתרון

ברור שהמספר $10z + 9$ הוא אי-זוגי, לכן גם $x^4 + y^4$ הוא אי-זוגי, דבר המחייב שאחד מהמחוברים יהיה אי-זוגי והשני יהיה זוגי נניח ש-x הוא אי-זוגי ברם x^4 זוגי לכל מספר x הגדול מ-2 מכאן נובע ש-$x < 2$, כלומר $x=1$

נקבל $1 + y^4 = 10z + 9 \Rightarrow y^4 = 10z + 8$

ממשוואה זו מקבלים ש-$y \leq 4$ כי אם $y \geq 5$, אז y^4 מתחלק ב-5 אולם $10z+8$ לא מתחלק ב-5

המקרים האפשריים ל-y

א)	$y=1$	$1+1 \neq 10z+8$	אין פתרון שלם
ב)	$y=2$	$1+2^{1} \neq 10z+8$	אין פתרון שלם
ג)	$y=3$	$1+3^{1} = 10z+8$	$7 = 10z+8 \Leftarrow$
	אין פתרון שלם		
ד)	$y=4$	$1+4^{1} = 10z+8$	$25 = 10z+8 \Leftarrow$
	אין פתרון שלם		

כאתגר לשוחרי וחובבי מתמטיקה, נביא משימות נוספות הדומות לאלו שכבר הוצגו. משימות אלה מוצגות ללא פתרון

משימה יא

למצוא מספר דו-ספרתי, השווה לפעמיים מכפלת הספרות שלו

משימה יב

למצוא את כל המספרים הטבעיים המסתיימים ב-91 אשר אחרי מחיקת ספרות אלה, קטנים פי n פעמים (n מספר שלם)

משימה יג

ידוע שקיימים מספרים טבעיים x ו-y שעבורם הביטוי 2x+3y מתחלק ב-17. הוכיחו שעבור אותם x ו-y גם הביטוי 9x+5y מתחלק ב-17

משימה יד

אילו מספרים שלמים (גם שליליים) אפשר להציב במקום x בשבר $\frac{x+9}{x+5}$ ולקבל מספר שלם?

משימה טו

מספר מסתיים בספרה m. יש להעביר ספרה זו לתחילת המספר כדי להגדיל את המספר פי k. מצאו את המספר עבור המקרים

א. $m=7$, $k=5$

ב. $m=2$, $k=2$

משימה טז

האם אפשר לשקול במאזניים 28 ג' של חומר כלשהו, בעזרת 4 משקולות של 3 ג' כל אחת ו-7 משקולות של 5 ג' כל אחת?

משימה יז

להוכיח שהסכום של מכפלת ארבעה מספרים עוקבים והמספר 1, הוא ריבוע של מספר טבעי

משימה יח

למצוא את הפתרונות השלמים של המשוואה

$$x^2 - xy + 2x - 3y = 11$$

משימה יט

למצוא מספרים ראשוניים תלת-ספרתיים, שספרותיהם יוצרות סדרה הנדסית, עם מנה שלמה שונה מ-1

משימה כ

למצוא את הפתרונות השלמים של מערכת המשוואות

$$\begin{cases} y + z = 10 + x \\ y \cdot z = 10x + 1 \end{cases}$$

משימה כא

למצוא את הפתרונות השלמים של מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x + y + z = 14 \\ x + y \cdot z = 19 \end{cases}$$

משימה כב

למצוא פתרונות טבעיים למשוואה

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

משימה כג

למצוא פתרונות טבעיים למשוואה $x^2 - y^2 = 105$

סיכום

במאמר זה הוצגו 23 משימות מתמטיות מגוונות הקשורות למספרים שלמים. המטרה המרכזית של המשימות היא להדגיש את חשיבותם של מספרים אלו ותכונותיהם (כדוגמת המספרים הראשוניים), בפתרון חידות ובעיות שחסרה בהן משוואה אחת או יותר

רשימת ספרות

I.S. Petrakov. *Mathematical Circle*. Moscow 1987 (in Russian)

D.S. Mitrinovic. *Elementary Inequalities*. Groningen 1964

J.W.S. Cassels. "Diophantine Equations with Special Reference to Elliptic". *J. London Math. Soc.* 41 (1996)

G.H. Hardy and E.M. Wright. *An Introduction to the Theory of Numbers*. 5th ed. Oxford 1979

S.K. Chandrasekharan. *Introduction to Analytic Number Theory*. Berlin - Heidelberg - New York. Springer 1968