בניית קירוב לפונקציית הסינוס - פעילות במעבדה מתמטית*

אסתר אופנהיים
רכזת מדור מתמטיקה (על-יסודי) במרפ"ד כפר-סבא
מטעם "קשר חם"

מבוא

פעמים רבות מועלית השאלה על-ידי תלמידי תיכון במה משתמשים במתמטיקה כיום? מהי התכלית בלימוד כל הנושאים בטריגונומטריה, אנליזה ואלגברה בתיכון? זמינותם של המחשבים בסביבה הלימודית של בית הספר יוצרת הזדמנות פז להציג בפני תלמידי התיכון את אחד מיישומי המתמטיקה בימינו **בניית קירובים לפונקציות ספריית מחשב**, תוך שילוב פעילויות חקירה במעבדה מתמטית. כידוע תלמידי בית הספר התיכון, בכל הרמות, משתמשים במחשבון המדעי כדי לקבל ערכים של הפונקציות הלוגריתמיות, המעריכיות והטריגונומטריות. לא תמיד יש להם מושג כיצד המחשבון 'מחשב' את ערכי הפונקציות באופן מדויק כל כך ובמהירות כה רבה. אחת השאלות שנשאלת היא **כיצד המחשב מחשב את ערכי פונקציית הסינוס?**

הפעילות המוצעת במאמר מציגה בפני התלמיד בעיה הלקוחה מתוך המציאות היום-יומית הסובבת אותו. בתהליך מציאת הפתרון לבעיה ילמד התלמיד על המחשב באמצעות המחשב תוך כדי ביצוע משימות חקירה במעבדה המתמטית. התלמיד ייווכח כיצד ידע מתמטי קודם שצבר במהלך שנותיו בתיכון מיושם הלכה למעשה כדי לפתור את הבעיה הניצבת בפניו.

במהלך עבודתו תיחשף בפניו תיאוריה מתמטית עשירה, הוא יגלה שמתמטיקה היא אכן מקצוע חי הקשור לחיים ולא רק תורה אלגנטית עתיקה. תוך כדי זה הוא יפרוץ אל תחומי דעת חדשים ומתקדמים במתמטיקה.

מדוע יש הכרח לבנות פונקציית קירוב לפונקציית הסינוס?

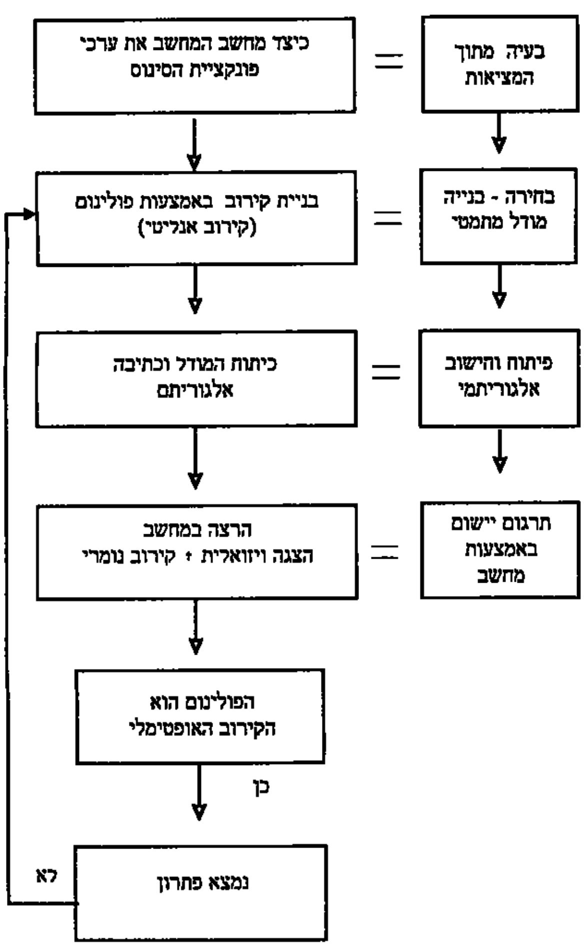
אמנם פונקציית הסינוס ניתנת על-ידי ביטוי מתמטי מפורש, $f(x) = \sin x$ אולם אי-אפשר לחשב את ערכי הפונקציה ישירות מתוך הביטוי האנליטי, פרט אולי למספר נקודות מיוחדות כגון

