ידע אינטואיטיבי וידע לוגי כמרכיבים של הפעילות המתמטית

אפרים פישביין, דינה תירוש ואביבה ברש

בית הספר לחינוך, אוניברסיטת תל-אביב

המושגים אינטואיציה וידע לוגי

כדי להבין את המושג 'אינטואיציה', נתבונן במספר דוגמאות תחילה נתייחס לשתי בעיות בחשבון

(1) מחיר ליטר אחד של מיץ הוא 5 שקלים מהו המחיר של 3 ליטר מיץ? הסבירו את פתרונכם

הפתרון הוא פשוט ומידי אם מחיר ליטר אחד הוא 5 ש"ח, הרי שמחיר 3 ליטר יהיה 3 פעמים 5, כלומר, 15 שקלים

(2) מחיר ליטר אחד של מיץ הוא 5 שקלים מהו המחיר של 0 75 ליטר מיץ? הסבירו את פתרונכם

התשובה לבעיה זו אינה פשוטה כמו התשובה לבעיה הראשונה מחקרים מראים כי חלק מהתלמידים יענו כי יש לבצע פעולת חילוק (75 0 5) וחלק לא ידעו לענות כלל התשובה הנכונה אינה מידית, יש להשקיע במקרה זה מעט מחשבה כדי להציע פתרון לבעיה

למעשה, לשתי הבעיות יש בדיוק אותו מבנה מתמטי נתונים המחיר ליחידה ומספר היחידות ומבקשים את המחיר של כלל היחידות בשתי הבעיות הפעולה המתאימה למציאת הפתרון היא פעולת כפל (המחיר ליחידה x מספר היחידות) למרות הכול, התשובה הנכונה לבעיה 1 ניתנת ללא היסוס, מידית, כפתרון מובן מאליו ואילו התשובה הנכונה לבעיה 2 אינה כה מידית, היא דורשת שיקול לוגי מסוים

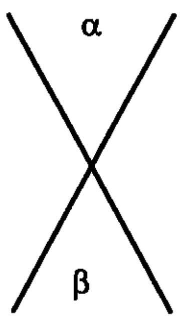
נוכל לומר, כי התשובה הנכונה לבעיה 1 מתקבלת **אינטואיטיבית**, בעוד שבבעיה 2 התשובה הנכונה מתקבלת בצורה לא ישירה, על-ידי מעורבות של **שיקול לוגי**

התשובה המידית, האינטואיטיבית, לבעיה 2 (75 0 5) היא תשובה שגויה התשובה הנכונה (5x0 75) נוגדת את האינטואיציה הראשונית קיימת נטייה אינטואיטיבית לומר כי 'כפל מגדיל' בעוד ש'חילוק מקטין'

כתוצאה מכך, היות שמחיר 0 75 ליטר מיץ צריך להיות קטן ממחיר ליטר אחד בוחרים, אינטואיטיבית, בפעולת חילוק לפתרון בעיה זו

נתבונן בדוגמה נוספת:

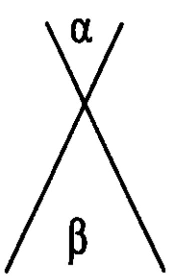
שני ישרים נחתכים (איור 1א) יוצרים שני זוגות של זוויות קדקודיות נתייחס לזוג הזוויות α ו - β ונשווה אותן התשובה המידית היא ששתי הזוויות הקדקודיות הן שוות האם אנו בטוחים בכך? כן שוויון הזוויות הוא מובן מאליו



איור 1א

ננסה להכליל את הבעיה, עבור כל זוג זוויות קדקודיות הנוצרות על-ידי שני ישרים נחתכים התשובה המידית היא, בדרך כלל, כי באופן **כללי**, זוויות קדקודיות הן זוויות שוות כלומר, התשובה שלנו (α=β) אינה מבטאת הבנה רק של המקרה הפרטי 'אני רואה ששתי הזוויות שוות', אלא זהו ביטוי של תכונה כללית

צמיר, תירוש וסתוי (1997) הראו כי התחושה האינטואיטיבית של שוויון זוויות קדקודיות אינה אבסולוטית כאשר בצד אחד הישרים ארוכים יותר (איור 1ב) טוענים תלמידים רבים כי הזווית בעלת 'הזרועות' הארוכות, גדולה יותר

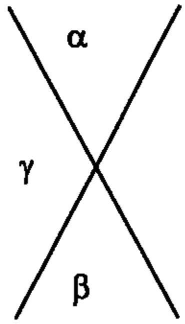


איור 1ב

אינטואיציות אינן מוחלטות, הן תלויות בהקשר אם נסתמך על איורים 1א ו-1ב, הרי שאפשר לראות שני מצבים שונים באחד האינטואיציה מתאימה לטענה המוכחת באופן לוגי, ובשנייה (איור 1ב) הטענה המוכחת סותרת את האינטואיציה

בחשיבה המתמטית לא כל מה שנראה אינטואיטיבית (מידית) נכון, הוא אכן נכון תמיד **יש להוכיח את הטענה המתאימה** טיעון כזה יכול להיראות מוזר למי שאינו בקי במתמטיקה, אך

לא כך למתמטיקאי גם את הטענה הקודמת יש להוכיח נתבונן שוב בשני הישרים הנחתכים (איור 2)



איור 2

ונוכיח כי $\alpha=\beta$

נוכל לטעון כי $\alpha+\gamma = 180°$ (קו ישר)

וכן $\beta+\gamma = 180°$ (קו ישר)

ומכאן נסיק כי $\alpha=\beta$

עתה השוויון בין שתי הזוויות α ו-β מבוסס בצורה **לא מידית**, על נימוקים לוגיים

כאמור, לא תמיד קיימת התאמה בין תחושה אינטואיטיבית לבין הטענה המוכחת לוגית נתבונן בטענה הבאה

$(n^2-1)n$ מתחלק ב-6 לכל n טבעי

האם טענה זו נראית 'אינטואיטיבית' כמובנת מאליה? בדרך כלל לא יש להוכיח את הטענה לצורך ההוכחה נפרק את הביטוי n^2-1 לגורמים $n^2-1=(n-1)(n+1)$

ולכן $n(n^2-1)=(n-1)\,n\,(n+1)$

כלומר, קיבלנו מכפלה של שלושה מספרים עוקבים (כמו, למשל, 5, 4, 3) נציין כי מבין שלושה מספרים עוקבים נתונים, לפחות אחד הוא מספר זוגי (מתחלק ב-2) ואחד מתחלק ב-3 אי לכך, המכפלה שלהם מתחלקת גם ב-2 וגם ב-3, כלומר,המכפלה מתחלקת ב-6

זוהי דוגמה לטענה שנכונותה אינה אינטואיטיבית (אינה מידית) בצורה לא ישירה, על-ידי הוכחה פורמלית, אנו מאשרים את תקפותה

להלן דוגמה נוספת, ברוח דומה

טענה: סכום הזוויות במשולש הוא 180°

האם יש לנו תחושה אינטואיטיבית כי טענה זו נכונה?

לא יש בלי סוף משולשים אפשריים ומפתיע מאוד כי סכום הזוויות **בכולם**, קטנים כגדולים, הוא אותו מספר, והוא שווה לסכום שתי זוויות ישרות הטענה אינה אינטואיטיבית יש להוכיח אותה והוכחתה אינה מידית, אלא מתבססת על מספר טיעונים לוגיים גם הסכום 180° אינו יותר אינטואיטיבי מאשר 160° או כל מספר אחר

מהדוגמאות שראינו, אפשר ללמוד כי במתמטיקה ובמדע (באופן כללי), קיימים טיעונים הנראים מידית נכונים ואפשר לקבלם כמובנים מאליהם, לעומת אחרים, שיש להוכיחם כדי לקבל את נכונותם

נוכל להכליל ולומר כי קיימות שתי צורות בסיסיות של קוגניציה

א קטגוריה של קוגניציות שהן מידיות ומתקבלות כמובנות מאליהן אלה קוגניציות אינטואיטיביות

ב קטגוריה של קוגניציות שאינן מידיות ומתקבלות על סמך הוכחה לוגית מפורשת אלה הן קוגניציות לוגיות

נבדיל בין המצבים הבאים

(1) טענות המתקבלות ללא הוכחה, על סמך תחושה אינטואיטיבית לגבי נכונותן

לדוגמה, נתייחס לאקסיומות הבאות בגיאומטריה האוקלידית

– דרך שתי נקודות עובר ישר אחד ויחיד

– המרחק הקצר ביותר בין שתי נקודות, הוא הקו הישר המחבר ביניהן

(2) טענות שלמרות התחושה האינטואיטיבית לגבי נכונותן, מן הראוי ואף צריך להוכיחן לדוגמה

– זוויות קדקודיות, הנוצרות על-ידי שני ישרים נחתכים שוות זו לזו (מקרה בו הסרטוט סימטרי)

– סכום שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית

– במשולש שווה שוקיים (שולש ששתיים מצלעותיו שוות), הזוויות ליד הבסיס שוות זו לזו

(3) טענות שאינן מובנות מאליהן ויש להוכיחן כדי לקבלן כנכונות לדוגמה

– סכום הזוויות במשולש שווה לסכום שתי זוויות ישרות

– במשולש ישר זווית, סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר $a^2+b^2=c^2$ (משפט פיתגורס)

– ישר המקביל לצלע אחת במשולש, חותך את שתי הצלעות האחרות בקטעים פרופורציוניים (משפט תלס)

(4) מעניינים במיוחד הם המצבים אשר בהם נוצר קונפליקט בין התגובה האינטואיטיבית למצב נתון לבין ההכרה המתקבלת מניתוח לוגי

נחזור לבעיה שציינו קודם לכן 'מחיר ליטר אחד של מיץ הוא 5 ש"ח מהו המחיר של 0 75 ליטר? ציינו מה הפעולה שתשתמשו בה לפתרון הבעיה'

הנטייה הראשונית של רבים היא לענות 'נפתור על-ידי פעולת חילוק', והשיקול הוא 'חילוק מקטין' (מחיר 0 75 ליטר מיץ קטן ממחיר ליטר 1 שלם) כדי להגיע לתשובה הנכונה אפשר להסתמך על שוויון היחסים בין מחירים וכמויות (פרופורציה)

כמות 1 = מחיר 1

כמות 2 מחיר 2

ובמקרה שלנו $\frac{5}{x}=\frac{1}{0\ 75}$

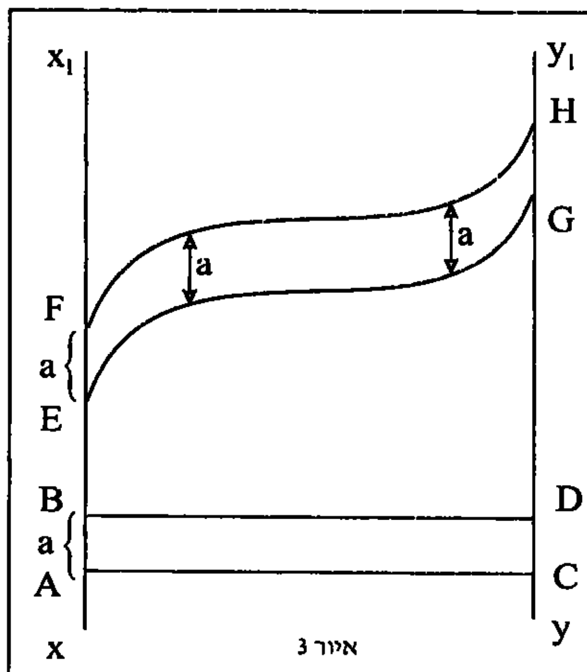
כלומר $x = 5\ \ 0\ 75$

ולמרבה הפלא, הפעולה היא פעולת כפל אפשר לפתור את הבעיה גם על-ידי אנלוגיה לבעיה דומה במבנה שלה, אלא שנתוניה הם מספרים שלמים (לדוגמה מחיר ליטר אחד של מיץ הוא 5 ש״ח מהו מחיר 4 ליטרים מיץ? במקרה זה בוחרים מידית בפעולת הכפל)

