משפט פרמה האחרון - דוח התקדמות (חלק שלישי)

מאת: בנימין וייס

בחלקים הראשונים של סקירה זו הסברנו כיצד תוצאה חדשה של ג. פלטינגס שופכת אור חדש על ההשערה המפורסמת הידועה כ"משפטו האחרון של פרמה":

לכל $n \geq 3$, אין פתרון בשלמים למשוואה

$$x^n + y^n = z^n \ , \ (x, y, z \neq 0) \qquad (*)$$

כל מטרתנו בחלק אחרון זה היא לנסח את משפטו של פלטינגס ולהראות כיצד אפשר ליישם אותו למשפט פרמה. ההוכחה עצמה מבוססת על תורות כלליות בגיאומטריה אלגברית, ולא נוכל לסקור אותה במסגרת זו.

אם נחלק את שני אגפי (*) ב-z^n, נקבל משוואה חדשה

$$\left(\frac{x}{z}\right)^n + \left(\frac{y}{z}\right)^n = 1 \qquad (**)$$

בשני נעלמים, ופיתרונות בשלמים של (*) עוברים לפיתרונות של (**) במספרים רציונליים. משפטו של פלטינגס עוסק באופן כללי בפולינום $P(X,Y)$ בשני משתנים עם מקדמים רציונליים, וטוען שאם הפולינום מספיק מסובך, אזי יש למשוואה

$$P(X,Y) = 0$$

רק מספר סופי של פיתרונות רציונליים. את הסיבוך המתאים לשאלה הזאת מכנים ה ג נ ו ס (genus) של הפולינום, והוא מספר שלם-אי-שלילי המוגדר על-ידי הפולינום P. עוד מעט נרחיב את הדיון על הגנוס, אך נוכל כבר לנסח את המשפט פלטינגס:

משפט: אם $P(X,Y)$ פולינום עם מקדמים רציונליים בעל גנוס הגדול או שווה לשניים, אזי למשוואה

$$P(X,Y) = 0$$

יש לכל היותר מספר סופי של פיתרונות רציונליים.

התרומה העיקרית להגדרת הגנוס של פולינום היא מעלה הפולינום, אם אין לפולינום (או ליתר דיוק לעקום המוגדר על-ידי הפולינום) נקודות סינגולריות (ראה בהמשך), הגנוס ניתן בנוסחה

$$g(P = 0) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

כאשר n שווה למעלת P. בטרם נמשיך את ההסבר של מהות הגנוס, נראה מה קורה כאשר מעלת P שווה ל-1 או ל-2, שאז תמיד הגנוס של P שווה לאפס.

א. כאשר המעלה של P שווה ל-1, יש לנו ענין עם משוואת ישר ℓ

$$a\,X + b\,Y + c = 0 \qquad (\ell)$$

וקל לוודא שאם a,b,c כולם רציונליים, אזי יש אינסוף נקודות רציונלית (X,Y) על הישר ℓ.

ב. נבדוק דוגמא כאשר המעלה של P שווה ל-2, ונסתכל על העקום המוגדר על-ידי

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad (C)$$

שהוא כידוע מעגל. הנקודה $(1,0)$ נמצאת על המעגל. נסתכל בישר $y = r(1-x)$ העובר דרך נקודה זו והנקודה הרציונלית $(0,r)$.

זה ישר "רציונלי" הפוגש את העקום (C) בנקודה נוספת שניתן לחשבה כפיתרון המערכת

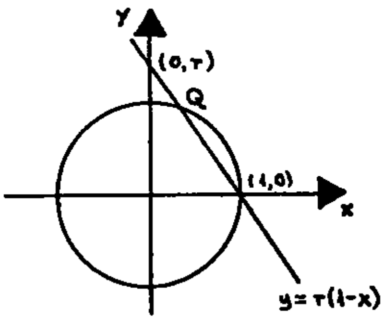
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = r(1-x) \end{cases}$$

על-ידי הצבה מקבלים $x^2 + r^2\,(1-x)^2 = 1$

או $(1 + r^2)\,x^2 - 2r^2x + (r^2-1) = 0$

סכום הפיתרונות הוא $\frac{2r^2}{1+r^2}$, ופיתרון אחד הוא $x = 1$,

ולכן הפיתרון השני הוא



$$x = \frac{2r^2}{1+r^2} - 1 = \frac{r^2-1}{r^2+1}$$

מהמשוואה $y = r(1-x)$ מקבלים אז

$$y = \frac{2r}{r^2+1}$$

ולכן גם הנקודה $\left(\frac{r^2-1}{r^2+1}\,,\ \frac{2r}{r^2+1}\right)$

על המעגל. נקודה זאת היא רציונלית כאשר r רציונלי, ובעצם כל נקודה רציונלית נוספת על המעגל C מתקבלת בצורה כזאת, כפי שאפשר לוודא בקלות: אם Q נקודה רציונלית על C, אז הישר הנקבע על-ידי Q והנקודה (1,0) יפגוש את הישר $x=0$ בנקודה רציונלית $(0,r)$; ואז למשוואת הישר הזה הצורה $y = r(1-x)$.