$$f(x)=\frac{1}{2} \quad \text{עבור} \quad x=\frac{\pi}{6}$$

כדי לחשב את ערך הפונקציה הטריגונומטרית בנקודות אחרות צריך לפתח שיטת קירוב. אחת האפשרויות לכך היא בניית פולינום קירוב.

במחשב ובמחשבון מאוכסנות דרך קבע תכניות של פונקציות 'פנימיות' המהוות קירוב יעיל במיוחד. תכניות אלו מאוכסנות בספרייה הפנימית של המחשב ונקראות 'פונקציות ספרייה'. הן מופעלות בכל פעם שהמשתמש במחשב או במחשבון זקוק לערך הפונקציה. למשל, הפונקציה $f(x) = \sin x$ היא אחת מפונקציות הספרייה במחשב.

בפעילות המוצעת אנו מתמקדים במציאת פתרון לבעיית הבנייה של פונקציית קירוב לפונקציית הסינוס, במעבדת מחשבים.



* מאמר זה מבוסס על עבודת הדוקטור של המחברת, אינטרפולציה פולינומיאלית והוראתה בבית ספר תיכון במסגרת מעבדה מתמטית משולבת מחשב', בהדרכתו של פרופ' גדעון צבס (1995)

השלבים בתהליך בניית פונקציית קירוב לפונקציית הסינוס

בתהליך בניית פולינומי קירוב לפונקציית הסינוס במעבדת מחשבים משתקפת דרך עבודתו של המתמטיקאי היישומי

כפי שמתאר התרשים, השלב הראשון הוא בחירת המודל המתמטי קיימות שיטות קירוב שונות לקירוב פונקציות מבין השיטות הידועות בחרנו בשיטת קירוב באמצעות קירוב על-ידי **בניית פולינום**[1].

להלן נציג את הבעיות המתעוררות בתהליך בניית **פולינום קירוב** ואת השיקולים והפתרונות המתמטיים שיאפשרו את ביצוע הקירוב הלכה למעשה [2]

1 כיצד פולינום יכול להוות קירוב לפונקציה טריגונומטרית מחזורית כמו פונקציית הסינוס? הרי הפולינום עצמו איננו פונקציה מחזורית

2 פונקציית הסינוס מוגדרת לכל x, האם אפשר לבנות פונקציית קירוב על קטע אינסופי? ואם לא, כיצד נבחר את הקטע?

3 כיצד ייבנה פולינום הקירוב הלכה למעשה?

א. בחירת שיטת הקירוב

פולינום הקירוב ייבנה באמצעות אינטרפולציה פולינומיאלית, שהיא שיטת קירוב נומרית שבה מקרבים פונקציה רציפה בקטע סגור על-ידי בניית פולינום שמעלתו מוכתבת מראש, העובר דרך מספר נתון של נקודות שבהן נתונים ערכי הפונקציה המקורבת

ב. בחירת קטע הקירוב

כידוע הפונקציה $f(x) = \sin x$ מוגדרת לכל x בתחום אינסופי $-\infty < x < \infty$ אולם, את פולינום הקירוב יש לבנות בקטע סגור, באיזה קטע נבחר?[3]

עבור פונקציית הסינוס נבחר בקטע $[0,\frac{\pi}{2}]$ כקטע האינטרפולציה המתאים הסיבה לכך היא שאפשר להוכיח בעזרת תכונות הפונקציה המחזורית ועל-ידי זהויות טריגונומטריות אלמנטריות כי לכל $x \notin [0,\frac{\pi}{2}]$ קיים x^* מתוך התחום $x^* \in [0,\frac{\pi}{2}]$ כך ש $\sin(x) = \sin(x^*)$