בדוגמה הנ״ל קיים קונפליקט בין הפתרון הראשון, האינטואיטיבי, לבין הפתרון הנכון, הלוגי

דוגמה נוספת:

נתבונן בשני צירים מקבילים xx_1 ו- yy_1 (איור 3)



איור 3

נבחר קטע a על הציר xx_1 $AB=a$ מהנקודות A ו B נעביר ישרים מקבילים הניצבים ל-xx_1 ול-yy_1 נקבל $AC\|BD$ נבחר על הציר xx_1 שתי נקודות נוספות E, F שהמרחק ביניהן a נסרטט החל מ-E ובהתאם גם מ-F, שתי עקומות שהמרחק ביניהן, בכל שתי נקודות מתאימות, הוא קבוע ושווה ל-a (איור 3)

יש להוכיח כי השטחים ACDB ו-EGHF שקולים זה לזה כאשר הבעיה הוצגה בפני תלמידים בבית ספר תיכון, תגובתם המידית הייתה, כי השטחים אינם שווים ולכן אין מה להוכיח זו הייתה תגובתם האינטואיטיבית, תגובה מידית המתקבלת כמובנת מאליה למעשה, שני השטחים שווים, ואפשר להוכיח זאת רק באמצעות שיקולים לוגיים אפשר כמובן לחשב את השטחים על-ידי אינטגרלים מתאימים, אך קיים פתרון פשוט נתבונן בשני השטחים הבאים ACGF ו-BDHF שני שטחים אלה שווים, כי האחד מתקבל על-ידי השני באמצעות הזזה מקבילה (a) משני השטחים השווים הללו יש להפחית את השטח BDGF ואז מתקבלים שני השטחים המקוריים ACDB ו-ECHF שטחים אלה שווים כי התקבלו על-ידי חיסור אותו גודל משני גדלים שווים

שוויון השטחים הוא מפתיע כי אינטואיטיבית, שני השטחים אינם נראים שווים אך בעזרת שיקולים לוגיים הוכחנו את שוויונם

(5) אפשר לתאר מצבים שבהם הצגות שונות לאותה בעיה מביאות לאינטואיציות סותרות

אינטואיטיבית נדמה כי קבוצת המספרים הטבעיים {1 2 3 4 5 ,6 }

אינה שקולה לקבוצת המספרים הזוגיים החיוביים אולם, בהצגת הבעיה באופן הבא

{1 2 ,3 ,4 5 6 }

{2 4 6 8 ,10 12 }

קל לראות כי **לכל** מספר טבעי מתאים מספר זוגי ולהפך ולכן שקילות שתי הקבוצות היא אינטואיטיבית

לסיכום נקבל את המצבים הבאים

– מצב שבו טענה מתקבלת באופן אינטואיטיבי ללא צורך בהוכחה

– מצב שבו טענה מתקבלת אינטואיטיבית אך גם מוכחת על-ידי טענות פורמליות (התחושה האינטואיטיבית מתלכדת עם המסקנות הלוגיות)

– מצב שבו טענה אינה אינטואיטיבית, מובנת מאליה, ואפשר לקבלה בהתבסס על הוכחה פורמלית

– מצב שבו קיים קונפליקט בין התחושה האינטואיטיבית לגבי טענה מסוימת, לבין ההוכחה הפורמלית שלה

– מצב שבו קיימות אינטואיציות סותרות

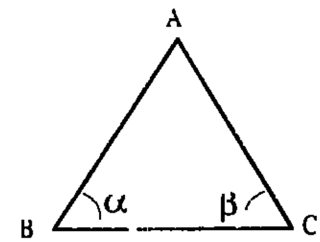
מן הראוי שמורה יהיה מודע למצבים אפשריים אלה, כדי להבין את הקשיים של תלמידיו בלימוד המתמטיקה וכדי לפתור אותם

הערות דידקטיות

ממבט ראשון, נדמה כי המצב הנוח ביותר לתהליך ההוראה הינו המצב אשר בו התחושה האינטואיטיבית תואמת את מה שמתקבל על-ידי שיקולים לוגיים מסתבר שאין הדבר כך נתבונן, לדוגמה, במקרה של המשולשים שווי שוקיים

נתון כי AB = AC ויש להוכיח כי α=β (איור 4)

איור 4



תגובתו המידית של התלמיד היא ׳לשם מה?׳ מדוע צריך להוכיח דבר שהוא מובן מאליו? התלמיד לא מקבל שיש לתת הוכחה פורמלית לטענה שהיא ברורה אינטואיטיבית ההוכחה נראית לתלמיד מיותרת והדרישה להוכיח טענה שהיא אינטואיטיבית נכונה עלולה לחזק אצל התלמיד את התחושה כי מתמטיקה היא ׳משחק׳ שרירותי חסר תועלת ומיותר

חוק החילוף וחוק הקיבוץ לגבי פעולות החיבור גם הם דוגמאות ברות זו החל מגיל מסוים, תלמיד סבור כי a+b ו-b+a מובילים לאותה תוצאה וכך גם a b ו-b a אלה הן עובדות טריביאליות ומובנות מאליהן של המתמטיקה הבסיסית-מדוע, אם כן, יש לבדוק את קיומן? שוב, האינטואיטיביות של תכונה מסוימת גורמת לתלמיד להמעיט בחשיבותה המתמטית

מובן שתכונה שהיא כביכול טריביאלית, לא מבטלת את החשיבות והצורך לציינה במפורש, להוכיחה או להגדירה

בצורה דומה לגבי חוקי הקיבוץ של החיבור והכפל סכומם של שלושה מספרים a, b, c לא ישתנה אם נחבר קודם a + b ואחר כך נוסיף לתוצאה את c, או אם נוסיף את a לסכום המספרים b + c

נוכל לרשום זאת על-ידי שימוש בסוגריים

(a+b)+c = a+(b+c)

באופן דומה (a b) c = a (b c)

ולכן אפשר להשמיט את הסוגריים הן בחיבור והן בכפל הדברים נראים כה ברורים אינטואיטיבית עד כי נדמה שמיותר ואין כל הצדקה לנסח חוקים, כמו חוק החילוף וחוק הקיבוץ

הסיבות לניסוח החוקים הללו, שהם כביכול עובדות טריביאליות, הן כדלקמן

– במתמטיקה, **כל** תכונה, כל טענה או מושג מתקבלים רק אחרי הגדרה מפורשת שלהם כאקסיומה, משפט, הגדרה, חוק (תכונה כללית), מושג בסיסי או מושג מוגדר

היות שהמתמטיקה היא מערכת דידוקטיבית, פורמלית ונוקשה, תחושה אינטואיטיבית **בפני עצמה**, אינה מתקבלת כהצדקה מתמטית

– סיבה לא פחות חשובה, להצדקה פורמלית של תכונות כל כך טריביאליות, היא העובדה שאי-אפשר לייחס אותן אוטומטית, לכל פעולה מתמטית חוק החילוף וחוק הקיבוץ אינם קיימים לא לגבי פעולת החיסור ולא לגבי פעולת החילוק

b-a אינו שווה ל-a-b וכן b a אינו שווה ל-a b (5 3 שונה מ-5 3)

כך גם 2 (12 4)≠(4 2) 12

כי 6=(12 2)=(4 2) 12

ואילו 1 5=2 3=2 (12 4)

דוגמה נוספת היא יחס השקילות A ≡ B יחס השקילות A ≡ B מוגדר על-ידי שלוש תכונות

א סימטריה אם A ≡ B אז B ≡ A

ב רפלקסיביות A ≡ A

ג טרנזיטיביות אם A ≡ B וגם B ≡ C אז A ≡ C

נראה (בדוגמאות מספריות) כי יחס השוויון הוא יחס שקילות

א השוויון סימטרי אם 6=2 12 אז 2 12=6

ב השוויון רפלקסיבי 12=12

ג השוויון טרנזיטיבי אם 6=2 12 וכן 3x2=6

אז 3x2=2 12

כל זה נכון, אך טריביאלי, מובן מאליו (אינטואיטיבי) מדוע יש חשיבות בציון התכונות הללו? בעיקר משום שלא תמיד הדברים הם כאלה לא לכל יחס מתמטי מתקיימות שלוש התכונות הללו

ראשית, יחס השקילות הוא מושג הרבה יותר כללי ומורכב ממושג השוויון מה שנראה טריביאלי עבור שוויון, אינו דווקא טריביאלי עבור שקילות קיימים יחסים שאינם מקיימים את שלוש התכונות דלעיל לדוגמה, יחס הסדר

A > B אינו יחס סימטרי שכן, אם A > B לא נובע כי B > A. אלא להפך A < B (היחס הוא אנטי-סימטרי) היחס אינו רפלקסיבי, שכן A אינו גדול מ-A (הרי A=A תמיד) עם זאת

היחס הוא כן טרנזיטיבי אם $A > B$ וגם $B > C$ אז $A > C$

לתלן דוגמה נוספת:

דן מתבקש לפתור את המשוואה הבאה $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=5$

דן למד כי עליו למצוא בתחילה את המכנה המשותף, בכדי לבטלו, ולכן הוא רושם

1 $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=5 \ / \ 6$

2 $3x+2x=30$

3 $5x=30$

4 $x=6$

סביר להניח כי דן אינו יודע כי ארבע המשוואות הן שקולות על פי הגדרה, שתי משוואות הן שקולות אם יש להן אותה קבוצת אמת (אותם פתרונות) דן עבר ממשוואה למשוואה באופן כזה שקבוצת האמת נשמרה לביטול המכנה המשותף, דן בעצם כפל את שני האגפים של המשוואה באותו מספר הוא קיבל משוואה חדשה השקולה למשוואה הראשונה דן גם השתמש בתכונת הטרנזיטיביות של השוויון

אם $3x+2x=5x$ וגם $3x+2x=30$ אז $5x=30$

עד כמה שידוע לנו המושג 'משוואות שקולות' נלמד בדרך כלל בבית הספר, אולם, המושג 'שקילות' באופן כללי, אינו נלמד במפורש

הדוגמאות לעיל מתייחסות למצב (למשל תכונה, טענה) הנראה ממבט ראשון טריביאלי ולגביו יש לתלמיד תחושה כי הוכחות והגדרות הן מיותרות הסיבה לכך היא, שהתלמיד לא קולט במלואה את המשמעות של המתמטיקה כתחום ידע דדוקטיבי ופורמלי התלמיד נוטה לפרש עובדות מתמטיות בדרך אמפירית, כלומר, הוא מתייחס למושגים ולפעולות מתמטיות כפי שהוא מתייחס אל דברים מוחשיים איש לא שאל את עצמו אם כיסא הוא כיסא, אם בשינוי מקומו של כיסא, הכיסא אינו משתנה, אם הישיבה על כיסא משנה את צורתו, צבעו, ייעודו וכדומה

במתמטיקה, תחושה אינטואיטיבית לגבי תכונה או פעולה, אינה שוללת את הצורך להעניק להן מעמד פורמלי (הגדרה, הוכחה וכדומה), בהתאם למבנה הדדוקטיבי, האקסיומטי של המתמטיקה.