דרך אגב, אם נכתוב $r = u/v$, כלומר כמנה של שני מספרים שלמים, נקבל את נוסחאות השלשות הפיתגוראיות:

$$x = u^2 - u^2,\ y = 2uv,\ z = u^2 + v^2$$

ההסתכלות החדשה, הגאומטרית, טובה גם לכל עקום ממעלה שנייה. היא גם נותנת בצורה מפורשת התאמה בי-רציונלית בין העקום ובין ישר. אנו קוראים להתאמה בשם ב י-ר צ י ו נ ל י ת אם גם הפונקציה וגם ההופכית שלה הן פונקציות רציונליות. במקרה שלנו

$$t \longmapsto \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\,,\ \frac{at}{t^2+1}\right)$$

היא העתקה רציונלית מהישר על המעגל, וההפכית שלה ניתנת על-ידי

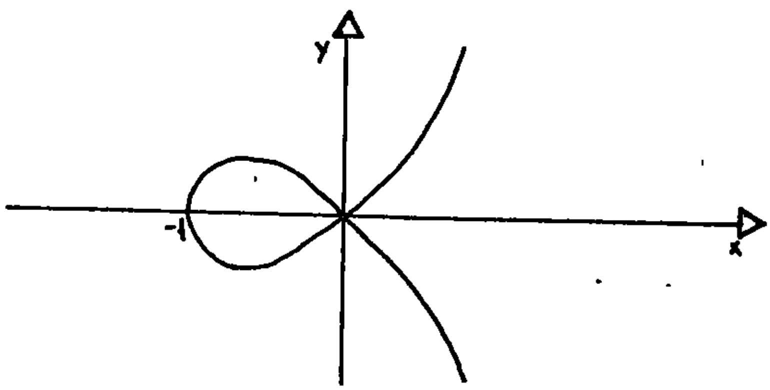
$$(x,y) \longmapsto \frac{y}{1-x}$$

שאף היא רציונלית.

אפשרות זאת, למצוא התאמה בי-רציונלית בין העקום ובין ישר, היא המאפיינת עקומים מגנוס 0. אפשרות זאת קיימת גם כאשר מעלת הפולינום גדולה משניים, ועובדה זו מסבירה מדוע אי-אפשר להסתפק בנוסחה בשביל הגנוס אשר תהיה תלויה אך ורק במעלה. נסתכל, למשל בפולינום

$$y^2 - x^3 - x^2 = 0 \qquad \text{(D)}$$

לעקום המוגדר ע"י משוואה זו במישור R^2 יש נקודה כ פ ו ל ה באפס:



$$y^2 = x^2\,(1+x)$$

אם נסתכל, על כן, בישרים שצורתם

$$y = ax$$

ונחפש פיתרון של המערכת

$$\begin{cases} y^2 = x^2(1+x) \\ y = ax \end{cases}$$

נקבל על-ידי הצבה:

$$a^2x^2 = x^2(1+x)$$

ואם $x \neq 0$, נוכל להסיק

$$a^2 = 1+x$$

או

$$x = 1-a^2$$

$$y = a - a^3$$

ושוב קיבלנו התאמה בי-רציונלית בין העקום (הפעם ממעלה שלוש) לבין "ישר".
ברור, כי הנקודה $(0,0)$ היא נקודת מיוחדת ס י נ ג ו ל ר י ת של העקום
(D). אם נרצה לתת הגדרה אנליטית יותר, נעבור לפולינום ההומוגני המתאים
ל (D) במישור הפרויקטיבי: נסתכל בשלשות $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ כאשר מזהים
(x,y,z) ו- (x',y',z') אם קיים $\lambda \neq 0$ כך ש

$$x' = \lambda x,\ y' = \lambda y,\ z' = \lambda z$$

$$P(x,y,z) = zy^2 - x^3 - x^2z = 0$$

ונחשב $\left(\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}\right)$

במקרה שלנו זה שווה ל-

$$(-3x^2-2xz\ ,\ 2yz,\ y^2-x^2)$$

ה"גרדיאנט" הזה מתאפס בנקודה $(0,0,1)$ ולכן נקודה זו היא סינגולרית. זאת
ההגדרה הכללית, והנוסחה הכללית של הגנוס היא

$$\text{genus } (P) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum v_p$$

(הסכום על כל הנקודות הסינגולריות p) כאשר v_p מספר שלם הגדול או שווה לאחד
ומבטא את מידת הסינגולריות של הנקודה. בדוגמה שחישבנו $v_{(0,0)}$ חייב להיות
שווה לאחד, כי אחרת הגנוס היה יוצא שלילי, ויש משפט המבטיח שזה לא יקרה.

כעת, אם נחזור לפולינום של פרמה $F(x,y,z) = x^n + y^n + z^n = 0$
ונחשב $\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$

נקבל $(nx^{n-1},\ ny^{n-1},\ nz^{n-1})$

וזה שווה ל- $(0,0,0)$ רק כאשר $x=y=z=0$ שאיננה נקודה במישור הפרויקטיבי. זאת
אומרת, כי אין לעקום של פרמה נקודות סינגולריות בכלל, והגנוס שלו שווה
ל $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ אשר גדול מ-2 כאשר $n \geq 4$. לכן לכל $n \geq 4$ מבטיח לנו המשפט
של פלטינגס כי למשוואת פרמה יש רק מספר סופי של נקודות רציונליות.

המקרה $n = 3$ שאיננו מכוסה כאן טופל כבר על-ידי L. Euler, שהוכיח במאה
השמונה-עשרה את נכונותו של משפט פרמה במקרה זה.