1 פולינום המהווה את פונקציית הקירוב, הוא פונקציה רציפה וגזירה (נקרא גם פונקציה 'חלקה') פונקציה זו היא במיוחד נוחה לניתוח אנליטי חלק מהחומר על הפולינומים משתלב היטב עם החומר הנלמד ממילא בבית הספר התיכון

2 ממולץ להעלות את הבעיות המוצגות להלן לדיון בכיתה ולבקש מהתלמידים להציע פתרונות

3 כאן המקום שבו אפשר ליישם את הידע בזהויות טריגונומטריות אלמנטריות ובתכונת המחזוריות של פונקציית הסינוס

ג. בניית פולינום אינטרפולציה לפונקציית סינוס[4]

כאמור, פולינום הקירוב ייבנה באמצעות אינטרפולציה פולינומיאלית, שהיא שיטת קירוב נומרית שבה מקרבים פונקציה רציפה בקטע סגור על-ידי בניית פולינום שמעלתו מוכתבת מראש, העובר דרך מספר נתון של נקודות שבהן נתונים ערכי הפונקציה המקורבת

שיטת קירוב זו מעמידה בפנינו שני אתגרים נוספים

1 כיצד ניצור מאגר של נקודות שבהן נתונים ערכי הפונקציה סינוס בדיוק רצוי?[5]

2 כיצד נבנה תבנית של פולינום קירוב, העובר דרך מספר נתון של נקודות אינטרפולציה שבחרנו?

ג 1. בניית מאגר של נקודות אינטרפולציה

ברצוננו ליצור אוסף של נקודות, x_i בקטע $[0,\frac{\pi}{2}]$ שאת ערכי הסינוס שלהן אפשר לחשב באמצעות נוסחאות טריגונומטריות מקובלות זוגות ערכים אלו מהצורה $(x_i, \sin x_i)$ יהוו מאגר M מתוכו יהיה אפשר לבחור בכל עת נקודות אינטרפולציה מתאימות לשם כך נחשב ערך מדויק ביותר של $\cos t$ עבור t חיובי קטן ביותר[6] למשל, אם נתחיל עם $\alpha = \frac{\pi}{2}$

נפעיל את הזהות $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ שבע פעמים בזו אחר זו, נקבל לבסוף את $\cos t$ עבור $t = \frac{1}{128}(\frac{\pi}{2})$ [7]

עתה ניעזר בזהות

$$\cos\beta + \cos\gamma = 2\cos(\frac{\beta+\gamma}{2})\cos(\frac{\beta-\gamma}{2})$$

4 הסעיפים ג, בניית פולינום לגרנז' והצעות לדיון, נלקחו מתוך הספר 'מתמטיקה משולבת מחשב במעבדה נומרית' (1991) מאת שלמה ברויאר וגדעון צבס, אוניברסיטת תל אביב, חוברת ז ו-ח

5 מאגר זה עשוי להוות בסיס לנקודות אינטרפולציה שמהן ייבנו פולינומי הקירוב

6 קל יותר לעבוד עם $\cos t$ מאשר עם $\sin t$ כי המעבר לחצי זווית הוא פשוט יותר $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ אחר כך עוברים ל- $\sin t$ ועל-ידי כך אפשר לעבור ל $\sin t = \cos(\frac{\pi}{2} - t)$

7 ברור שאם נפעיל זהות זו מספר גדול יותר של פעמים בזה אחר זה נקבל את $\cos t$ עבור ערכים קטנים עוד יותר זוויות קטנות יותר, ונגדיל את מספר הנקודות במאגר

נציב

$$\gamma = (k-1)t\,,\ \beta = (k+1)t$$

ונקבל

$$\cos[(k+1)t]] = 2\cos t\ \cos kt - \cos[(k-1)t]]$$

זו נוסחה רקורסיבית לחישוב הערכים של

$\cos 2t, \cos 3t, \cos 4t, \quad , \cos 128t$

אם נתחיל עם $k=1$ ועם הערך של $\cos t$ שהתקבל לעיל, נוכל לקבוע את ערכו של $\cos 2t$ וממנו ליצור באופן דומה את ערכו של $\cos 3t$ וכו' [8]