עד כה התבוננו במצבים אשר בהם נראה כי נימוקים אינטואיטיביים מבטלים את הצורך לתיאור או לאסמכתא פורמלית

מצב נוסף, שהוא חשוב ודי שגור בהוראת מתמטיקה (כפי שכבר ציינו קודם לכן), הוא המצב שבו התחושה האינטואיטיבית נמצאת בקונפליקט עם המצב הפורמלי (המוגדר על-ידי משפט, הוכחה פורמלית, הגדרה או תכונה פורמלית) במקרה זה, על המורה לזהות את הנטיות האינטואיטיביות של התלמיד ולנסות להסביר את מקורותיהם התהליך הדידקטי העיקרי שעשוי לעזור לתלמיד להתגבר על הקשיים, הוא לפתח אצלו מודעות לקיומו של הקונפליקט ולעזור לו להבין את העובדה הבסיסית, כי במתמטיקה, בסופו של דבר, המעמד הפורמלי הוא זה שקובע

נדון במספר דוגמאות:

שבעים ואחד תלמידי כיתה ט נתבקשו, בין היתר, לפשט את הביטוי הבא $\frac{(x-2)^2}{x^2-4}$

שליש מהנשאלים ענו נכון אולם, שליש נוסף רשמו $\frac{(x-2)^2}{x^2-4}=\frac{x^2-4}{x^2-4}=1$

שאר התלמידים עשו שגיאות אחרות (Fischbein and Barash 1993) אפשר לשער כי אצל אותם תלמידים שרשמו $(x-2)^2=x^2-4$

קיימות נוסחאות שגויות כמו $(a-b)^2=a^2-b^2$ ו-$(a+b)^2=a^2+b^2$

במקום $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ ו-$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

מדועי היות שהביטוי $(a+b)^2=a^2+b^2$ מתקבל כיותר **אינטואיטיבי** מאשר הנוסחה הנכונה, שבה 2ab נראה כנטע זר השערה זו מאוששת על-ידי ממצאים אשר לפיהם תלמידים, שעדיין לא למדו את הנוסחה הפורמלית, שיערו באופן אינטואיטיבי כי $(a+b)^2=a^2+b^2$ וכן $(a-b)^2=a^2-b^2$

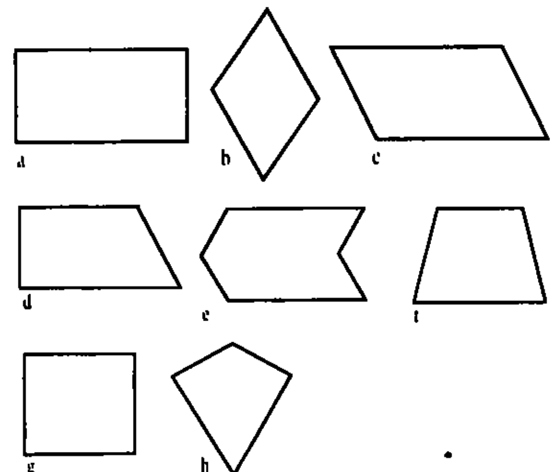
אינטואיטיבית, נראה סביר מאוד כי יתקיים פילוג של החזקה לשני מרכיבי הסכום באופן שווה, זאת בדומה לחוק הפילוג של הכפל מעל לחיבור $a (b + c) = ab + ac$

המודל האינטואיטיבי המהווה השראה לגישה זו הוא המודל הבא פעולה המתבצעת על אובייקט כלשהו, פועלת במידה שווה על כל אחד ממרכיביו של אובייקט זה לדוגמה כאשר מחממים עצם כלשהו, הטמפרטורה של כל אחד מחלקיו עולה במידה שווה

מעניין לציין, כי חלק מהתלמידים שעשו שימוש לא נכון בנוסחאות והשתמשו בפישוט שברים אלגבריים בינוסחאות' $(a\pm b)^2=a^2\pm b^2$ ידעו לרשום נכון את הנוסחאות עצמן כאשר נתבקשו לעשות זאת בשאלון נפרד כלומר, הקונפליקט קיים

באופן סמוי במוחם של תלמידים אלה, אולם הפתרון האינטואיטיבי הוא הגובר

להלן דוגמה נוספת הממחישה את קיומו האפשרי של קונפליקט בין התחושה האינטואיטיבית לבין האילוצים הפורמליים קבוצה של תלמידים מכיתות ט-יא נתבקשו להגדיר את המושג 'מקבילית' כמו כן הוצגו בפניהם הצורות הבאות (איור 5)



איור 5

אחוז התלמידים שהגדירו נכון את המקבילית היה 88% מתלמידי כיתה ט, 90% מתלמידי כיתה י, 88% מתלמידי כיתה יא ו-89% מתלמידי כיתה יב בקרב תלמידי כיתה ט, 75% הגדירו נכון את המקבילית וגם זיהו בין הצורות הנתונות את המקביליות בכיתה י 67% עשו כן ואילו בכיתה יא רק 61% מהתלמידים הגדירו וגם זיהו נכון את המקבילית, בהתאם להגדרתה

אם נבדוק כל צורה בנפרד, הרי שכל התלמידים, בכל הגילים, זיהו נכון את c כמקבילית, בעוד שאת h ו-g לדוגמה, זיהו רק 85% כמקביליות בכיתה יא רק 76% מהתלמידים זיהו את המעוין כמקבילית

בדוגמה זו, עולה בקרב התלמידים קונפליקט, בין הפירוש האינטואיטיבי האפשרי לצורה **בהתאם למבנה החזותי שלה,** לבין ההגדרה הפורמלית קונפליקט זה הוא אף חזק יותר אצל תלמידים יותר צעירים קיים קושי לכלול באותה קטגוריה צורות כה שונות בצורתן כמו ריבוע ומקבילית נטויה המבנה החזותי (הויזואלי) שלהם כה שונה מאידך, שתי צורות אלה משתייכות לאותה קטגוריה כאשר משתמשים בהגדרה רחבה דיה (מרובע הוא מקבילית, אם צלעותיו הנגדיות מקבילות [או שוות])

רק כאשר הלומד מיומן במתמטיקה, הוא מסוגל להסתמך, לא על אספקט צורני, אלא על הגדרה פורמלית (Fischbein and Nachlieli in press)

נדון בדוגמאות אחרות שבהן התחושה האינטואיטיבית סותרת את הידע הפורמלי (הפתרון המתמטי)

במחקר נשאלו השאלות הבאות

במשחק לוטו יש לבחור 6 מתוך 40 מספרים

ורד בחרה 1, 2, 3, 4, 5, 6 רותי בחרה 27 8 33 17 1 39

למי מהן יש סיכוי גדול יותר לזכות׳

א לורד יש סיכוי גדול יותר לזכות

ב לרותי יש סיכוי גדול יותר לזכות

ג לורד ולרותי יש אותו סיכוי לזכות

התשובה הנכונה היא, כמובן, שהסיכוי שווה (ג), שכן לכל קבוצה של 6 מספרים מתוך 40 מספרים, יש אותה הסתברות אולם, לומדים רבים סבורים כי הסיכוי של רותי לזכות הוא גדול יותר **אינטואיטיבית,** נדמה כי לא ייתכן שהסדרה הזוכה תהיה סדרה של שישה מספרים עוקבים סדרה מקרית אמורה לייצג טוב יותר את האקראיות של משחק הלוטו אנו מכנים זאת בשם **ייצוג מוטה** (representativeness bias) אחוז התשובות השגויות לבעיה זו, שהתקבל בהתאם לגיל, הוא 78% (כיתה ה), 55% (כיתה ז), 35% (כיתה ט), 22% (תלמידי מכללה) אפשר לראות מהנ״ל כי התגובה משתפרת עם הגיל (Fischbein and Schnarch 1997)

הדוגמה הבאה מתייחסת למושג האינסוף האקטואלי תלמידים (בכיתות ה-ט), נתבקשו להשוות בין מספר האיברים בקבוצת המספרים הטבעיים לבין מספר האיברים בקבוצת המספרים הזוגיים החיוביים שתי קבוצות אלה הן קבוצות שקולות אולם, רוב התלמידים, בגילים השונים, ענו אינטואיטיבית שקבוצת הטבעיים 'גדולה' יותר זוהי התשובה האינטואיטיבית הסותרת את התשובה המתמטית הפורמלית תשובה זו ניתנה על-ידי 60 9% (כיתה ה), 77 6% (כיתה ו), 63 2% (כיתה ז), 80 8% (כיתה ח), ו-73 4% (כיתה ט) מהנבדקים

(Fischbein Tirosh and Hess 1979 p 18)

כבר ציינו קודם, כי הקונפליקט נמוג כאשר אנו מציגים את שתי הקבוצות הללו בסידור אחר

{1 2 3 4 5 6 }

{2 .4 6 .8 .10 12 }

הדוגמאות שניתנו לעיל מתייחסות למצבים שבהם קיים קונפליקט בין הידע האינטואיטיבי (מידי, מובן מאליו), לבין

האמת המתמטית הפורמלית המבוססת על אילוצים פורמליים (הגדרות ומשפטים מוכחים באופן דדוקטיבי) מצבים כאלה שכיחים בהוראת מתמטיקה. התלמיד עלול שלא להיות מודע לקיומו של קונפליקט. התוצאה היא שהתלמיד אינו מקבל, אינו מבין את הטיעון הפורמלי, או אף אם נדמה בתחילה כי הוא מבין, הוא נוטה לשכוח ובסופו של דבר הפתרון מוכתב על-ידי הידע האינטואיטיבי

אם אנו פשוט מתעלמים מן הקונפליקט (כלומר, מתעלמים מהידע האינטואיטיבי השגוי), אין אנו מטפלים באינטואיציה הראשונית. אי לכך, הקונפליקט נשאר סמוי ובסופו של דבר, סביר להניח כי התלמיד ישכח את התשובה המתמטית, הפורמלית, הנכונה

כפי שראינו, יש מצבים שבהם טיעונים מתמטיים ופורמליים אינם מתקשרים לאינטואיציה כלשהי. על התלמיד להסתמך על האמת המתמטית הפורמלית בלבד, על הגדרות ועל הוכחות פורמליות

טענות רבות וכן נוסחאות מתמטיות, מתאימות למצב כזה לדוגמה

– לנוסחה לפתרון משוואה ריבועית (נוסחת השורשים), אין ביסוס או עוגן אינטואיטיבי

– השוויון $a^0 = 1$, נובע מהגדרה לביטוי a^0 אין משמעות אינטואיטיבית, מידית, יחידה. מצאנו כי חלק מהתלמידים טוענים כי $a^0 = 0$ חלקם אומרים $a^0 = 1$ ואחרים $a^0=a$ או לא יודעים לענות. כלל ההגדרה נובעת מהצורך בעקביות עם הידע המתמטי הקודם. אם נרחיב את כלל החילוק של שתי חזקות בעלות אותו בסיס, כלומר לכל k, m טבעיים

$$\frac{a^m}{a^k} = a^{m-k} \quad (a \neq 0)$$

הרי שמחד גיסא נקבל $\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$

ומאידך גיסא אנו יודעים כי $\frac{a^m}{a^m} = 1$

ובהכרח $a^0 = 1$

– הדוגמה הבאה מתייחסת לפעולות במספרים מכוונים. אנו יודעים כי עבור שני מספרים חיוביים a, b

מוגדר $(-a)(-b)=+ab$ אין הצדקה אינטואיטיבית להגדרה זו. אינטואיטיבית למכפלה $(-a)(-b)$ אין כל משמעות. מאידך גיסא, כדי לשמור על עקביות עם כללי המתמטיקה התקפים עד כה, יש להגדיר כי $(-a)(-b)=+ab$. נעשו ניסיונות ליצור מודלים שיצדיקו אינטואיטיבית את הכפל של שני מספרים שליליים, אך בדרך כלל הם היו מורכבים מדיי ולכן יעילותם הדידקטית מוטלת בספק

– למספרים מורכבים אין כל משמעות אינטואיטיבית. הביטוי $\sqrt{-1}$ אינו מעלה כל אסוציאציה אינטאאיטיבית

על התלמיד להסתגל לרעיון כי המתמטיקה מעצם טבעה, היא תחום ידע דדוקטיבי, פורמלי ומופשט. מודלים אינטואיטיביים הם לעתים קרובים יעילים מאוד, אך לא תמיד הם אפשריים. לא מומלץ לנסות ולהמציא בצורה מלאכותית, מודלים אינטואיטיביים לכל מושג או פעולה. זה מאולץ ואולי אף אבסורדי, לנסות לדוגמה, להמחיש אינטואיטיבית את a^0 או a^n. השיקולים הפורמליים העומדים בבסיס ההחלטה על אופן ההגדרה, לעתים קרובות, מובנים יותר לתלמידים

מצב אפשרי נוסף הוא זה שאנו דנים בו במושגים או פעולות מתמטיות שקשה לקבל אותם מבחינה אינטואיטיבית (כי הן נוגדות-אינטואיציה) וגם הטיפול הפורמלי בהם, הוא מורכב. אלה המצבים הקשים ביותר מבחינה דידקטית.

