תכנים חדשים

משפטים גיאומטריים הנוצרים על-ידי 'משחקים' בביטויים אלגבריים

אבי סיגלר
נהריה

1. האם נכון שכל משפט מתמטי נולד מהשערה?

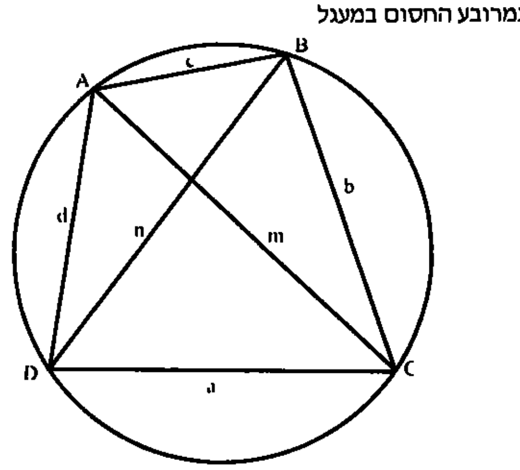
המתמטיקאי המפורסם לקטוש טען שגילוי המשפט המתמטי הוא תוצאה של תהליך הכולל אבחנה, השערה, אישוש או הפרכה (המולידה השערה חדשה), עד שההשערה מוכחת כנכונה

קשה מאוד לעבור בשבילי מוחו של המתמטיקאי המגלה משפט חדש, כי לעתים קרובות הוכחת המשפט אינה מרמזת על דרך הגילוי אפשר לשער תסריטים שונים ליצירת ההשערה שהביאה למשפט

נביא שתי דוגמאות של תסריט לשני משפטים מפורסמים

א. משפט ברהמגופטה

במרובע החסום במעגל



$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ שטח

(P = מחצית ההיקף)

* המאמר מבוסס על הרצאתי בנושא בכנס השנתי של הארגון לחינוך המתמטי בישראל בל"ג בעומר, מאי '96

אפשר להניח שברהמגופטה שיער את נכונות המשפט על-ידי הכללה של משפט הרון, כאשר במשפט הרון $a=0$

ב. משפט תלמי

במרובע חסום במעגל

$$ac+bd=mn$$

אפשר להציע תסריט גילוי על-ידי הכללה של משפט פיתגורס אם

ABCD מלבן $a=c$, $b=d$, $n=m$, אז משפט תלמי הוא הכללה של משפט פיתגורס

והנה דוגמה של משפט שתסריט הגילוי שלו אינו מתאים למודל של לקטוש

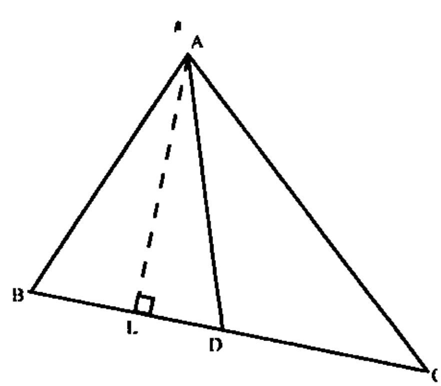
ג. משפט סטיוארט

במשולש ABC D נקודה כלשהי על BC

אזי קיים

$$AB^2DC - AD^2BC + AC^2BD = BD\ \ DC\ \ BC$$

איך הגיע סטיוארט לגילוי משפטו?



קשה מאוד להבחין במקור להשערה הוכחתו של סטיוארט מבהירה שהמשפט הוא תוצאה של מניפולציה אלגברית

הוכחה

לפי משפט פיתגורס מוכלל במשולשים ABD ו-ADC קיים

$$\begin{cases} AB^2 + BD^2 - 2BE\;BD = AD^2 & (1) \\ AC^2 + CD^2 - 2EC\;CD = AD^2 & (2) \end{cases}$$

סטיוארט הכפיל את (1) ב-CD ואת (2) ב-BD חיבר את שתי המשוואות וקיבל

$$AB^2\;CD + AC^2\;BD + BD\;DC(BD+DC) -$$
$$-2BD\;DC(EC+BE) = AD^2(BD+DC)$$

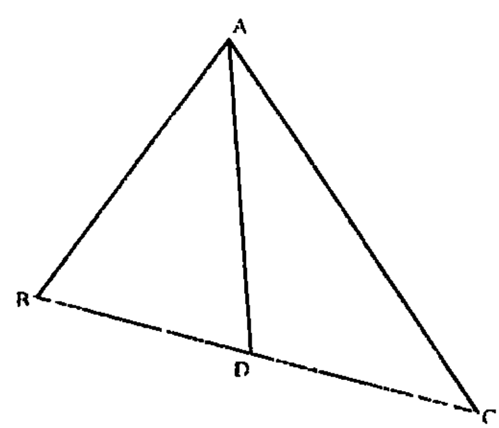
אבל BD+DC=EC+BE=BC ולכן מתקבל משפט סטיוארט