ג.2 בניית ביטוי מתמטי לפולינום הקירוב

פולינום הקירוב לפונקציית הסינוס עובר דרך מספר נתון מראש של נקודות האינטרפולציה עבור $(n+1)$ נקודות נתונות הפולינום הוא מהצורה

$$p_n(x) = a_0 + a_1x = a_2x^2 + \quad + anx^n$$

לפיכך כדי לבנות פולינום ממעלה קטנה או שווה ל-n העובר דרך $(n+1)$ נקודות שונות $x_0, x_1, \quad , x_n$ צריך לפתור מערכת משוואות ב-$(n+1)$ נעלמים, שבאמצעותה יתקבלו המקדמים של הפולינום [9]

דרך זו של מציאת מקדמי הפולינום על-ידי פתרון מערכת משוואות היא מסורבלת שיטה נוחה יותר הוצעה על-ידי המתמטיקאי הצרפתי **לגרנז'** בשיטת לגרנז' לא מוצאים ישירות את המקדמים של הפולינום המבוקש, אך בקלות יחסית אפשר למצוא את ערכי הפולינום בעזרת מחשב [10]

פולינום האינטרפולציה של לגרנז':

בניית פולינום לגרנז' ממעלה ראשונה

פולינום לגרנז' ממעלה ראשונה הוא משוואת ישר העובר דרך שתי נקודות נתונות

$(x_0,y_0), (x_1,y_1)$

הפולינום המבוקש (הישר) צריך לקיים

$p(x_0) = y_0,\ p(x_1) = y_1$

הרעיון הוא לבנות פולינום המורכב משני מחוברים (כי נתונות שתי נקודות), כך שכל מחובר יהיה ממעלה ראשונה ויתקיימו התנאים הרשומים לעיל מה צריך להציב במקום סימני השאלה כדי שהפולינום יקיים את התנאים

$$p_1(x) = \frac{(x-?)}{(?)}\ y_0 + \frac{(x-?)}{(?)}\ y_1 \quad p(x_0) = y_0,$$

$$p(x_1) = y_1$$

במונה הראשון צריך $(x-x_1)$ ובמונה השני $(x-x_0)$, כמו כן בכל מכנה יש לחלק בגורם מתאים, כדי לקבל מקדם השווה ל-1 כאשר מציבים $x = x_0$ יש לקבל $p_1(x_0) = y_0$ וכאשר מציבים $x = x_1$ יש לקבל $p_1(x_1) = y_1$

$$p_1(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}\ y_0 + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}\ y_1$$

בניית פולינום לגרנז' ממעלה שנייה

פולינום לגרנז' ממעלה שנייה הוא פרבולה העוברת דרך שלוש נקודות נתונות

$(x_0,y_0), (x_1,y_1), (x_2,y_2)$

הפולינום (הפרבולה) צריך לקיים

$p(x_0) = y_0, p(x_1) = y_1, p(x_2) = y_2$

מרחיבים את העיקרון שעל-פיו מצאנו את פולינום לגרנג' מהמעלה הראשונה ומקבלים

$$p_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\ y_0 +$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\ y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\ y_2$$

רושמים את פולינום לגרנז' ממעלה שנייה בצורה מקוצרת

$$p_2(x) = L_0(x)\ y_0 + L_1(x)\ y_1 + L_2(x)\ y_2,$$

$L_i(x)$ $i = 0,1,2$ נקראים **מקדמי לגרנז'**

באופן דומה אפשר לבנות פולינום לגרנז' ממעלה n העובר דרך $(n + 1)$ נקודות [11]

---

8 כל חישובי ההכנה האלה צריכים להתבצע בדיוק כפול כדי למנוע הצטברות של שגיאות עיגול