לדוגמה, נתייחס לפעולות החיסור

מקרה א

$$\begin{array}{r} 7635 \\ -\;\underline{5421} \\ 2214 \end{array}$$

תרגיל חיסור כזה אינו בעייתי. בהתאם לאלגוריתם החיסור יש לחסר החל מימין, כל ספרה במספר השני מהספרה המתאימה לה במספר הראשון. זוהי פעולה פשוטה וברורה גם אינטואיטיבית וגם פורמלית. אולם, פעולת החיסור אינה תמיד כה פשוטה

מקרה ב

$$\begin{array}{r} 1702 \\ -\;\underline{1368} \end{array}$$

על-פי הכלל הקודם, יש להתחיל ולחסר מימין. ראשית יש לחסר 8 מ - 2. **אינטואיטיבית זה אינו בר ביצוע**

נמצא, כי לעתים תלמידים הופכים את סדר הפעולה (2 - 8) ורושמים 6. הצעד הראשון של החיסור בתרגיל מסוג זה הוא נוגד-אינטואיציה. יש 'ללוות' במקרה זה, מן הספרה שמשמאל, אלא שגם זה אינו אפשרי אינטואיטיבית. הספרה משמאל היא 0. אם כך יש ללוות מהספרה הבאה משמאל שהיא 7. עתה זה אפשרי, אלא שלעתים התלמיד שוכח בינתיים מה בדיוק הוא עושה. כדי שלא לטעות, על התלמיד להבין את עקרון ערך

המקום, שהוא רחוק מלהיות פשוט עקרון ערך המקום מבטא הסכם פורמלי - הערך של הספרה תלוי במקומה במספר

צירוף זה של קושי אינטואיטיבי ופורמלי-פרוצדורלי, מסביר את הקושי של פעולת החיסור עבור תלמידים רבים

נסכם בקצרה את האמור לעיל בהתייחס לאינטראקציה בין הבנה אינטואיטיבית לבין הבנה לוגית בפעילות מתמטית (כדי לחדד את ההערות הדידקטיות) הגדרנו את המצבים הבאים

– טענה, תכונה או חוק נתון, נראים לתלמידים ברורים אינטואיטיבית, אולם דרושה בכל מקרה, אסמכתא פורמלית הקושי עולה מכך שהתלמיד אינו חש כל צורך באיזשהו תיאור פורמלי או הוכחה נוספת לדברים שהם כבר ממילא ברורים הסיכון הוא שהתלמיד ישכח את האספקט הפורמלי הנדרש על-ידי המבנה הנוקשה, הדדוקטיבי, של המתמטיקה יש לחזור ולהדגיש בכל עת, את האופי הפורמלי דדוקטיבי של המתמטיקה

– מצב של קונפליקט בין האמת המתמטית המבוססת פורמלית, לבית התחושות האינטואיטיביות במקרה זה יקשה על התלמיד להבין, להטמיע ולזכור את הטיעון המתמטי המתאים התחושה האינטואיטיבית היא חזקה, בדרך כלל חזקה מן האמת המתמטית הפורמלית הסותרת אותה בקונפליקט כזה, בדרך כלל, ידה של האינטואיציה על העליונה חשוב שהמורה יעיר את תשומת לבו של התלמיד לקיום הקונפליקט ויעזור לו להבין כי במתמטיקה, המילה האחרונה שמורה לשיקולים הפורמליים

– המצב השלישי הוא מצב אשר בו לגבי מושגים, פעולות או טענות פורמליות אין לנו כל תחושה אינטואיטיבית במקרה כזה גם לא קיים קונפליקט אולם, גם כאן, דווקא משום שאין כל אסוציאציה אינטואיטיבית, מתעורר קושי בהבנה, בפירוש ובזכירה לעתים, אפשר ליצור אסוציאציה אינטואיטיבית (מודל) ולעתים לא

מן הראוי שמורה ינצל מצבים מסוג זה כדי לתת לתלמידיו מושג טוב יותר לגבי אופיה המופשט, פורמלי, דדוקטיבי של המתמטיקה כתחום דעת אינטואיציה יכולה להקל או לעורר הבנה, אך בשום אופן אינה יכולה לשמש כהוכחה

– במקרה הרביעי, הן הפן האינטואיטיבי והן התהליך הפורמלי, מהווים קושי ללומד במצב כזה, יש להבהיר ולנתח בכיתה את שני האספקטים ולחזק את השליטה על-ידי תרגילים מתאימים

כללית, בהוראת מתמטיקה, יש חשיבות מרובה לכך שהמורה יבין את האינטראקציות בין ההיבט האינטואיטיבי, לבין ההיבטים הפורמליים והפרוצדורליים המשתתפים בתהליכי הבנה, זכירה ופתרון בעיות

אם לא מתייחסים אל הכוחות האינטואיטיביים, הם ישפיעו למרות הכול על יכולת ההבנה והפתרון של התלמיד התהליך יהיה בלתי מבוקר ובדרך כלל ישבש את החשיבה המתמטית

אם אין התייחסות להיבט הפורמלי ונוטים להסתמך בלעדית על מרכיבים אינטואיטיביים, הרי מה שנלמד ודאי לא יהיה מתמטיקה

המאפיינים הכלליים של הבנה אינטואיטיבית

עד כה דיברנו על אינטואיציה כעל סוג של ידע מידי ומובן מאליו זוהי אכן התכונה הבסיסית והיותר אופיינית של הבנה אינטואיטיבית אולם, יש צורך בתמונה שלמה של מאפייני התחושות האינטואיטיביות כדי להבין טוב יותר את תפקידן בתהליך החשיבה

– **מידיות, מובנות מאליה** ידע אינטואיטיבי הוא **מידי** ומתקבל כמובן מאליו (Direct, Self evident) פירושו שהאינטואיציות הינן קוגניציות המתקבלות כפי שהן, ללא תחושת צורך בבדיקה נוספת של נכונותן או בהוכחה פורמלית שלהן הטענה "המרחק הקצר ביותר בין שתי נקודות הוא קו ישר" היא טענה כזו, המתקבלת מידית ונתפסת כדבר מובן מאליו

– **ביטחון, שכנוע פנימי** (Intrinsic certainty) - הבנה אינטואיטיבית מלווה בדרך כלל בתחושת ביטחון, בשכנוע פנימי עמוק לגבי הטענה לעיל המתייחסת לקו הישר, יש לנו תחושה סובייקטיבית של ביטחון לגבי נכונותה ישכנוע פנימי פירושו, שלצורך השכנוע המידי, לא נדרשת כל אסמכתא חיצונית (פורמלית או אמפירית)

– **כפייתיות** (Coerciveness) לאינטואיציות יש מאפיין של כפייה הן כופות עצמן על דרך החשיבה, על אופן בחירת ההשערות או הפתרונות פירושו, שאנו דוחים פירושים ופתרונות אחרים שאינם עולים בקנה אחד עם האינטואיציות שלנו כבר ציינו מקודם כי תלמידים ואף מבוגרים בדרך כלל מאמינים כי 'כפל מגדיל וחילוק מקטין' הם התרגלו להאמין כך בצעירותם כאשר פעלו במסגרת המספרים הטבעיים בלבד (ובמקרה זה אמונות אלה אכן נכונות) בהמשך, גם אחרי היכרות עם המספרים הרציונליים (הכוללים גם שברים קטנים מיחידה), הם ממשיכים להחזיק באותה אמונה - שהיא כמובן אינה תקפה עוד

– **חיוץ** (אקסטרפולציה Extrapolativeness) אחת מהתכונות החשובות של הבנה אינטואיטיבית, היא יכולת החיוץ מעבר לכל ראייה אמפירית כך למשל, הטענה 'דרך נקודה מחוץ לישר אפשר להעביר מקביל אחד ויחיד לאותו ישר', מבטאת את יכולת החיוץ של האינטואיציה מעצם העובדה שהטענה מתייחסת לשני ישרים אינסופיים, לא קיימת בדיקה אמפירית או הוכחה פורמלית שיתנו לה תוקף

למרות זאת, אנו מקבלים את הטענה אינטואיטיבית, כבטוחה, מובנת מאליה, כחיוץ (הרחבה) של הנתונים שקיבלנו (שני קווים ישרים הנמצאים באותו מישור ואינם נפגשים)

אנו **חשים** כי אפשר להמשיך **מעל לכל ספק** בכיוון זה **החיוץ נובע מתוך הידע האינטואיטיבי** יכולת החיוץ היא חלק מאופיה של האינטואיציה

אופיה האינטואיטיבי החזק של האקסיומה הזו של אוקלידס, מנעה ממתמטיקאים להחליפה באקסיומות אחרות, לא אינטואיטיביות, עד למאה ה-19, אז נבנו גיאומטריות אחרות לא-אוקלידיות

ברוח זו נוכל להתייחס לטענה הבאה 'לכל מספר (שלם) קיים מספר העוקב לו' אין אנו חשים כל צורך להוכיח טענה זו בדרך אמפירית או פורמלית אנו פשוט, בטבעיות, עושים חיוץ מעבר לכל סדרה של מספרים

יכולת החיוץ מעורבת גם בעקרון האינדוקציה המתמטית, שעליו מבוססת ההוכחה בדרך האינדוקציה (המתמטית)

עקרון האינדוקציה המתמטית קובע כי כדי להוכיח את נכונות הטענה $P(n)$ עבור כל n טבעי, יש לבצע שני שלבים

א יש להוכיח כי הטענה נכונה עבור $n=1$

ב יש להוכיח כי אם הטענה $P(n)$ נכונה עבור איזשהו $n=k$ אז היא נכונה גם עבור $n=k+1$ (כאשר n מספר טבעי כלשהו)

אי לכך, מנכונות הטענה עבור $n=1$ נובעת נכונותה עבור $n=2$ ומכאן עבור $n=3$ וכך הלאה עבור כל n טבעי

הטענה נכונה אם כך (על-ידי חיוץ), עבור כל n טבעי בהוכחה מסוג זה **אנו מסתמכים על יכולת החיוץ כתכונה של האינטואיציה**

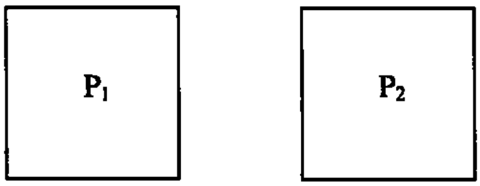
– גלובליות, כוללניות (Globality)

אינטואיציות הן תפיסות גלובליות בניגוד לקוגניציות הנרכשות באופן לוגי שהן סדרתיות, אנליטיות

נתבונן במספר דוגמאות

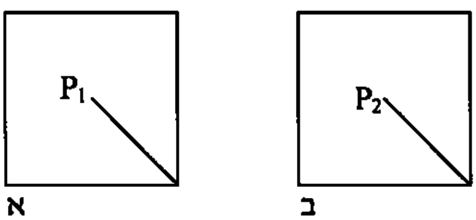
נותנים לילד בן 4 - 5 שנים, שני דפים על דף א החוקר מסמן נקודה (P_1) ומבקש מהילד לצייר נקודה על דף ב 'בדיוק באותו מקום' בו נמצאת P_1 על דף א (איור 6)

הילד מצייר, בדרך כלל, נקודה P_2, פחות או יותר במיקום נכון אם הילד יתבקש להסביר מדוע הוא סימן את הנקודה במקום האמור ('מדוע סימנת את הנקודה כאן?') הוא יתקשה לתת הסבר הוא פתר את הבעיה **אינטואיטיבית**, בצורה מידית, על-ידי הערכה **כוללנית** המיקום לא נקבע על-ידי פעולת מדידה שהינה פעולה **מפורשת, לוגית, אנליטית.**

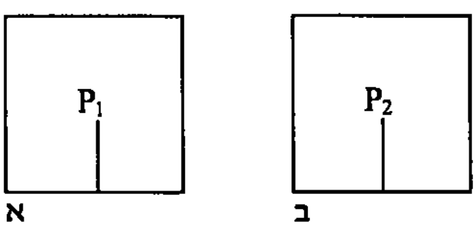


איור 6

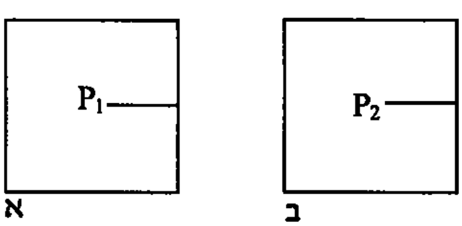
אם שואלים את אותה שאלה ילדים בני 6 - 7 חלקם מנסים לתת הסבר חד-ממדי (איורים 7א, 7ב, 7ג) הילדים מסבירים 'הסתכלתי בדף א כדי לראות מהו מרחק הנקודה מן הישר (מהקצה)'



איור 7א



איור 7ב



איור 7ג

במקרה זה הפתרון היא עירוב של פתרון אינטואיטיבי עם פתרון לוגי-אנליטי

אנו עדים לתופעה המעניינת של צעד ראשון בתהליך אשר ממנו יצמח, מתוך הערכה ראשונית גלובלית, פתרון מבוסס לוגית.