והנה דוגמה נוספת

ד. משפט ואן אובל

במשולש ישר זווית ABC ($\hat{A} = 90^\circ$), D נקודה כלשהי על BC אזי קיים

$$AB^2\;DC^2 + AC^2\;BD^2 = AD^2\;BC^2.$$



הוכחה

לפי משפט סטיוארט

$$AB^2\;DC - AD^2\;BC + AC^2\;BD =$$
$$= BD\;DC\;BC$$

נכפול את שני האגפים ב-BD+DC=BC ונקבל

$$AB^2\;DC(BD+DC) - AD^2\;BC^2 +$$
$$+AC^2\;BD(BD+DC) = BD\;DC\;BC^2$$

נוסחה אחרונה שקולה ל

$$AB^2\;DC^2 + AC^2\;BD^2 = AD^2\;BC^2 +$$
$$+BD\;DC(BC^2 - AB^2 - AC^2)$$

אבל לפי משפט פיתגורס $BC^2 - AB^2 - AC^2 = 0$ לכן קיבלנו את משפט ואן אובל

לגבי המשפטים של ברהמגופטה ותלמי אפשר להניח שמקורם היה בהשערה ואילו לגבי המשפטים של סטיוארט וואן אובל אפשר להניח שמקורם לא כלל השערה והם הושגו על-ידי מניפולציה אלגברית

2. גם תלמידים יכולים ליצור משפטים על-ידי 'משחקים' בביטויים אלגבריים

בפרק זה אציג מספר דוגמאות של משפטים גיאומטריים שאפשר להגיע אליהם במהלך הלימודים בכיתות י' וי"א

א בפרק של אי-שוויונים זהותיים הוכח

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$$

כאשר

$0 < a, b, c$

תלמידה בשם אירנה נתנה פירוש גיאומטרי לאי-שוויון

אם נניח

כי a, b ו- c הם צלעות של משולש ששטחו S

כי אז

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = \frac{h_a + h_b + h_c}{2S}$$

(h גובה, S שטח) וקיבלה

$$h_a + h_b + h_c \geq 2S\;\frac{9}{a+b+c}$$

אבל $r = \frac{2S}{a+b+c}$, כאשר r הוא רדיוס המעגל החסום במשולש

לכן

$$h_a + h_b + h_c \geq 9r$$

כלומר סכום הגבהים גדול או שווה ל-9 רדיוסים של המעגל החסום

ב מאגר הידע של תלמידי כיתה יא כולל נוסחאות רבות לשטח משולש

$$S=\begin{cases}\frac{a\,h_a}{2},\frac{b\,h_b}{2},\frac{c\,h_c}{2}\\ p\cdot r,(p-a)r_a,(p-b)r_b,(p-c)r_c\\ \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\\ \frac{abc}{4R}\end{cases}$$

(כאשר r_c, r_b, r_a רדיוסי המעגלים החסומים חיצונית)
r - רדיוס המעגל החסום ו p - מחצית ההיקף של המשולש,
כלומר $2p = a+b+c$

תלמידה בשם רינה, בהנחייתי, במסגרת סדנת מחקר לתלמידים בטכניון בשנת 92, מצאה משפטים רבים על-ידי ימשחקים אלגבריים בנוסחאות שטח המשולשי רוב המשפטים ידועים, אך עבורה כולם היו חדשים

1 $r\ r_a\ r_b\ r_c = S$

2 $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$

3 $r_a+r_b+r_c \ge 9r$

4 $r_a = h_a \Leftrightarrow \frac{b+c}{2}=a$

5 $r_a+r_b+r_c \ge h_a+h_b+h_c$

6 $r_a+r_b+r_c = 4R+r$

הוכחת רוב המשפטים מידית ואדגים את הוכחות 2.