9 אמנם אפשר לפתור מערכת משוואות המורכבת מ n+1 נעלמים ו n+1 משוואות, אולם דבר זה אינו מעשי

10 רק בסוף התהליך, כשנמצא את נקודות האינטרפולציה של הקירוב הטוב ביותר יהיה כדאי לבצע מאמץ חד-פעמי למציאת מקדמי הפולינום

11 יש לשים לב שהפולינום ממעלה n לגרנז' נוסחתו מורכבת מ-$(n+1)$ מחוברים, כך שכל מחובר מכיל n כפולות של $(x-x_0)\ \ (x-y_n)$ ולכן יש להניח כי הפולינום הוא ממעלה n אולם יש מקרים שבהם יתברר כי אחרי פתיחת הסוגריים וכינוס האיברים, המקדם העליון של הפולינום מתאפס ולכן יתקבל פולינום ממעלה קטנה מ-n מסיבה זו אומרים תמיד כי דרך $(n+1)$ נקודות שונות יכול לעבור פולינום אחד ויחיד שמעלתו קטנה או שווה ל-n

הפולינום יהי מורכב מ-n- (n+1) מחוברים מהצורה

$$P_n(x) = L_0(x)\ y_0 +_1(x)\ Y_1 + \quad +L_n(x)\ y_n$$

כל אחד מה-$L_i(x)$ הוא פולינום ממעלה n המורכב מ-n מכפלות

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)\quad (x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\quad (x-x_n)}{(x_i-x_0)\quad (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\quad (x_i-x_n)}$$

כאשר n היא מעלת הפולינום ומספר נקודות האינטרפולציה הוא (n+1)

באופן מקוצר

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\ y_i$$

ד. בניית פולינום קירוב לפונקציית הסינוס במעבדה מתמטית

מטרות:

1 לבנות הלכה למעשה פולינומי אינטרפולציה בשיטת לגרנזי לפונקציית הסינוס
2 ליצור מודעות לצורך בקביעת קריטריונים להערכת טיב הקירוב
3 לבנות בסיס אינטואיטיבי לקביעת הקריטריון לקירוב הטוב ביותר
4 לבדוק את ההשערה, אם על-ידי בחירת נקודות אינטרפולציה, המחלקות את הקטע חלוקה שווה, מתקבל פולינום הקירוב הטוב ביותר
5 לבדוק את ההשערה, אם שינוי מקומן של נקודות האינטרפולציה בקטע הקירוב משפיע על גודל השגיאה בקטע הקירוב אם כן, כיצדי
6 לבדוק את ההשערה אם הגדלת מספר נקודות האינטרפולציה בקטע הנתון בהכרח משפר את הקירוב

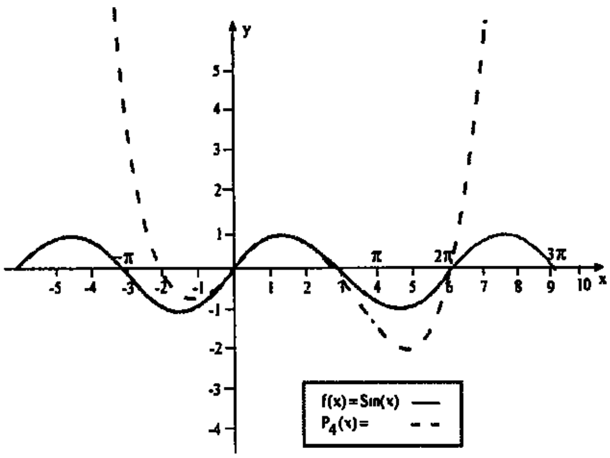
סביבת העבודה: מעבדת מחשבים המצוידת בתכנה גרפית ידידותית דוגמת מתמטיא

הצעות לדיון

הפעילות במעבדה לבניית פולינום קירוב לפונקציית הסינוס והדיון בטיב הקירוב מהווים נקודות מוצא לשאלות מעמיקות בנושא הקירוב הפולינומיאלי