חלק מהתלמידים היותר בוגרים (מעל גיל 10) היו מסוגלים למקם את הנקודה על-ידי שימוש בשתי קואורדינטות - בדרך כלל המרחקים משתי צלעות מאונכות של הדף למעשה, רק 17% מבני 12 הגיעו לפתרון אנליטי בצורה ספונטנית את האחרים היה צריך ללמד את הטכניקה הפורמלית במלואה אולם קיימת בגיל זה המוכנות להבין את העיקרון של שתי קואורדינטות (שני שיעורים), ההכרחי לסימון נקודות במישור

הדוגמה שנתנו נועדה להדגים את המושג של פתרון כוללני (גלובלי) תשובה אינטואיטיבית (מידית) היא תשובה גלובלית בניגוד לפתרון לוגי-אנליטי

(פרטים נוספים הנוגעים לרכישת מושג הקואורדינטות אצל ילדים, אפשר לקרוא במקור הבא
Piaget, Inhelder and Szeminska 1948, p 153-172)

להלן דוגמה נוספת לתכונת הכוללניות (גלובליות), של ידע אינטואיטיבי

מציגים בפני ילד בן 4-5, שתי שורות של גולות (שורה א ושורה ב) יתכנו המקרים הבאים

1) לשתי השורות אותו אורך ילד המתבקש להשוות את מספר הגולות בשתי השורות, קובע כי מספרן שווה גם אם זה לא כך

2) שורה ב ארוכה יותר הילד יסיק כי בשורה ב יש יותר גולות מאשר בשורה א, גם אם מספרן שווה

הילד אינו סופר את הגולות תשובתו ניתנת **כהערכה כוללנית, מידית.** פיאזיה טוען כי הילד בגיל הזה חושב באמצעות **קונפיגורציות** במקרה הנוכחי אנו דנים **בהערכה אינטואיטיבית** אשר בה יש תפקיד מרכזי להתרשמות החזותית (אורך השורות)

כאשר מציגים את אותה בעיה בפני ילד בגיל 6-7 הוא בדרך כלל סופר את הגולות לפני שהוא משיב זוהי גישה שונה לחלוטין תשובתו מבוססת על פעולה לוגית, אנליטית, שהיא תהליך הספירה

דוגמה נוספת נבקש מתלמידים, אפילו סטודנטים במכללה, לייצג את השבר 1/3 כמספר עשרוני התלמידים יענו, בדרך כלל, 0 333 =1/3 נשאל אותה השאלה באופן שונה "האם המספר העשרוני 0 333 שווה ל-1/3 או שואף ל-1/3" התלמידים, גם תלמידי מכללה, יאמרו לרוב, כי 0 33 שואף ל-1/3 אך לעולם לא מגיע ל-1/3, כי אנו דנים במספר בעל אינסוף ספרות

למעשה, 1/3 = 0 333 אנו יודעים כי השוויון הוא יחס סימטרי אם A = B אז גם B = A

אם 0 333 = 1/3 אז בהכרח נובע כי 1/3 = 0 333 את השוויון 0 333=1/3 קל להבין אינטואיטיבית שכן דנים כאן באינסוף פוטנציאלי, כלומר, תהליך המתמשך עד בלי סוף ילד בן 12 מבין אינטואיטיבית שקו ישר יכול להמשיך בלי סוף

הדברים מורכבים יותר כאשר מדובר באינסוף אקטואלי אינסוף אקטואלי פירושו כמות נתונה (לדוגמה, קבוצה אינסופית של נקודות, של מספרים), שיש לתפוס אותה כפי שהיא, בשלמותה קבוצת הנקודות בקטע של ישר מהוות אינסוף אקטואלי

מחקרים מראים כי בעוד שהאינסוף הפוטנציאלי **מובן, נתפס ומתקבל אינטואיטיבית - כתהליך** שאינו מסתיים - הרי שאינסוף אקטואלי אינו נתפס אינטואיטיבית ככמות **נתונה.**

מסיבה זו, **בעיות הכוללות פעולות עם אינסוף אקטואלי, מובילות לקשיים אינטואיטיביים רבים**

(Fischbein, Tirosh and Hess 1997) קשה, למשל, לקלוט כי קבוצת המספרים הטבעיים שקולה לתת-קבוצה שלה, כמו למשל קבוצת הטבעיים הזוגיים החיוביים

אפשר להסביר את הקושי בתפיסה האינטואיטיבית של האינסוף האקטואלי, באופן הבא כפי שראינו, אינטואיציה פירושה תפיסה סינתטית **גלובלית** ומתן פירוש למצב נתון

אולם, אין אנו מסוגלים לתפוס **במבט אחד** אינסוף איברים אנו רגילים לדון בדברים סופיים (או **בתהליכים** מתמשכים) לכן, כאשר אנו נשאלים אם 0 333 שווה ל-$\frac{1}{3}$ או **שואף** ל-$\frac{1}{3}$,

התשובה הנפוצה היא "**שואף** ל-$\frac{1}{3}$",

כדי לתפוס אינטואיטיבית כי 0 333 **שווה** ל $\frac{1}{3}$, אנו צריכים להיות מסוגלים לתפוס בצורה **גלובלית**, מידית, את המספר האינסופי של הספרות המתאימות זוהי משימה בלתי אפשרית עבור המוח האנושי

הבה נסכם המאפיינים העיקריים של האינטואיציה הם **מידיות, מובנות מאליו, תחושת ביטחון ושכנוע פנימי, כפייתיות, יכולת חיזוי (אקסטרפולציה) וכוללניות (גלובליות).**

סכימות ואינטואיציות

בפרק הדן במושג 'סכֵמָה' נאמר כי הסכמות משמשות כלי בסיסי שבעזרתו היצור החי מסגל את עצמו לגירויים של הסביבה

הדבר נכון עבור שני ההיבטים החיוניים של היצור החי ההיבט הביולוגי וההיבט הפסיכולוגי כל קשר מסוג שהוא, שאנו יוצרים עם העולם החיצון, נוצר בזכות שני תהליכים בסיסיים **התאמה**, סיגול (accommodation) **והטמעה** (assimilation) (פיאז'ה)

בהטמעה אנו מתכוונים לאינטגרציה ופירוש של הגירויים החיצוניים בגופנו (ההיבט הביולוגי) ובתודעתנו (ההיבט הפסיכולוגי)

בהתאמה, סיגול, הכוונה היא לתגובה הולמת שלנו לגירוי חיצוני עם הכנסת מזון לפינו מתרחשים מספר תהליכים ביולוגיים (פיסיולוגיים וכימיים) **המתאימים** את המזון ומעבדים אותו למרכיב אינטגרלי של האורגניזם שלנו זה מתרחש במישור הביולוגי במישור הפסיכולוגי, אנו קולטים גירויים חיצוניים (צורות, צבעים, מרחקים, קולות, ריחות וכד') על-ידי החושים הקשורים אל המוח המפרש את המידע המתקבל ומשלבו במבנים משמעותיים שונים כאשר אני מביט סביבי בחדרי, אני רואה **שולחן, כיסאות, ספרים, עפרונות** וכדי המוח מארגן את המידע הראשוני המתקבל (צבעים, צורות, גדלים וכד') במבנים, שעבורי, הם בעלי **משמעות** כאשר אני מגיב (לדוגמה, כאשר אני מחפש ספר) הפעולות שלי מבוססות על אותן קוגניציות (תחושות) בעלות משמעות בהתאם לניסיוני ולמטרותיי כל התהליכים הללו של תפיסה, קליטה, פירוש המידע והתגובות ההולמות, מבוססים על תכניות, כלומר, על **סדרה מתוכננת של צעדים** תכניות כאלה נקראות **סכמות** תופעה המתרחשת ביצור חי אינה סתם הרפתקה התופעה מיועדת להגשים יעד התנהגותי, הסתגלותי ולכן ביצועה מבוקר על-ידי תכניות, על-ידי סכמות חלקן הן **סכמות מבניות** (structural schemata) המאופיינות על-ידי היותן כלליות ובעלות משמעויות רחבות האחרות הן יותר ספציפיות, מותאמות לתכנים מסוימים נדגים מספר סכמות מבניות

בגיל צעיר, הילד לומד לאמוד מרחק ומיקום, לזהות עצמים, להגיע אל העצמים שהוא מעוניין בהם הילד לומד להמשיג קבוצות עצמים, להשוות גדלים מאוחר יותר, הוא לומד את המושג 'מספר', הוא לומד לספור, להשוות גדלים, למדוד הוא לומד את שמות העצמים והמאורעות ומסוגל לארגן את המילים במבנים לשוניים השפה שהוא משתמש בה ומבין אותה, מבוקרת על-ידי מבנים תחביריים שהם סכמות - תכניות, של פירושים ושל ביטויים בעלי משמעות מושגים כמו סיבתיות, אקראיות, רצף זמן, פרופורציה וכד', הם כולם דוגמאות ליכולות שכליות מסוג זה בשלב הרבה יותר מאוחר, יפתח הילד סכמות מסדר יותר גבוה, כמו שקילות, פונקציה, משוואה, הסתברות, אמת אמפירית ואמת פורמלית והמושג 'הוכחה'

יש להבין, כי **כל המושגים הללו מבטאים תכניות מסוימות של פירוש, עיבוד ושילוב מידע** לדוגמה, כפי שכבר צוין, תלמיד בן 12 שנים עלול שלא להבין מדוע צריך להוכיח כי זוויות הבסיס במשולש שווה שוקיים שוות זו לזו הוא עדיין לא רכש את **הסכמה**, תכנית הפירוש המנטלית של המושג הוכחה פורמלית, להבדיל מהוכחה אמפירית

סכמות ספציפיות הן בעלות היקף יותר מצומצם, המותאם ספציפית לתחום תוכן מסוים לדוגמה, האלגוריתמים של פעולות החשבון - חיבור, כפל וכד' - מורכבים מסדרת צעדים עוקבים המובילים אל הפתרון אלה הן סכמות ספציפיות מאידך גיסא, הרעיונות **הכלליים** של כפל או של חיבור הם סכמות מבניות הבנתם מבטאת עקרונות שכליים כלליים, המתפתחים עם הגיל והניסיון נמצא כי ילדים בני 6-8 לדוגמה, שהתבקשו להשוות את גודלם של שני מלבנים, נטו לחבר את הממדים (אורך + רוחב), ולהשוות את סכומם, בעוד שילדים בוגרים יותר ומבוגרים, כפלו את ממדי המלבן וביססו את תשובתם על השוואת המכפלות - פעולה המבטאת התייחסות שכלית ברמה יותר גבוהה (Wilkening 1980)

כדי לרכוש סכמה מבנית מסוימת, חייבים להתקיים שני תנאים בסיסיים

1 על הילד להגיע לרמה מתאימה של בשלות שכלית

2 הילד צריך לעבור תהליך של התנסות מתאימה ילד בן 6 אינו מוכן עדיין, מבחינה שכלית, להבין את המושג 'הוכחה מתמטית', ללא קשר לכמות ההסברים שהוא יקבל בנדון מאידך גיסא, ילד בן 12 בשל, בכוח, יכול להבין את המושג 'הוכחה פורמלית', אך כדי להכירה עליו לעבור התנסות מעשית מתאימה (להשתמש בהסברים, דוגמאות, תרגילים) נמצא כי אפילו תלמידים בכיתות י-יא לא רכשו את המושג של הוכחה פורמלית, בגלל מחסור בתרגול מתאים (פישביין וקדם 1996)

תרגול כזה צריך לכלול מצבים אשר בהם התלמיד מתעמת עם הכלליות של הוכחה מתמטית, מעצם הגדרתה, מחד גיסא, ונטייתו האינטואיטיבית לחפש דוגמאות פרטיות נוספות, מאידך גיסא

מהו הקשר בין סכמות מבניות ואינטואיציות?