$$p-a+p-b+p-c=p$$

לכן

$$\frac{S}{r_a}+\frac{S}{r_b}+\frac{S}{r_c}=\frac{S}{r}$$

לכן

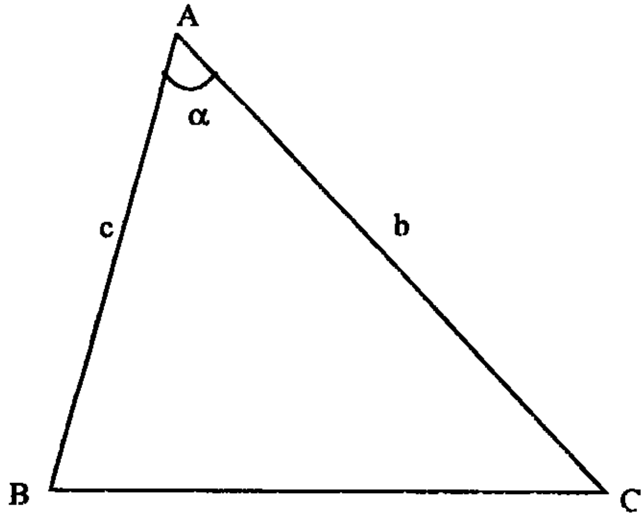
$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$$

לא מצאתי את משפט 6 בספרים

3. המשפטים של ברהמגופטה ושל תלמי שקולים

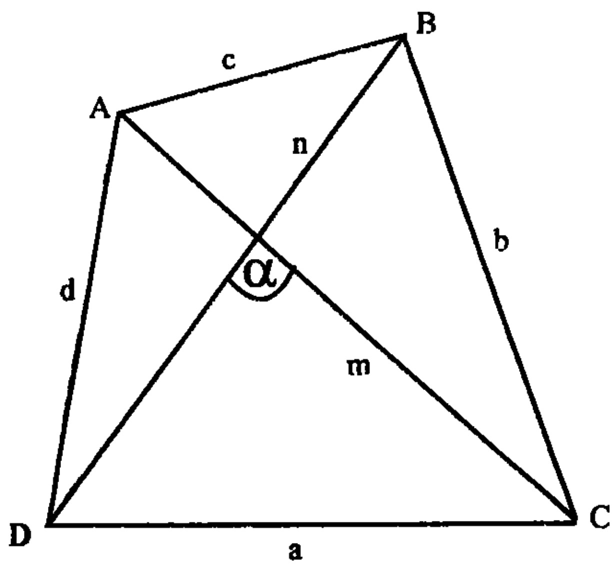
כשתלמידים לומדים את משפט הסינוסים, נוספת למאגר הידע עוד נוסחה לשטח המשולש

$$S=\frac{bc\sin\alpha}{2}$$



מתוך נוסחה זאת נובעת נוסחת שטח מרובע

$$S=\frac{mn\sin\alpha}{2} \quad (3)$$



בפעולה אלגברית דומה מאוד למציאת הנוסחה (3) אפשר לקבל הכללה של משפט הקוסינוסים

$$(b^2+d^2)-(a^2+c^2)=2mn\cos\alpha \qquad (4)$$

אם נסלק את $\sin\alpha$ ו-$\cos\alpha$ מן הנוסחאות (3) ו-(4) על-ידי שימוש בזהות $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ נקבל

$$[(b^2+d^2)-(a^2+c^2)]^2+16S^2=4m^2n^2 \qquad (5)$$

ועתה אם המרובע חסום במעגל וידועה נוסחת תלמי $mn=ac+bd$ נקבל את משפט ברהמגופטה

ואם ידוע משפט ברהמגופטה מקבלים את משפט תלמי לכן, נוסחה (5) מוכיחה שמשפט תלמי ומשפט ברהמגופטה שקולים

4. סיכום

לא כל משפט בגיאומטריה 'נולד' כתוצאה מהשערה. במאמר זה הוצגו שני משפטים מפורסמים שתסריט הגילוי שלהם הוא מניפולציה בביטויים אלגבריים

במהלך הלימודים התיכוניים קיימות הזדמנויות חקירה, המביאות לתוצאות מתמטיות מעניינות. הדגמתי תוצאות שהושגו על-ידי תלמידים בהנחייתי ואשר גרמו להם סיפוק רב, הפתעה ותחושה שלא רק שהמשפטים חכמים, אלא שיהם עצמם חכמים' (כדברי נצה מובשוביץ-הדר)

ההזדמנות שניתנה לתלמידים 'לעבור בשבילי מוחו של החוקר גרמה להם, להערכתי, תחושה שהם נוגעים במתמטיקה. פויה (Polya) טען שההכשרה המתמטית של הלומד אינה שלמה אם הוא לא פתר בעיה שהוא ניסח. תלמידים מסוגלים לנסח שאלות ומשפטים בטכניקות רבות שאחת מהן הוצגה במאמר זה 'משחקים בביטויים אלגבריים' - תוך כדי שימוש במאגר הידע הגיאומטרי שלהם

הסטודנט הנצחי