אם נתונה פונקציה f(x) שאנו רוצים לקרב בקטע נתון סגור [a,b] באמצעות פולינום כאשר מעלתו נתונה מראש

1 האם קיימות נקודות אינטרפולציה אופטימליות?
2 האם קיים פולינום אינטרפולציה שאין פולינום מקרב טוב ממנו שמעלתו אינה עולה על מעלת הפולינום הנתון?
3 האם הפולינום האופטימלי הוא יחידי
4 אם אכן הפולינום האופטימלי הוא יחיד, האם יש לו תכונות המאפיינות אותו אשר בעזרתן אפשר לבנות את פולינום הקירוב הטוב ביותר ממעלה נתונה?

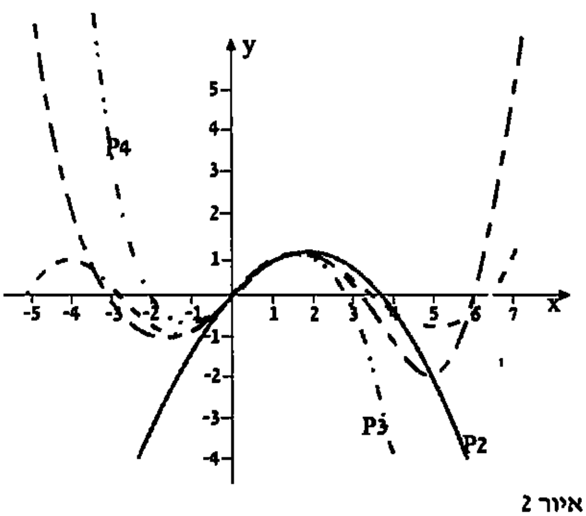


איור 1

דוגמה 1:

פולינום קירוב ממעלה 4 לפונקציה $f(x) = \sin x$ בקטע $[0,\frac{\pi}{2}]$

המתמטיקאי הרוסי צ'בישב השיב על השאלות האלה כבר לפני כ-100 שנה (ללא מעבדת מחשבים) הוא הוכיח כי עבור מחלקה רחבה של פונקציות אכן קיים פולינום אינטרפולציה אופטימלי, פולינום זה הוא יחיד ויש לו תכונות המאפיינות אותו לחלוטין הפולינום האופטימלי המבוקש נקרא פולינום המינימקס המתאים, (לפונקציה, לרווח ולמעלת הפולינום) שכן עבורו יתקבל הערך המינימלי של מקסימום הסטייה פולינום המינימקס הזה מתפתל סביב הפונקציה המקורבת כך שפונקציית השגיאה "נמרחת" במידה אחידה על פני הקטע באופן שהיא מקבלת ערכים חיוביים ושליליים לסירוגין שערכי הקיצון שלהם שווים בערכם המוחלט, ומספרם גדול לפחות ב-2 ממעלת הפולינום



איור 2

דוגמה 2: פולינומי קירוב ממעלה שנייה P2, שלישית P3 ורביעית P4 לפונקציה $f(x) = \sin x$ בקטע $[0\frac{\pi}{2}]$

סיכום

בניית קירוב לפונקציית הסינוס - פעילות במעבדה מתמטית הוא נושא שחשוב להציגו בפני תלמידי בית הספר התיכון בהיותו נושא מודרני רלוונטי - (המחשב ברקע) - הפותח צוהר אל נושאים ומושגים מתמטיים חדשים באנליזה נומרית תוך יישום ידע מתמטי קודם. מושגים ונושאים אלה מציגים לתלמיד זווית ראייה אחרת לגבי השאלה מהי מתמטיקה ומהם שימושיה בחיינו.

אשר לנושא המתמטי עצמו, לא זו בלבד שהוא מציג פן אחר של המתמטיקה (נושא הקירוב), אלא שהוא מסיר את המסתורין האופף את חישוב הפונקציות המתמטיות על-ידי המחשב. 'הסיפור מאחורי מקש המחשב'.