סוגיה זו עדיין לא נחקרה דיה במחקר שיטתי מהממצאים הקיימים עד כה (בעיקר בהתייחס לאינטואיציות הסתברותיות), אפשר להניח כי אינטואיציות, בדרך כלל, מבוססות על סכמות מבניות

נתבונן בדוגמה הבאה

מספר תלמידים בכיתות ה, ז, ט, ו-יא, נשאלו את השאלה הבאה

"כאשר מטילים מטבע שלוש פעמים, הסיכוי לקבל "ראש" לפחות פעמיים הוא א גדול ב שווה ג קטן מהסיכוי לקבל אותה תוצאה, לפחות 200 פעמים, כאשר מטילים אותו מטבע 300 הטלות"

התשובה הנכונה היא כי הסיכוי לקבל פעמיים 'ראש' בשלוש הטלות של מטבע, גדול מהסיכוי לקבל 200 פעמים 'ראש' ב-300 הטלות של אותו המטבע (לא נפרט כאן את אופן החישוב המתמטי המתאים)

נחקרים רבים, בעיקר הבוגרים יותר, ענו כי הסיכויים שווים כי, $\frac{2}{3}=\frac{200}{300}$ (Fischbein and Schnarch 1997)

בדוגמה זו, **הסכמה המבנית של הפרופורציה** הביאה לתשובה האינטואיטיבית השגויה של הנבחנים הסכמה המבנית נדחקה לתוך ראייה אינטואיטיבית כוללנית (גלובלית), היות **שהסכמה לא התאימה לבעיה הנתונה, היא הובילה לאינטואיציה שגויה** סכמה אחרת, שהיא כן מתאימה לבעיה, היא חוק המספרים הגדולים בהסתברות, הטוען שככל שמספר הניסיונות גדל, החלק היחסי של התוצאות (התוצאה האמפירית), מתקרב לתוצאה המתקבלת על-ידי ההסתברות התיאורטית במקרה האמור לעיל, כאשר מטילים מטבע 300 פעמים (שזה מספר יחסית גדול של ניסיונות), מקבלים בערך אותו מספר של פעמים 'ראש' כמו 'זנב' $[P(H)=P(T)=\frac{1}{2}]$

אולם עבור שלושה ניסיונות בלבד, קיים סיכוי סביר שתהיה סטייה מההסתברות התיאורטית

המושג 'פרופורציה' מייצג סכמה חשובה מאוד וכללית מאוד זו הסיבה שאנו מתייחסים אליה כאל סכמה מבנית בגיאומטריה, בטריגונומטריה, בהסתברות ועוד, אנו משתמשים רבות בסכמת הפרופורציה כך גם בפיסיקה ובכימיה (לדוגמה, היחס בין המרחק והזמן בתנועה קצובה, היחס בין הכוח לתאוצה בתנועה מואצת וכד')

מדוע המושג 'פרופורציה' הוא סכמה?

משום שהוא מייצג אמצעי שכלי, תכנית המפרשת מספר נתונים ומובילה לגילוי חוקי טבע (כמו היחס בין הכוח לתאוצה)

נניח שאנו רוצים לקבוע את הקשר בין הכוח והתאוצה בתנועתו של גוף מסוים על-ידי הפעלת כוח גדל והולך אפשר לראות כי תאוצת הגוף הולכת וגדלה

מהו החוק המתאר את התנועה?

נפעיל כוחות הולכים וגדלים F_1, F_2, F_3 על גוף מסוים נמדוד את המהירויות המתאימות ונחשב בהתאם את התאוצות (תאוצה היא תוספת המהירות ביחידת זמן a_1, a_2, a_3)

כדי להבין את הקשר בין כוח ותאוצה אנו זקוקים לאמצעי השכלי שיאפשר לנו לארגן את הנתונים שהתקבלו כך שתתקבל עבורם משמעות מסוימת במקרה שלנו

$\frac{F_3}{F_2}=\frac{a_3}{a_2}$ $\quad$ $\frac{F_1}{F_2}=\frac{a_1}{a_2}$ וכו'

כך שאם נגדיל את הכוח פי שתיים למשל, תוכפל גם התאוצה מחקרים הראו כי סכמת הפרופורציה מתפתחת בהדרגה בשלב האופרציות הקונקרטיות (אחרי גיל 6-7) ומקבלת היבט כמותי בשלב האופרציות הפורמליות (Inhelder and Piaget 1958)

אולם, בדוגמה לעיל, נוכחנו לדעת כי סכמת הפרופורציה השפיעה לא רק על אופן החשיבה הפורמלית, אלא גם על ההערכה האינטואיטיבית וזאת כאשר הנתונים הם פשוטים דיים.

דוגמה נוספת, המתייחסת לאותה סכמה
במחקר, הראו לילדים שתי קופסאות שהיו בהן גולות שחורות ולבנות הנבדקים, שידעו מהו מספר הגולות בכל קופסה, נתבקשו לשער מאיזו קופסה יש סיכוי גדול יותר להוציא, מבלי להסתכל, גולה אחת לבנה נבדוק את המצבים הבאים
קופסה א 2 לבנות, 4 שחורות
קופסה ב 1 לבנה, 2 שחורות

ילדים בני 6 בחרו, בדרך כלל, את קופסה א הם פישטו את ההשוואה להשוואה בינארית $1 < 2$ (התייחסו למספר הגולות הלבנות בלבד) תשובתם הייתה מידית, אינטואיטיבית הם עדיין לא רכשו את סכמת הפרופורציה, אלא רק את הסכמה היסודית יותר של השוואה ישירה של שתי כמויות מוחלטות ילדים בני 12 ענו נכון, כי הסיכויים שווים גם תשובתם הייתה מידית, אינטואיטיבית, כוללנית, אך היא התבססה על סכמת הפרופורציה שאותה כבר רכשו

סכמות מבניות יכולות לעורר תחושות אינטואיטיביות אם הנתונים פשוטים דיים, שכן המעבר מסכמה לאינטואיציה, דורש תהליך של התמקדות בתפיסה גלובלית, מידית.

ילדים ותלמידים בוגרים יותר התבקשו להעריך את מספר התמורות האפשריות של 3, 4 ו-5 עצמים נמצא כי שיערו פחות או יותר נכון את מספר התמורות של 3 עצמים כ-6 בממוצע $(2x3=6)$ אך עבור 4 ובעיקר עבור 5 עצמים, ניתנה תת-הערכה למספר התמורות האפשריות

הסכמה למספר התמורות של 5 עצמים - הנוסחה הנכונה - היא 120=5! = P 5 ההערכה (הממוצעת) של מתבגרים בני 12 ובני 14 הייתה, כי מספר התמורות הוא 14 ו-16 בהתאמה במקרה זה אנו דנים, בסכמה שהיא מורכבת מדיי

(המכפלה 120= 5 x 4 x 3 x 2 x 1) וקשה לפתח ראייה אינטואיטיבית מידית, גלובלית של המצב (Fischbein 1975)

להלן דוגמאות נוספות המתייחסות לקשר בין סכמות ואינטואיציות הציגו לילד בן 8 את הבעיה הבאה "לדן תשעה שקלים אמא נתנה לדן 5 שקלים כמה שקלים יש לדן בסופו של דבר"

הילד ענה מידית כי יש לחבר 5 + 9 במקרה זה פעולת החיבור היא אינטואיטיבית היא מבוססת על הפעולה הקונקרטית של איחוד שתי קבוצות של עצמים הבה נשנה במעט את ניסוח הבעיה "לדן מספר שקלים אמא הוסיפה לדן עוד 5 שקלים בסופו של דבר היו לדן 14 שקלים כמה שקלים היו לדן בתחילה"

כאשר תלמידים נשאלים על הפעולה הנדרשת לפתרון הבעיה, רבים שוגים ואומרים 'כי יש לחבר את המספרים' ניסוח הבעיה (אמא הוסיפה וכו') מרמז על חיבור זה מעורר את **אותה הסכמה** כמו בבעיה הקודמת

המונח 'להוסיף' גורם להשלכה לא נכונה ומניע את הילד לבחור בסכמה לא מתאימה, המובילה בסופו של דבר, לתשובה שגויה

נחזור לבעיה שהצגנו כבר "מחיר ליטר מיץ הוא 5 שקלים מהו מחירם של 0.75 ליטרים מיץ" רשמו את הפעולה הנדרשת לפתרון הבעיה" תלמידים רבים ואף מבוגרים, בוחרים אינטואיטיבית בחילוק הסכמה שעליה מבוססת טעות זו היא "הכלל", השגוי, כמובן, כי חילוק מקטין **יש לערב במקרה זה סכמה אחרת, סכימת הפרופורציה, המתאימה לפתרון הבעיה** בפתרון הנכון, הנוגד את האינטואיציה הראשונית, נבצע פעולת כפל, כלומר, הפתרון הנכון הוא 0.75 x 5 כפי שציינו כבר, אפשר לפתור בעיה זו גם על-ידי אנלוגיה עם בעיה דומה שנתוניה הם מספרים טבעיים נתבונן בבעיה מוכרת נוספת הצגנו שתי רצועות שרוחבן שווה אך אורכן שונה והשווינו את השטחים של אותן רצועות התלמידים החליטו, אינטואיטיבית, אך באופן שגוי, שלרצועה המפותלת שטח יותר גדול הסכמה שהכתיבה את המסקנה במקרה זה היא "יותר מ-A יותר מ-B" הרצועה המפותלת יותר ארוכה, ולכן גם שטחה יותר גדול סכמה זו אינה מתאימה למקרה שלנו ובהתאם התשובה האינטואיטיבית היא תשובה שגויה

כך גם בדוגמת הלוטו, בה התבקשנו להשוות את הסיכוי לזכות בלוטו בבחירת המספרים 1, 2, 3, 4, 5, 6 לעומת בחירת המספרים 39, 1, 17, 33, 8, 27 **אינטואיטיבית**, אנו נוטים להעדיף את קבוצת המספרים האקראיים הסכמה שמאחורי אינטואיציה זו היא **הייצוגיות** היות שמדובר במשחק לוטו, שהמספרים בו עולים אקראית, קבוצת המספרים השנייה מייצגת טוב יותר את אקראיות התוצאות לאמתו של דבר, לכל קבוצה של שישה מספרים יש אותה הסתברות, שכן התוצאות הן בלתי תלויות ויש אותה הסתברות לקבל כל אחת מהן זוהי הסכמה המתאימה, אך סכמה זו מבוססת על ניתוח לוגי ולכן אינה כה אפקטיבית, מבחינה אינטואיטיבית

לסיכום, אפשר לשער כי אינטואיציות מבוססות, בדרך כלל, על סכמות מבניות, שהן תכניות בסיסיות לפירוש ועיבוד מידע לעתים, עולה מתוך נתוני הבעיה סכמה הולמת ואז גם הפתרון הוא נכון אם הסכמה המתאימה מבטאת פעולה פשוטה הניתנת הן לביטוי והן לתפיסה גלובלית, הרי שהאינטואיציה נכונה אולם, לא אחת, הנתונים הבולטים של הבעיה מטעים, מעוררים סכמה לא מתאימה (תכנית לא מתאימה לעיבוד ופירוש) ומובילים לאינטואיציה שגויה

אנו חייבים להדגיש, כי הסכמה מעורבת בדרך כלל בתהליך הפתרון באופן סמוי ובלתי מודע האדם מודע לתוצר הסופי, לאינטואיציה לעתים אפשר, למשל באמצעות ראיונות, לעזור לנבדק לזהות את התהליך החישובי שעליו מבוססת האינטואיציה שלו אולם, יש להתייחס בזהירות יתר לממצאי ראיונות כאלה, שכן יתכן שהנבדק משיב במודע תשובה אנליטית שלאחר מעשה, וזו אינה מצביעה באמת ובתמים על מנגנון האינטואיציה שלו זוהי בעיה תיאורטית, מתודולוגית, מורכבת, הדורשת חקירה נוספת חשוב שהמורה יבין שאינטואיציות, שהן לכאורה תשובות ספונטניות, מבוססות על מנגנון כלשהוא, על סכמות מבניות כלשהן אלה אינם ניחושים גרדא כדי להשפיע ולשפר את האינטואיציות של התלמידים, יש לנסות לזהות את הסכימות הסמויות המעורבות בתהליכי החשיבה שלהם, לשפוך עליהן אור ולהסביר מדוע הן כנראה אינן מתאימות, לצורך פתרון הבעיה

מיון אינטואיציות

אינטואיציות אמונתיות ואינטואיציות מקדימות
(Affirmatory and Anticipatory Intuitions)

כל הדוגמאות שניתנו עד כה שייכות לקטגוריה של אינטואיציות הנקראות **אינטואיציות אמונתיות** (affirmatory)

אלה הם היגדים, ייצוגים, פירושים, פתרונות המופיעים **אצל כל אחד ואחד מאתנו** ומתקבלים ישירות, כמובן מאליו, באופן גלובלי וכצורך פנימי

אפשר להבחין בקיום קטגוריה נוספת של אינטואיציות הנקראות **אינטואיציות מקדימות** (anticipatory). שלא הזכרנו עד כה. כאשר אנו שואפים לפתור בעיה שפתרונה אינו ישיר, תהליך החקירה מורכב ממספר שלבים:

א. בשלב ראשון אנו מנסים להבין את משמעות הבעיה המוצגת, תוך עשיית שימוש במידע המוצג בטקסט שלה.

על הפותר להבין ולדעת להבחין בבירור בין הנתון לבין הנדרש.

ב. על הפותר להעלות אסוציאציות ולהשתמש בידע קודם, בדרך שתגשר על הפער בין הנתון לבין הנדרש. מאמץ שכלי כזה הוא לעתים סמוי, ולעתים מודע ומפורש.

ג. כאשר תהליך כזה מגיע לסיום מובנה כהלכה, הפותר חש שהגיע אל הפתרון.

במציאות, הדברים הרבה יותר מורכבים. תהליך הפתרון (שלב ב) עובר ברוב המקרים שלש רמות עיקריות.

ברמה הראשונה (ב1) הפותר משקיע את מרב מרצו בניסיונות להפעיל אסטרטגיות שונות, בגישושים, התבוננות במודלים וסכמות פתרון שנרכשו קודם לכן ופסילת הפתרונות שאינם מתאימים. תהליך זה הוא תהליך פחות או יותר מודע שכן נעשה בו שימוש מודע באסטרטגיות. לעתים קרובות הפותר מוותר ופונה לפעילות אחרת או אף למנוחה קצרה. בשלב הבא (ב2) הוא חש **לפתע** שמצא את הפתרון. עדיין לא מגובשים אצלו בשלב זה, כל פרטי הפתרון, כלומר, כל הצעדים הפורמליים, אנליטיים, המנומקים בצורה דדוקטיבית. מה שיש במוחו, ברגע הראשון, הוא **רעיון גלובלי, ראייה כוללת של הכיוון המוביל אל הפתרון**. גם זו אינטואיציה, אינטואיציה **מקדימה** שאנו מכנים לעתים קרובות 'הארה'. אינטואיציה כזו מאופיינת קודם כול, בכך שהיא מייצגת **רגע מתוך מאמצי הפתרון**. שנית, אינטואיציה כזו מלווה בתחושת שכנוע עמוקה, תחושת ביטחון וזאת למרות שעדיין **לא ניתן** ביסוס פורמלי-אנליטי לתהליך הפתרון המלא. עבור מתמטיקאי, תהליך הפתרון אינו מסתיים לפני שהוא מסוגל להעלות במפורש את כל המרכיבים הנדרשים להצדקת הפתרון הראשוני המשוער.

נצטט מדברי מתמטיקאים. פואנקרה (Poincaré) בכתביו האוטוביוגרפיים, מציין, בהקשר של תגליות מתמטיות, כי בבוקר אחד כשטייל על הצוק, עלה בדעתו הרעיון, מלווה בתחושת ביטחון פתאומית כי טרנספורמציות אריתמטיות מסוימות זהות לאלו של הגיאומטריה הלא אוקלידית.

'One morning walking on the bluff the idea came to me with just the same characteristics of brevity, suddenness and immediate certainty that the arithmetical transformations of indeterminate ternary indefinite forms were identical to those of the non-Euclidean geometry (Poincaré 1913 p 388)

לא הייתה זו השערה שהועלתה בצורה שקולה, פורמלית, תוך התייחסות לשיקולים תיאורטיים שונים ולאפשרויות הגלומות במצב הנתון. ברגע הגילוי הכותב לא התייחס לכך כאל השערה. הוא לא ראה בכך איזשהו ניחוש מוצלח אלא אמת אבסולוטית. כפי שפואנקרה ממשיך ואומר: 'זה קרה רק לאחר מכן', שהוא החל לנתח את התוצאה ולהסיק ממנה מספר מסקנות.

קנטור מספר ברוח זו על תגליתו לגבי השקילות של שתי קבוצות של נקודות השייכות לצורות שאינן בעלות אותו מספר של ממדים.

נוסיף ציטוט ממאמר שנכתב על-ידי מתמטיקאי שהוא גם פסיכולוג אנליטי מבריק, בשם דייוויד טול (David Tall) טול מספר על תגלית שלו בתחום האנליזה הלא סטנדרטית בהתייחסו לרגעי התבוננות שהיו לו בדרך החתחתים שהובילה אותו אל התיאוריה שבנה, מסביר טול כי:

תיאור קלסי של 'פתרון בעיות' כולל בתוכו העלאת 'השערות' שאותן יש לבדוק לאחר מכן. אולם הוא (טול) ראה 'אמיתות' שהוצדקו על-ידי תהודות חזקות במוחו. למרות העובדה שלעתים קרובות הן הוכחו מאוחר יותר כשגויות, באותו רגע הוא חש תחושת ביטחון פנימי באמתותן. שום אפשרות לא נשקלה באופן קר, פורמלי. אלה היו אמיתות אינטואיטיביות עזות. עם זאת, באותה עת הוא חש שהקשר שלו עמן הוא לעתים קשר חולף וחסר משמעות. בתחילה היה עליו לרשום אותן, למרות שלא היו מושלמות, וזאת לפני שייעלמו כרוחות רפאים (Tall 1980 p 33)

נוכל לסכם ולומר, כי מאפייני האינטואיציות המקדימות הם:

א. הן מופיעות בדרך כלל באופן פתאומי, לאחר חקירה אינטנסיבית הנעשית כחלק מניסיון לפתור בעיה מסוימת.

ב. הן מייצגות ראייה כוללת.

ג. בניגוד לניחוש או השערה, מלוות אינטואיציות אלה בתחושת ביטחון למרות שעדיין לא נמצא הפתרון האנליטי, פורמלי, המפורט של הבעיה.

הפסיכולוג האמריקאי הנודע, ג'רום ברונר טען כי בתהליך ההוראה, יש לעודד את הלומדים לבטא בפעילויות בכיתה את הרעיונות האינטואיטיביים שלהם (Bruner 1965)

מורים רבים מגיבים בצורה שלילית להצעות פתרון של לומדים, הניתנות לפני שאלה יכולים להצדיקן בהוכחה מלאה ומאורגנת. כך קורה, שתלמידים לעתים קרובות, אינם מעיזים לבטא את רעיונותיהם בעת ניסיון לפתור בעיה במשותף במסגרת

הכיתתית יש לפתח אצל הלומדים את היכולת להעריך את מידת הסבירות שאסטרטגיית פתרון אכן תוביל לפתרון הרצוי וזה אפשרי רק אם תינתן ללומד ההזדמנות לעמת את האינטואיציות המקדימות שלו עם דעותיהם של חבריו ללימודים

מיון אינטואיציות אמונתיות: אינטואיציות ראשוניות ואינטואיציות שניוניות

האינטואיציות האמונתיות יכולות להיות אינטואיציות ראשוניות או אינטואיציות שניוניות. למעשה, כל האינטואיציות האמונתיות שתיארנו עד כה הן אינטואיציות ראשוניות

אינטואיציות ראשוניות מתפתחות אצל כל אחד ואחד באופן טבעי כתוצאה מהתנסות אישית ומהאינטראקציה עם הסביבה הטבעית והחברה. אנו מפתחים אינטואיציות לגבי המרחב (הערכת מרחקים, כיוונים ומיקום), אינטואיציות לגבי הזמן (הערכת פרקי זמן), אינטואיציות פיסיקליות (כוח הוא הגורם לתנועה), אינטואיציות לגבי מספרים (הערכה כוללנית של כמויות) ואינטואיציות הקשורות למושג 'אינסוף' (הישר הוא אינסופי)

שואלים אדם אם שני עצמים A ו- B, הזהים בצורתם אך A כבד מ- B, הנופלים נפילה חופשית מאותו גובה, יגיעו לקרקע באותו זמן. התשובה השגורה היא כי A (הכבד מבין השניים), יגיע לקרקע קודם. זוהי תשובה אינטואיטיבית אך שגויה ('כבד יותר נופל מהר יותר'). במציאות וכפי שמראה תורת המכניקה, לשני עצמים הנופלים נפילה חופשית מאותו גובה, יש אותה תאוצה ולכן יגיעו אל הקרקע תוך אותו פרק זמן, ללא תלות במשקלם. התנועה מתוארת על-ידי הנוסחה $S=\frac{1}{2}gt^2$, g מסמל את תאוצת הנפילה שערכה על פני כדור הארץ הוא 9.8 $\frac{\text{מ}}{\text{שנ}^2}$, t הוא זמן הנפילה ו-S הוא הגובה, הדרך שעבר הגוף בנפילתו

אינטואיציות ראשוניות מתפתחות, כפי שכבר ציינו, באופן טבעי. הן תואמות לעתים את האמיתות המבוססות מדעית ולעתים הן סותרות אותן. בכל מקרה מאמין המחזיק בהן בנכונותן כאמיתות מובנות מאליהן

אינטואיציות שניוניות יוצרות אמונות קוגניטיביות המתפתחות אצל האדם כתוצאה מתהליך לימוד שיטתי וארוך טווח. לדוגמה, לפיסיקאי נראה ברור כי גוף ממשיך בתנועתו בקו ישר ובמהירות קבועה, אם לא פועל עליו כוח כלשהו (או אם שקול הכוחות הפועלים עליו שווה לאפס). תכונה זו נקראת התמדה והיא סותרת את האמונה הנאיבית כי גוף ימשיך לנוע רק אם יפעל עליו איזשהו כוח

עלינו לדעת להבחין בין מידע לבין אינטואיציה. הלומד הנתקל לראשונה בחוק ההתמדה אינו חש אוטומטית, כי התכונה האמורה היא ברורה ומובנת מאליה. הוא מקבל את החוק כי הוא למד אותו. רק אחרי שהוא משתמש בחוק זה לאורך זמן הוא עשוי לפתח אמונה כי התופעה הטבעית היא אכן התופעה המתוארת על-ידי ניוטון (מהירותו של גוף נע היא קבועה, אם לא פועל עליו כל כוח). כלומר, מה שבתחילה היה בגדר של מידע בלבד, עשוי להיות במשך הזמן אמונה, אינטואיציה, טענה המתקבלת כאמת מובנת מאליה