שילוב מעבדת מחשבים הוא המניע לפעילות והוא גם חלק אינטגרלי הכרחי וחיוני בהצגת הנושא. תכנה גרפית ידידותית כמו המתמטיקא משמשת כלי נוח לחקירה להעלות השערות ואישושן, ומעלה את המוטיבציה של הלומד. השילוב של הצגה ויזואלית ונומרית חשוב מאוד להבנה. הצגה זו מבהירה את התיאוריה והרעיונות המתמטיים, ממחישה את הפתרון ומהווה הוכחה מוחשית לגבי יישום הנושא 'קירוב פונקציות' הלכה למעשה במציאות.

דף עבודה למשימות המעבדה

בניית פולינום הקירוב בשיטת לגרנז' לפונקציה $f(x) = \sin x$ **בקטע** $[0, \frac{\pi}{2}]$.

1. רשום את הפונקציה $f(x) = \sin x$, וצייר את הגרף בקטע $[0, \frac{\pi}{2}]$ שנה את התחום או הטווח בהתאם.

2. בחר מספר נקודות אינטרפולציה בקטע שערך הסינוס שלהן מדויק, לקוח מתוך מאגר הנקודות שבנית, ובנה את פולינום לגרנז'.

בחר תחילה 3 נקודות אינטרפולציה ורשום את פולינום האינטרפולציה

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\ y_i = L_0(x)\ y_0 + L_1(x)\ y_1 + L$$

בתכנה מתמטיקא רצוי לרשום כל מחובר שבפיתוח לגרנז' בנפרד למשל

$$g_1(x) = L_1(x)\ y_1$$
$$g_2(x) = L_2(x)\ y_2$$
$$g_3(x) = L_3(x)\ y_3$$

ואחר כך לרשום את הפולינום $g(x)$ כסכום של מחוברים $g(x) = g_1(x) + g_2(x) + g_3(x)$

צייר את פולינום הקירוב, התבונן בשני הגרפים בקטעים $[0, \frac{\pi}{2}]$, $[-10, 10]$ תאר מה קיבלת. האם הגרף המתגלה לעיניך שונה בשני התחומים? תאר את מה שאתה רואה.

3. עבור להליכה על גרף הפונקציה (אפשר לשנות את צעדי ההליכה על הגרף ל-0.01, 0.001 וכו') השלם את הטבלה הנתונה, רשום את ערכי x של $f(x) = \sin x$ וערכי $g(x)$ עבור ה-x-ים הבאים

x	0	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	2
$f(x)=\sin x$									
$g(x)$									
$d(x)$									

האם ההפרשים בין ערכי $f(x)$ ו-$g(x)$ שווים בכל נקודה ונקודה? האם בנקודות מסוימות ההפרש הוא אפסי? מהן נקודות אלה? סמן את התחומים שבהם ההפרש חיובי ואת התחומים שבהם ההפרש שלילי.

4. הגדר פונקציית שגיאה $E_1(x) = f(x) - g(x)$

צייר את **פונקציית השגיאה**, התאם את התחום והטווח.

מצא את הערך המקסימלי של השגיאה $E(x)$ בתחום. באיזו נקודה או נקודות הוא מתקבל, מהו הערך המקסימלי של השגיאה בקטע?

ומהו הערך המינימלי? האם הערך המינימלי של השגיאה שווה לערך המקסימלי בקטע?

בדוק מהו הערך המקסימלי של השגיאה בערך מוחלט בקטע, ומהו הערך המינימלי של השגיאה בערך מוחלט בקטע.

5. בנה עוד פולינום קירוב מאותה מעלה או ממעלה אחרת וסמן אותו ב-$d(x)$.

חזור על הסעיפים 1-4 והשלם את הטבלה.

התבונן בפונקציית השגיאה $E_2(x) = f(x) - d(x)$ וקבע איזה קירוב טוב יותר לדעתך, ומדוע.