נחזור לרגע לדוגמה שצוינה קודם לכן. נבדקים בגילים שונים, התבקשו להשוות זוויות קדקודיות α, β שנוצרו על-ידי שני ישרים נחתכים (ראו איור 1ב)

ילדים צעירים בדרך כלל יענו כי β גדולה מ-α. בוגרים יותר לומדים כי $\alpha=\beta$. בתחילה, המשפט תקף עבורנו, כי המורה הסבירה אותו, על-פי הגדרת זוויות קדקודיות. עם הזמן, התלמיד מתרגל לפירוש הנכון של זוויות קדקודיות (אין כל משמעות לאורך השוקיים), והוא מקבל את שוויון הזוויות α ו- β כטבעי, וברור אינטואיטיבית. זוהי **אינטואיציה** שניונית

קשרים בין אינטואיציות ראשוניות ואינטואיציות שניוניות בהוראה

בתהליך ההוראה, הלומד נתקל בעובדות ובטענות בעלות ביסוס מדעי, הנוגדות את האינטואיציות שלו. ומה קורה אזי? יש מספר אפשרויות

א האינטואיציה הראשונית, ההתחלתית, כה חזקה שאפילו אמת מדעית לא יכולה לבטל אותה. לדוגמה,

אנשים אינם בוחרים, בדרך כלל, את סדרת המספרים 1, 2, 3, 4, 5, 6 במשחק לוטו, אפילו אם הם משוכנעים **תיאורטית**, כי לכל קבוצה של שישה מספרים יש אותם סיכויי זכייה

במקרה זה, האינטואיציה הראשונית, השגויה (המיסקונספציה) שורדת בתודעתנו למרות שהיא נמצאת בקונפליקט עם הידע התיאורטי בו אנו בטוחים (כי **לכל** מדגם של שישה מספרים יש אותה הסתברות לזכייה)

ב אפשרי מצב, בו במקביל לאינטואיציה הראשונית, ההתחלתית, אנו מפתחים בהשפעת הלמידה והניסיון האמפירי, אינטואיציה שנייה, שונה. לדוגמה, שואלים תלמיד, אילו כוחות פועלים על גוף הנזרק אנכית כלפי מעלה. התשובה השגורה היא: שני כוחות - כוח הכובד והכוח הזורק את הגוף כלפי מעלה. זוהי אינטואיציה טבעית (ראשונית). לכל פיסיקאי ברור כי מדובר בכוח אחד בלבד, שהוא כוח הכובד בשילוב עם ההתמדה, שהיא אינה

כוח עבור פיסיקאי הידע הנרכש על-ידי למידה, הפך עם הזמן לאמונה, לאמת מובנת מאליה זוהי אינטואיציה שניונית, כלומר, אינטואיציה שהתפתחה אך ורק על-ידי למידה ואימון מנטלי אינטנסיבי

ג ניזכר באמונות האינטואיטיביות כי 'כפל מגדיל וחילוק מקטין' עבור אדם (כמו למשל מורה למתמטיקה) המשתמש בשברים ובאופן כללי במספרים רציונליים, מובן מאליו כי כאשר כופלים, למשל 1/2 ו 6, מקבלים 3 זה הרבה מעבר לקוגניציה פורמלית - זוהי אינטואיציה - אינטואיציה שניונית את מקומה של ההכללה הראשונית, השגויה, המבוססת על האינטואיציה (כפל מגדיל), תופסת אינטואיציה חדשה, שהיא האמונה כי תוצאת פעולת הכפל (מגדיל או מקטין) תלויה באופי הגורמים של המכפלה (כלומר, אם אחד הגורמים או שניהם גדולים או קטנים מ-1)

בדרך כלל, עובר זמן עד אשר ידע פורמלי הופך להיות ידע אינטואיטיבי, ובמשך זמן לא מבוטל, ייתכן דו-קיום של האינטואיציה השניונית, החדשה, לצד הישנה, הראשונית.

ד בדוגמה קודמת, עסקנו בהשוואת מספר האיברים בקבוצת המספרים הטבעיים עם מספר האיברים בקבוצת המספרים הזוגיים מחד גיסא, קבוצת הזוגיים כלולה, כתת-קבוצה, בקבוצת המספרים הטבעיים אינטואיטיבית אנו נוטים לטעון כי יש יותר טבעיים מאשר זוגיים

מאידך גיסא, אפשר בפשטות למצוא התאמה חד-חד-ערכית בין כל מספר טבעי לכל מספר זוגי

$\{1, 2, 3, 4, \quad \}$

$\{2, 4, 6, 8, \quad \}$

ולכן שתי הקבוצות שקולות

שתי הדעות הללו יכולות להתקיים זו בצד זו למשך זמן רב לפני שהנכונה מבין השתיים תשתלט, ואז מה שנראה קודם לכן כשכנוע פורמלי, יהפוך לאמונה אינטואיטיבית (לאינטואיציה שניונית)

לסיכום אינטואיציות המתפתחות אצל האדם **באופן טבעי** כתוצאה מהתבגרות, התנסות ואינטראקציה עם הסביבה הן **אינטואיציות ראשוניות**

אינטואיציות המתפתחות כתוצאה **מאימון שיטתי**, בדרך כלל במסגרת של תהליך הוראה סיסטמטי, הן **אינטואיציות שניוניות** ההבחנה בין השתיים אינה מוחלטת, שכן כל אינטואיציה תלויה בהתנסות האישית של היחיד השוני העיקרי הוא בדרך ששתי הקטגוריות נרכשות אינטואיציות ראשוניות מתפתחות בתנאים הרגילים של חיי היומיום (ללא כל מאמץ מיוחד), בעוד שהאינטואיציות השניוניות דורשות התמדה באימון מיוחד ובתנאי הוראה הולמים

נכונותן של אינטואיציות

נדגיש כי ההבדל בין אינטואיציות נכונות לאינטואיציות שגויות (לא נכונות) הוא יחסי בלבד ותלוי בהקשר הקונספטואלי שאנו שופטים אותן לדוגמה

א רבים טוענים כי 'כפל מגדיל וחילוק מקטין' זוהי טענה אינטואיטיבית המבוססת על ההתנסות המוקדמת של הילד עם מספרים טבעיים כל עוד אנו דנים בקבוצת המספרים הטבעיים, המשפטים הללו נכונים וכך גם האינטואיציות המתאימות אולם, כאשר סטודנט במכללה מצהיר אותן הצהרות, נאמר שיש לו אינטואיציות שגויות, שכן אנו מניחים שהסטודנט נחשף לפני זמן רב למערכת מספרים רחבה הכוללת לא רק מספרים טבעיים אלא גם מספרים אחרים כמו שברים קטנים מ-1, או מספרים שליליים, שעבורם ההיגדים הללו (האינטואיציות) אינם נכונים עוד

ב כאשר אנו דנים בתנועתו של גוף הנזרק כלפי מעלה, על-פי ניסיוננו על פני כדור הארץ, הרי שהגוף נע כל עוד יש כוח המקיים את התנועה זוהי אינטואיציה ראשונית שיש לכל אחד ואחד בהקשר של תנועתם של גופים

זוהי אינטואיציה נכונה כל עוד אנו מתייחסים לתנועת גופים בקרבת כדור הארץ על פני כדור הארץ נדרש כוח כדי לקיים את התנועה שכן קיימים כוחות כמו התנגדות האוויר (כוח החיכוך עם האוויר) וכוח המשיכה של כדור הארץ (כוח הכובד) אולם, בתנאים תיאורטיים, מניחים כי אין במרחב כוח משיכה ואין התנגדות של האוויר ואז גוף ימשיך לנוע במרחב לנצח, בכיוון ישר ובמהירות קבועה

בדרך כלל, ההבחנה בין אינטואיציות נכונות לבין אינטואיציות שגויות נעשית על-ידי השוואת אינטואיציות המבוססות על הניסיון האישי, המוגבל, של כל אדם ואדם עם הקונספציות המוכחות בצורה אובייקטיבית ומקובלות על-ידי הקהילה המדעית

השפעת הצגת הבעיה על התגובה האינטואיטיבית

כאשר אנו דנים בפירושים אינטואיטיביים, יש לקחת בחשבון את דרך הצגת הבעיה נחזור לדוגמה המוכרת לנו של השוואת קבוצת המספרים הטבעיים עם קבוצת המספרים הזוגיים החיוביים שתי הקבוצות שקולות זו לזו שכן קימת ביניהן התאמה חד-חד ערכית ועל

$M_1 = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\ \ \}$
$M_2 = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\ \ \}$

לכל מספר טבעי מתאים מספר זוגי (כפולתו ב-2) ולהפך התאמה זו היא ויזואלית וברורה אינטואיטיבית

נתבונן באותה בעיה המוצגת באופן שונה

$M=\{1, [2], 3, [4], 5, [6], 7, [8],\ \ \}$

בהצגה זו מודגשת העובדה שקבוצת המספרים הזוגיים **מוכלת** בקבוצת הטבעיים. הצגה כזו מעוררת כלל - סכמה -**המתאים לקבוצות סופיות בלבד** קשה מאוד לקבל אינטואיטיבית שקבוצה שקולה לתת-קבוצה שלה. אינטואיטיבית ברור לנו לגמרי כי השלם גדול מחלקו - דבר שהוא נכון, אולם **עבור קבוצות סופיות בלבד.**

נתבונן בדוגמה נוספת, שונה, באופיה. חלק ניכר של נבדקים שנשאלו אם הקבוצה

$M_2=\{$ a, b, a, b, a, b, $\}$ היא קבוצה סופית או אינסופית, ענו כי הקבוצה היא אינסופית. התשובה הנכונה, הנוגדת את צורת ההצגה, היא שהקבוצה היא סופית ומכילה רק שני איברים a ,b. בהתאם לכללי תורת הקבוצות, כל איבר בקבוצה נספר פעם אחת בלבד (בלצן 1997)

לאינטואיציות יש רגישות גבוהה להשפעת ההקשר, בעיקר בשל היעדר כל תמיכה לוגית, פורמלית. הדוגמאות שניתנו לעיל חשובות מאוד, שכן הן מדגישות את הצורך בניתוח נתוני הבעיה לאור המבנה הלוגי, הפורמלי שלה

רשימת ספרות

Bruner J [1965] *The Process of Education* Cambridge MA Harvard University Press

Fischbein E [1975] *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children* Dordrecht, Reidel

Fischbein, E & A Barash [1993] 'Algorithmic Models and their Misuse in Solving Algebraic Problems', in *Proceedings of the 17th International Conference of the P M E , Tsukuba, Japan,* pp 162-172

Fischbein E & T Nachlieli [in press] 'Concepts and Figures in Geometrical Reasoning' *International Journal of Educational Research*

Fischbein, E & D Schnarch [1997] 'The Evolution with Age of Probabilistic Intuitively-based Misconceptions', *Journal for Research in Mathematics Education* 28 (1) 96-105

Fischbein, E D Tirosh & P Hess [1979] 'The Intuition of Infinity' *Educational Studies in Mathematics* 10 3-40

Inhelder, B & J Piaget [1958] *The Growth of Logical Thinking from Childhood to Adolescence* London, Routledge and Kegan Paul

Piaget, J , B Inhelder & A Szeminska [1948] *La géometrie spontanée de l'enfant* Paris PUF

Poincare H [1913] *The Foundations of Science* New York Science Press

Tall D [1980] 'Looking at Graphs through Infinitesimal Microscopes Windows and Telescopes' *Mathematical Gazette* 64 22-49

Tsamir, P , D Tirosh & R Stavy [1997, submitted] 'Predicting Student's Responses when Comparing Vertical angles', *School Science and Mathematics*

Wilkening, F [1980] 'Development of Dimensional Integration in Children's Perceptual Judgement Experiments with Area Volume and Velocity', in F Wilkening J Becker & T Trabaso (eds), *Information Integration by Children* Hillsdale NJ Lawrence Erlbaum Associates

בלצן [1997] קשיים בתפיסת המושג קבוצה עבודת מסטר, בית הספר לחינוך, אוניברסיטת תל אביב

פישביין, א' ואי' קדם [1996] 'יודאות והוכחה בפיתוח החשיבה המתמטית', עלי'ה 18 25-26