ערוך דיון בין חבריך בכיתה לקביעת הקריטריון שלפיו ייבדק טיב הקירוב של הפולינום. על סמך הקריטריון שקבעתם בדוק את ההשערות הבאות:[11]

1. האם השגיאה המוחלטת שווה לכל x בקטע, עבור אותן נקודות אינטרפולציה?

12 כדי להשיב על השאלות הבאות עליך לבנות פולינומי קירוב נוספים. עיין בגרפים שלהם ובגרף של פונקציית השגיאה. רכז את הנתונים בטבלאות (ראה דוגמה).

2 אם מגדילים את מספרן של נקודות האינטרפולציה, האם הקירוב יהיה טוב יותר? ואם הוא טוב יותר, באיזה מובן הוא טוב יותר?

3 אם משאירים את מספר נקודות האינטרפולציה כגודל קבוע ורק משנים את מקומן של הנקודות בקטע, האם אז הקירוב הוא טוב יותר?

4 האם על-ידי בחירה של נקודות אינטרפולציה המחלקות את הקטע חלוקה שווה, יתקבל פולינום הקירוב הטוב ביותר?

אסוף את הנתונים על-פי הטבלאות הבאות וענה על השאלות המנחות:

טבלה א: שינוי מקומן של נקודות האינטרפולציה בקטע (מספר נקודות אינטרפולציה יישאר קבוע).

מספר הנקודות	נקודות האינטרפולציה	$E(2)$	$\max_{[1,4]}\lvert E(x)\rvert$	נקודות הקיצון של השגיאה
3				
3				
3				

טבלה ב: הגדלת מספר נקודת האינטרפולציה

מספר הנקודות	נקודות האינטרפולציה	$E(2)$	$\max_{[1,4]}\lvert E(x)\rvert$	נקודות הקיצון של השגיאה
2				
3				
4				
5				

א האם עבור בחירה מסוימת של נקודות אינטרפולציה הקירוב לכל נקודה בקטע הוא קירוב אחידי במובן שהשגיאה $E(x)$ שווה בכל הנקודות בקטע לכל x? נמק את תשובתך מתוך הנתונים שקיבלת

ב כיצד תקבע, מי מבין הפולינומים שבנית נותן קירוב טוב יותר לדעתך? האם אפשר לשפר את הקירוב?

ג האם שינוי במיקום נקודות האינטרפולציה בקטע משפיע על גודל השגיאה בכל נקודה ונקודה?

ד האם שינוי במיקום הנקודות בקטע משפיע על $\max_{[1,4]}|E(x)|$ (מכסימום השגיאה המוחלטת בקטע)? אם כן, כיצד? האם אתה מבחין בשינוי לקראת מגמה כלשהי?

ה האם הגדלת מספרן של נקודות האינטרפולציה בקטע משפיע על גודל השגיאה בכל נקודה ונקודה? האם הגדלת מספר הנקודות משפיע על $\max_{[1,4]}|E(x)|$ (מקסימום השגיאה המוחלטת בקטע)? אם כן, כיצד? האם אתה מבחין בשינוי לקראת מגמה מסוימת?

רשימת ספרות

ש' ברויאר, ג' צבס, 'קירוב פונקציות באמצעות אינטרפולציה' אוניברסיטת תל אביב, 1990 (הוראת מתמטיקה משולבת מחשב, 7)

שלמה ברויאר וגדעון צבס 'מתמטיקה משולבת מחשב במעבדה נומרית' אוניברסיטת תל אביב, 1991

אסתר אופנהיים, 'אינטרפולציה פולינומיאלית והוראתה בבית ספר תיכון במסגרת מעבדה מתמטית משולבת מחשב', חיבור לשם קבלת תואר 'דוקטור לפילוסופיה', אוניברסיטת תל אביב, 1995

S. Breuer & G. Zwas 'Function Approximations in the Mathematical Laboratory', *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* 14(1983) 507

S. Breuer, I. Gal-Ezer & G. Zwas 'Microcomputer Laboratories in Mathematics Education', *Computers Math. Applic.* 19(1990) 13-34